

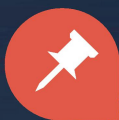
Le bulletin de l'APMEP - N° 558

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Octobre, novembre, décembre 2025

Le hasard



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Magali HILLAIRET, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Michel SUQUET, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe Technique : Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Pol LE GALL, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondants Publimath : Marie-Line MOUREAU, François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : décembre 2025. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Premier succès, collection et aléa...

Dans ce nouvel article sur les probabilités, Florent Malrieu présente le « temps de premier succès » appliqué à deux situations : la méthode du rejet et le collectionneur de coupons.

Florent Malrieu



Introduction

Le temps de premier succès dans une répétition d'expériences aléatoires de même probabilité de succès est une variable aléatoire qui apparaît très naturellement dans de nombreuses applications, même si son étude mathématique est délicate au niveau lycée car il prend un nombre infini de valeurs. Il fait néanmoins partie du programme de l'option Maths complémentaires dans la rubrique « temps d'attente » et des approches par la manipulation ou la simulation sont possibles comme nous le verrons dans la suite.

Temps de premier succès

On s'intéresse au temps de premier succès lorsque l'on répète une même expérience à l'issue incertaine dont les seules issues sont un succès ou un échec :

- obtenir « Face » en lançant une pièce,
- obtenir 6 en lançant un dé à six faces,
- gagner au loto...

Le point commun de ces différentes situations est qu'il n'y a *a priori* pas d'influence entre les tentatives successives (rater une fois ne favorise ni n'obère le succès ensuite) et la probabilité de succès reste constante à chaque tentative (il paraît naturel de supposer que l'on ne progresse pas au « Pile » ou « Face »).

Pour étudier mathématiquement le temps de premier succès, il faut proposer un modèle rendant compte de la situation réelle décrite ci-dessus et permettant de calculer des quantités d'intérêt.

Soit $p \in]0; 1[$ la probabilité de succès d'une tentative; on modélise le résultat de la tentative $n \in \mathbb{N}^*$ par une variable aléatoire X_n de loi de Bernoulli qui vaut 1 (et correspond à un succès) avec probabilité p et 0 (associé à un échec) avec probabilité $1 - p$. Reste à traduire mathématiquement l'absence de « lien » entre les différentes tentatives. Lorsque le nombre de tentatives considérées est fini, disons égal à n , on impose que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n soient indépendantes (au sens mathématique) : pour $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n). \quad (1)$$

La probabilité d'essayer n échecs consécutifs vaut alors $(1 - p)^n$. Quel que soit le nombre de tentatives fixé *a priori*, il ne sera donc pas suffisant pour garantir un succès.

Il est possible (mais délicat si l'on veut entrer dans tous les détails) d'établir qu'il existe un espace Ω , une mesure de probabilité \mathbb{P} sur Ω et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur Ω tels que la relation (1) soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On dit alors que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

Dans tout l'article, nous nous placerons dans ce cadre sans préciser l'ensemble Ω et la mesure de référence \mathbb{P} , mais en utilisant seulement le fait que les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de lois de Bernoulli de paramètre p .



Remarque 1

Les programmes du secondaire ont longtemps éludé les temps de premier succès afin d'éviter d'introduire cette suite de variables aléatoires indépendantes. Cependant, ils abordent les lois uniformes sur un intervalle ou les lois exponentielles. Or ces objets sont de complexité équivalente. Par exemple, si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 1]$, on peut définir une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $X_n = 1$ si la n -ième décimale de U est inférieure ou égale à 4 et $X_n = 0$ sinon. Les variables aléatoires obtenues sont indépendantes au sens où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les n premières variables aléatoires vérifient la condition (1) et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Dans la suite de cette partie, nous rappelons les principales propriétés de la loi géométrique.

La loi géométrique

On se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même distribution de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p$.

On dit que la tentative i est un succès si X_i vaut 1 et un échec sinon. Le réel p représente la probabilité de succès en une tentative. Le temps de premier succès T est alors défini comme le plus petit indice des termes de la suite valant 1.

Autrement dit, $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$.

Dans le cas où $X_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T = +\infty$.

Théorème 1

La variable aléatoire T est à valeurs dans \mathbb{N}^* et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T > n) = (1 - p)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T = n) = p(1 - p)^{n-1}.$$

De plus, $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

On dit que T suit la loi géométrique de paramètre p .

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le temps de premier succès T est strictement supérieur à n si et seulement si les n premières tentatives sont des échecs, c'est-à-dire si $X_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > n) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \dots \cap \{X_n = 0\}) \\ &= (1 - p)^n \end{aligned}$$

par indépendance des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

En remarquant que

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n - 1) - \mathbb{P}(T > n),$$

on obtient l'expression de $\mathbb{P}(T = n)$. Enfin, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = +\infty) \leq \mathbb{P}(T > n) \leq (1 - p)^n$, on obtient que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. ■

Une question naturelle est de déterminer l'espérance (ou moyenne) de ce temps de premier succès. La difficulté vient du fait que T peut prendre des valeurs arbitrairement grandes avec une probabilité strictement positive : il est possible (bien que peu probable) de faire mille « Pile » consécutifs. L'espérance de T est définie ainsi :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T = k).$$

Pour calculer $\mathbb{E}(T)$, il est plus simple d'utiliser l'expression alternative

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$$

qui s'obtient en sommant la relation ci-dessous pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} k \mathbb{P}(T = k) &= k(\mathbb{P}(T > k - 1) - \mathbb{P}(T > k)) \\ &= \underbrace{k \mathbb{P}(T > k - 1) - (k + 1) \mathbb{P}(T > k)}_{\text{somme télescopique qui vaut } \mathbb{P}(T > 0)} \\ &\quad + \mathbb{P}(T > k). \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k = \frac{1}{p}$.

Ce calcul donne le résultat suivant.

Théorème 2

Si T suit la loi géométrique de paramètre p alors son espérance vaut $\frac{1}{p}$.

En moyenne, il faut lancer deux fois une pièce pour obtenir le premier « Face » et six fois un



dé pour obtenir le premier « 6 ». Mais il faudra jouer environ quatorze millions de fois (soit pendant environ 270 000 années à raison d'un ticket par semaine) en moyenne pour gagner pour la première fois le gros lot au loto.

On dit que la variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N}^* possède la propriété d'absence de mémoire si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(N > n + m | N > m) = \mathbb{P}(N > n).$$

On rappelle que la probabilité de A sachant B est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Elle est notée $\mathbb{P}_B(A)$ au lycée. Cette propriété, appelée également absence de vieillissement, signifie que le nombre d'échecs passés n'a aucune influence sur le temps de succès à venir. Ceci contredit la fameuse devise des Shadoks : « *Plus ça rate et plus on a de chances que ça réussisse* ». Elle est caractéristique des lois géométriques sur \mathbb{N}^* comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. N suit une loi géométrique,
2. N possède la propriété d'absence de mémoire.

Remarque 2

La condition nécessaire (1. \implies 2.) découle immédiatement du théorème 1. Pour la réciproque, on remarque que la propriété d'absence de mémoire implique que la fonction $f : n \mapsto \mathbb{P}(N > n)$ vérifie

$$f(n + m) = f(n)f(m)$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$. On montre alors par récurrence que $f(n) = f(1)^n$, ce qui permet de conclure.

Remarque 3

Le théorème ci-dessus est encore vrai si on remplace \mathbb{N}^* par \mathbb{R}_+^* et les lois géométriques par les

lois exponentielles. Le lien entre ces deux familles est très étroit. On peut par exemple remarquer que si X suit la loi exponentielle de paramètre 1 alors $1 + [\theta^{-1}X]$, où $[x]$ est la partie entière de x , suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\theta}$.

Dans la suite de l'article, nous allons présenter deux situations très classiques dans lesquelles la loi géométrique joue un rôle central : la méthode du rejet (dans un cas particulier simple) et le problème de la collection de vignettes.

Le dé à cinq faces et au-delà

On souhaite désigner au hasard qui dirigera le ministère de l'Éducation nationale parmi les cinq personnes suivantes : Élisabeth, Gabriel, Pap, Jean-Michel et Najat. Un dé équilibré à cinq faces ferait l'affaire mais ça ne court pas les rues (même si on en trouvera un dans l'article *Le dé égyptien* p. 75). On peut aussi utiliser un dé à vingt faces dont les adeptes de jeux de rôles sont friands et renuméroter les vingt faces en faisant apparaître quatre fois chacun des chiffres de 1 à 5. Mais on peut facilement choisir de manière équiprobable un nombre entier entre 1 et 5 avec un dé classique à six faces. L'algorithme est le suivant : on lance le dé jusqu'à ce que le résultat soit différent de 6.

Pourquoi cet algorithme fonctionne-t-il ? Le résultat est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et chacun de ces cinq nombres apparaît avec la même probabilité. On peut démontrer ce résultat et un peu plus comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4

La distribution du nombre A sorti de cet algorithme est la distribution uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. D'autre part, le nombre T de lancers nécessaires pour obtenir un résultat inférieur ou égal à 5 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{5}{6}$; enfin, les variables aléatoires A et T sont indépendantes.



Démonstration : On commence par caractériser la loi du couple (A, T) qui est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A = i, T = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 6, X_2 = 6, \dots, X_{n-1} = 6, X_n = i) \\ &= \frac{1}{6^n} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(T = n) = \sum_{i=1}^5 \mathbb{P}(A = i, T = n) = \frac{5}{6} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Ceci assure que T suit la loi géométrique de paramètre p . De même

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A = i) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A = i, T = n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

La loi de la variable A est donc uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De plus, on remarque que pour tout (i, n)

$$\mathbb{P}(A = i, T = n) = \mathbb{P}(A = i) \mathbb{P}(T = n).$$

Cette relation assure que A et T sont indépendantes. ■

Appliquons cette idée à un exemple (un peu) plus compliqué. On souhaite choisir au hasard uniformément une personne dans une classe de k élèves avec $k \leq 36$.

Remarquons que la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : \{1, 2, \dots, 6\}^2 &\rightarrow \{1, 2, \dots, 36\} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = 6(x - 1) + y\end{aligned}$$

est une bijection. Pour s'en convaincre, on peut penser à une classe où les élèves sont répartis dans six rangs comptant chacun six places. On peut identifier un élève par sa rangée et sa place dans cette rangée ou par sa position (dans l'ordre alphabétique par exemple).

On lance deux fois un dé à six faces et on note X et Y les deux résultats successifs. Le couple (X, Y) est de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 6\}^2$ et $\varphi(X, Y)$ est de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 36\}$. Si on veut choisir une personne parmi 36, on lance deux fois le dé et on utilise les résultats X et Y pour choisir la personne $\varphi(X, Y)$ (ou l'élève à la position Y dans la rangée X).

Si, par chance, la classe est moins chargée, avec disons k élèves, on peut à nouveau utiliser la méthode du rejet. On génère des couples (X, Y) jusqu'à ce que $\varphi(X, Y)$ soit inférieur ou égal à k . Le résultat obtenu est alors de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, k\}$.

Pour aller plus loin.

Cette idée très simple est en fait très maligne et utile dans des contextes plus sophistiqués.

Soit E un ensemble sur lequel on sait générer des variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ de loi uniforme et B un sous-ensemble de E . On peut construire des variables aléatoires uniformes sur B en ne conservant que les variables tombées dans B . Cet algorithme s'appelle la méthode du rejet. Il est très utilisé en pratique pour étudier des ensembles compliqués comme certains sous-ensembles de l'ensemble des permutations de n éléments par exemple. Il peut également fonctionner avec des lois à densité.

Collectionneur de vignettes

Tout le monde connaît ces collections d'images que les enfants collent dans des albums (équipes de foot, personnages de dessins animés, etc.). On cherche à comprendre combien de vignettes il faut acheter pour finir une telle collection.

Pour répondre mathématiquement à cette question, il faut poser un modèle qui doit répondre à deux contraintes antinomiques : être assez proche de la réalité pour être pertinent mais assez simple pour être étudié. Commençons par le cas « idéal » où l'on va recroiser la loi géométrique !

Le modèle uniforme

On considère une collection de a vignettes différentes numérotées de 1 à a . On achète des vignettes une par une jusqu'à complétion de la collection. On suppose qu'elles apparaissent de manière indépendante et selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, a\}$ (le vendeur n'organise pas la rareté et a très bien mélangé les images). On suppose également qu'il n'y a pas d'échanges de « doubles ».



Nous reviendrons à la fin de l'étude sur ces hypothèses qui peuvent paraître restrictives mais permettent d'étudier le modèle en détail.

On s'intéresse aux propriétés du premier instant, noté T , où les a vignettes différentes ont été obtenues.

Remarque 4

On peut reformuler ce problème en termes de dé. À combien de reprises doit-on lancer un dé à a faces pour les avoir toutes observées au moins une fois chacune ?

Le nombre aléatoire T est nécessairement supérieur ou égal à a mais il peut être arbitrairement grand avec une probabilité strictement positive puisque la probabilité que les n premières vignettes achetées soient toutes identiques est égale à a^{-n+1} . Déterminer la loi de T , c'est-à-dire déterminer, pour tout $k \geq a$, la probabilité que $T = k$ est très compliqué et peu utile. On va plutôt exprimer T comme la somme de temps aléatoires indépendants de lois géométriques.

Examinons le cas particulier $a = 3$. On raisonne en introduisant les temps successifs où l'on trouve une image différente de celles déjà collectées.

- La première image obtenue est nécessairement nouvelle. Remarquons qu'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre 1 vaut toujours 1 (le premier succès lorsque chaque tentative réussit avec probabilité 1 arrive au premier essai).
- Après ce premier succès, il nous reste à trouver les deux autres images qui nous manquent. Une nouvelle vignette arrivera après un nombre aléatoire de tentatives de loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.
- Il faut attendre ensuite un nouveau temps aléatoire de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ pour obtenir la dernière carte.

Plus généralement, on peut démontrer que T s'écrit

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_a$$

où les variables $(T_i)_{1 \leq i \leq a}$ sont indépendantes et T_i est de loi géométrique de paramètre $\frac{a+1-i}{a}$ pour $1 \leq i \leq a$. On peut en déduire, grâce au théorème 2, que

$$\mathbb{E}(T) = a \sum_{k=1}^a \frac{1}{k}.$$

où l'on reconnaît une somme partielle de la célèbre série harmonique.

Si de nombreuses propriétés de T peuvent être obtenues par le calcul, la simulation peut aussi aider à comprendre la loi de T . Pour cela, on peut simuler la réalisation d'un grand nombre de collections et en déduire une estimation de $\mathbb{P}(T > n)$ en déterminant la proportion de collections qui ne sont pas encore achevées après n tentatives (en faisant varier n).

Sur la figure 1, on peut voir que la probabilité de ne pas avoir fini une collection de taille $a = 50$ après avoir acheté 300 images est de l'ordre de 0,1 quand elle est aux alentours de 0,5 pour un peu plus de 200 images.

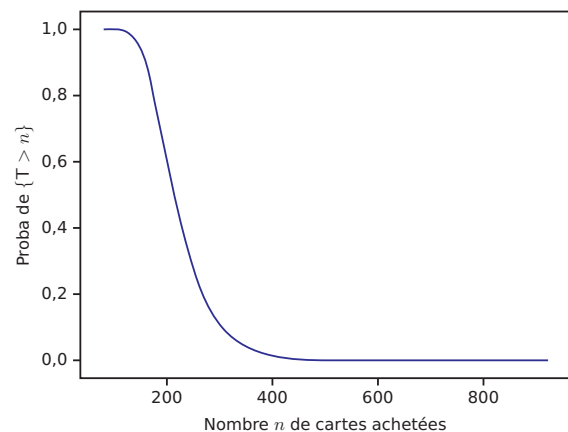


Figure 1. Simulation avec $a = 50$ et 10^6 simulations de collections.

Au-delà du cadre idéal : un calcul explicite

Que se passe-t-il si le vendeur de vignettes choisit d'organiser la pénurie d'une vignette ? Le calcul avec un nombre général de vignettes s'avère très compliqué. On peut alors étudier un cas particulier ou utiliser la simulation.



Imaginons que la collection se résume à deux vignettes. On peut reformuler cette situation très simple avec une pièce dont les faces (pile et face) apparaissant respectivement avec les probabilités respectives p et $1 - p$ pour $p \in]0; 1[$.

Combien de fois en moyenne faut-il lancer la pièce pour avoir vu les deux faces? On peut faire le calcul explicite mais on peut déterminer cette espérance « avec les mains ». Si le premier lancer donne « Pile », ce qui arrive avec probabilité p , il faut relancer la pièce jusqu'à obtenir le premier « Face », ce qui arrive au bout d'un temps de loi géométrique de paramètre $1 - p$. On raisonne de même si le premier lancer donne « Face ». On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= p \left(1 + \frac{1}{1-p}\right) + (1-p) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 1.\end{aligned}$$

On peut remarquer, ce qui est assez intuitif, que cette fonction de p atteint son minimum en $p = \frac{1}{2}$, quand la pièce est équilibrée, et tend vers l'infini lorsque p tend vers 0 ou 1. Plus la pièce est déséquilibrée et plus il faut la lancer, en moyenne, pour avoir observé les deux faces.

Appeler la simulation à l'aide

Pour une collection de a vignettes avec a quelconque, les calculs se corsent. La simulation permet de fixer n'importe quelle loi d'apparition de chacune des a vignettes différentes et de simuler un grand nombre n de temps de collection T_1, T_2, \dots, T_n indépendants.

On peut alors estimer, pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(T > k)$ que la collection ne soit pas finie après l'achat de k vignettes en calculant la proportion des temps $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui sont supérieurs à k . La loi des grands nombres assure que la proportion de collections non terminées parmi n après l'achat de k vignettes tend vers $\mathbb{P}(T > k)$ quand n tend vers l'infini :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i > k\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > k).$$

La figure 2 présente un exemple avec une collection de 30 vignettes où l'une est plus rare que les autres, qui ont la même probabilité d'apparition. On voit à nouveau que plus la vignette est rare, plus le temps de complétion de la collection est long.

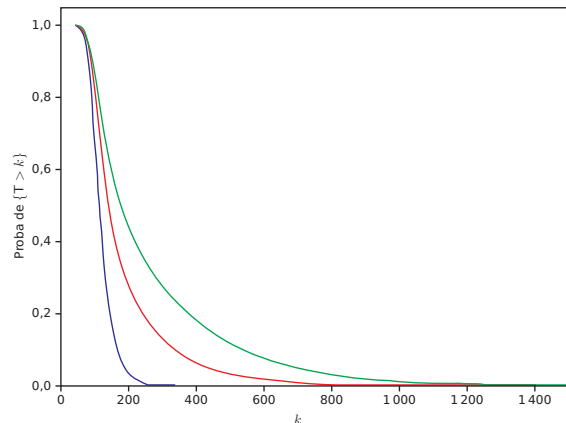


Figure 2. Estimation de la fonction $k \mapsto \mathbb{P}(T > k)$ avec 30 vignettes pour une probabilité d'apparition de la première vignette égale à $\frac{1}{30}$ (courbe bleue), $\frac{1}{150}$ (courbe rouge) et $\frac{1}{240}$ (courbe verte), les autres vignettes ayant la même probabilité d'apparition.

Conclusion

La loi géométrique apparaît très régulièrement dans les modèles aléatoires comme le montrent les quelques exemples évoqués ici. La méthode du rejet est un outil très important en simulation numérique. Elle permet de simuler des variables aléatoires de lois compliquées, y compris à densité. Quant au problème de la collection de vignettes, il apparaît très régulièrement dans des problèmes de modélisation très variés (mélange d'un jeu de cartes, infection d'une colonie d'insectes, etc.) mais c'est une autre histoire...

.....◆.....
Florent Malrieu est professeur à l'université de Tours, spécialiste des probabilités. Il s'est investi dans la diffusion autour de ce thème à l'IREM et en proposant des formations pour les laboratoires de mathématiques de collège et lycée de l'académie d'Orléans-Tours.

florent.malrieu@univ-tours.fr

© APMEP décembre 2025



Adhésion 2026

La campagne d'adhésion pour 2026 est lancée. Pour une bonne gestion, payez votre cotisation sans tarder. Cela ne concerne ni les adhérents en prélèvement automatique, ni les premières adhésions réalisées lors de l'inscription aux dernières Journées Nationales.

**Attention ! le Comité National a décidé que les bulletins
Au fil des maths déjà parus ne seront pas envoyés en
cas de renouvellement d'adhésion tardif.**

Pour un renouvellement comme pour une première adhésion, rendez-vous sur la boutique en ligne www.apmep.fr !

En cas de difficulté, n'hésitez pas à joindre le secrétariat par courrier électronique à secretariat-apmep@orange.fr ou par téléphone au 01 43 31 34 05.

*
* *



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2026 à Au fil des maths - le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) :

Adresse :

Code Postal : Ville : Pays :

Téléphone : Adresse courriel :

Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) :

Adresse de livraison :

Adresse de facturation :

Catégorie professionnelle : étudiant stagiaire 1^{er} degré 2^e degré
 service partiel contractuel enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : contactrgpd@apmep.fr.

Abonnement à Au fil des maths - le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

60 € TTC pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,

56,87 € TTC pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,

65 € TTC pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),

64 € TTC pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

par chèque

par mandat administratif

par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur [Chorus.pro](https://www.chorus.pro); indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :

Date : Signature : Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr

SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du n° 558



Le hasard

Éditorial

Opinions

Les mathématiques ont la cote

Claire Piolti-Lamorthe 3

Le hasard à l'école primaire : quels enjeux ?

Richard Cabassut 7

Avec les élèves

Culture scientifique et grand oral

Valérie Larose 17

Dialogue entre mathématiques et éco-gestion

Muriel Prat & Christophe Rivière 21

Take it easy!

Sylvie Grau & Sandrine Lemaire 29

Code en Bois

Marc Agenis-Nevers 43

Automaths, un exercice au service des élèves

Matthieu Colonval & Abdelatif Roumadni 48

Ouvertures

Petite enquête sur la géométrie du troisième degré

François Boucher 51

La fin de la Bataille a-t-elle sonné ?

Salim Rostam 57

Premier succès, collection et aléa...

Florent Malrieu 62

1 Récréations

Au fil des problèmes

Frédéric de Ligt 69

Des problèmes dans nos classes

Séverine Chassagne-Lambert 71

Un tour bien formulé

Dominique Souder & François Pétiard 72

Le dé égyptien

Pol Le Gall 75

Au fil du temps

La Geometria deutsch de Matthäus Roriczer

Michel Sarrouy 79

Matériaux pour une documentation 81

Hommage à Gilles Dowek

I. Le Naour, A. Ernoult, R. Charpentier, J.-C. Masseron & F. Nény 85

Hommage à Gilbert Arsac

Viviane Durand-Guerrier 88

À quels jeux de hasard jouent les élèves ?

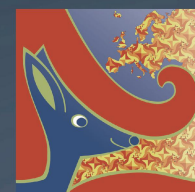
C. Derouet, C. Doukhan & groupe SPA Proba (IREM de Strasbourg) 90

John Urho Kemp

Valérie Larose 95



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr