Exemples de sujets :

Les exemples ci-après proviennent du *board* AQA (*Assessment and Qualification Alliance*).
On trouvera tous les renseignements concernant ce « *board* » (programme, exemples d'examens des années antérieures, etc.) à l'adresse internet suivante :

http://www.aqa.org.uk/

Vous trouverez sur le site de l'APMEP d'autres exemples d'énoncés de GCSE et de *A-level*.

Exemples d'énoncés de GCSE

Partie sans calculatrice :

La partie sans calculatrice comporte 24 questions à traiter en 1h30. Il est intéressant de voir que les premières sont très simples.

Question 1. Voici quatre cartes dont chacune porte un chiffre :

$$\boxed{3} \quad \boxed{7} \quad \boxed{6} \quad \boxed{1}$$

Le nombre affiché est 3761.
1 (a1) Utiliser ces quatre cartes pour écrire le plus petit nombre possible.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square$$

1 (a2) Utiliser ces quatre cartes pour écrire le plus grand nombre pair possible

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square$$

1 (b) Utiliser ces quatre cartes pour écrire une addition correcte

$$\square + \square = \square \; \square$$

1(c) On a besoin d'une cinquième carte portant un chiffre pour écrire la réponse correcte à 13×6. Écrire ci-dessous ce cinquième chiffre.

$$\square$$

Partie avec calculatrice :

La partie avec calculatrice comporte 22 questions à traiter en 2h. Un formulaire concernant les aires et volumes est fourni.

Question 3. (a) p est un nombre premier et r un nombre impair. L'expression pr^2

est toujours impaire	$\square$	est toujours paire	$\square$	peut être soit paire soit impaire	$\square$

(cocher la bonne réponse).

Donner des exemples pour justifier cette réponse.

3. (b) x, y, z sont trois entiers impairs. Écrire une expression fonction de ces trois nombres qui soit toujours un nombre pair.

Question 16. Expliquez comment vous étudieriez l'hypothèse suivante : « Dans les matchs de football, il y a plus de buts marqués lors de la seconde mi-temps que lors de la première ».
Votre réponse devra s'organiser logiquement et se référer à un plan indiquant :

- comment vous rassemblez les données,
- quelle quantité de données vous rassemblez,
- comment vous les traitez,
- votre interprétation et vos conclusions.

Exemples d'énoncés de *A-Level*

Premier extrait : algèbre linéaire et géométrie analytique

Il provient d'un examen de *Further pure 4*. L'épreuve, sur 75 points, durait 1 h 30.
Je respecte les notations anglaises

Question 1. (5 points)

Les vecteurs a et b sont tels que $a\ .\ b = 31$, $|a| = 5\sqrt{2}$ et $|b| = 3$ (*le point représente ici le produit scalaire,* || *la norme, et les vecteurs ne portent pas de flèche*).
Déterminer la valeur exacte de $|a \times b|$ (le signe × représente le produit vectoriel).

Question 2. (5 points)
Décrire la transformation unique représentée par chacune de ces matrices :

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$.

Question 3. (7 points)

(a) Trouver les valeurs propres de la matrice $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ et les vecteurs propres correspondants.

(b) Une transformation T du plan est donnée par la matrice M.
Écrire les coordonnées du point invariant.

Question 4. (7 points)

Soit $X = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

a) Déterminer XX^T.

(b) Prouver que $\mathrm{Det}(XX^T - X^TX) \leq 0$ pour tout valeur réelle de x.

(c) Trouver la valeur de x pour laquelle la matrice $XX^T - X^TX$ est singulière.

Question 5. (10 points)

(a) Déterminer les deux valeurs de l’entier n pour lesquelles le système :

$$\begin{cases} 2x + ny + z = 5 \\ 3x - y + nz = 1 \\ -x + 7y + z = n \end{cases}$$

n’a pas une solution unique.

(b) Pour la valeur positive de n trouvée en (a), préciser si le système est cohérent ou non, et interpréter ce résultat géométriquement.

Question 6. (16 points)

Les plans Π_1 et Π_2 ont pour équations respectives $r \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 7$ et $r \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 7.$.

Ici, il est sous-entendu que r est le vecteur de coordonnées $[x, y, z]$, *représentant les coordonnées d’un point quelconque de ce plan.*

(a) Déterminer, au degré près, l’angle aigu entre Π_1 et Π_2.

(b) En posant $z = t$, trouver une représentation cartésienne de la droite intersection de Π_1 et Π_2 sous la forme

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = z = t.$$

(c) La droite L, d’équation $r \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ (façon d’écrire le système paramétrique de la droite) coupe le plan Π_1 au point P et le plan Π_2 au point Q. Prouver que $PQ = k\sqrt{2}$, k étant un entier.

Question 8. (9 points)
Pour tout n différent de 1, les vecteurs a, b et c sont définis par

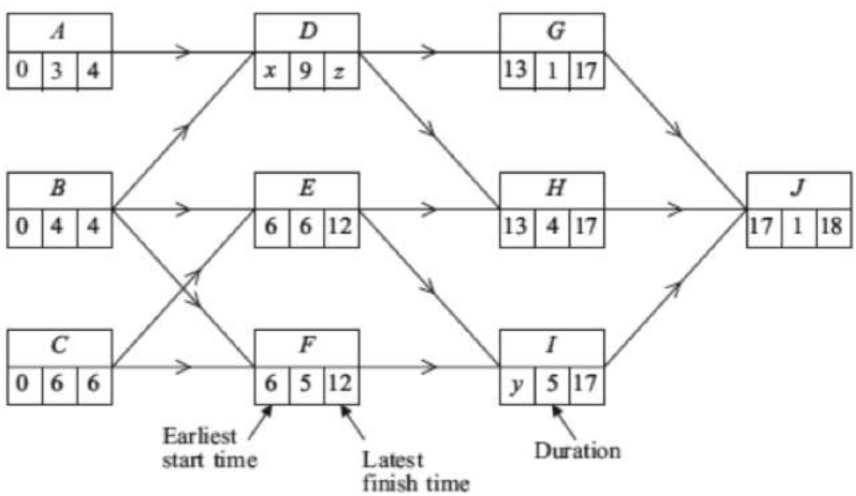
$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 2n \\ 2n^2 + n \\ -1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} n-1 \\ n^2 - 1 \\ 1 - n^2 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la valeur de n pour laquelle a, b et c sont linéairement dépendants.

Deuxième extrait : mathématiques de la décision

Il provient de l'épreuve de *Decision 2*, même durée, même nombre de points.

Question 1. (14 points)
Le diagramme ci-dessous montre un graphe de tâches et la durée, en jours, de chaque tâche pour un projet particulier. Certaines des dates au plus tôt et dates au plus tard sont montrées sur le diagramme.



(a) Trouver les valeurs des constantes x, y et z.

(b) Trouver les chemins critiques.

(c) Trouver l'activité ayant le flot maximum et donner la valeur de ce flot.

(d) Le nombre d'ouvriers nécessaires pour chaque tâche est donné dans le tableau ci-dessous :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Nombre d'ouvriers nécessaires	4	2	3	4	2	4	3	3	5	6

Sachant que chaque tâche démarre aussi tôt que possible et en supposant qu'il n'y a pas de limite au nombre d'ouvriers disponibles, construire un histogramme des ressources pour le projet sur la figure 1 ci-dessous (non donnée pour des questions de place), en indiquant clairement quelles tâches sont effectuées à tout moment.

(e) On découvre plus tard qu'il n'y a que 9 ouvriers disponibles à tout moment.

Utiliser un nivellement de ressources pour trouver le jour de début au plus tôt de la tâche J de telle sorte que le projet puisse être réalisé avec le moins de temps supplémentaire possible. Donner la valeur de ce temps supplémentaire.

Troisième extrait : mécanique

Sujet issu de l'examen de M2, janvier 2012

Question 1. (8 points)
Un avion jette des paquets d'aide alors qu'il passe au dessus d'un village inondé. La vitesse d'un paquet quand il quitte l'avion est 60 $m.s^{-1}$. La masse d'un paquet est 25 kg.
Le paquet tombe verticalement de 34 m pour atteindre le sol.

(a) Calculer l'énergie cinétique du paquet quand il quitte l'avion.

(b) Calculer l'énergie potentielle perdue par le paquet pendant sa chute vers le sol.

(c) On suppose que l'effet de la résistance de l'air sur le paquet pendant sa chute est

négligeable.

(i) Trouver l'énergie cinétique du paquet quand il atteint le sol.

(ii) En déduire la vitesse du paquet quand il atteint le sol.