Baccalauréat série mathématiques mars 1954
Nouvelle Calédonie Buenos Aires

I.

On considère un triangle ABC, d'angles A, B, C (B $\geqslant$ C), de côtés BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ ($b \geqslant c$), de médiane AA$' = m$ et de hauteur AH $= h$.

1. Donner une expression de m^2 et une expression de h en fonction des éléments du triangle.

Exprimer le rapport $\dfrac{m^2}{h^2}$ en fonction des angles seulement et montrer que

$$\frac{m^2}{h^2} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{(\cos\alpha + \cos \mathrm{A})^2},$$

où $\alpha = \widehat{\mathrm{B}} - \widehat{\mathrm{C}}$.

2. On suppose que $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et l'on pose $y = \dfrac{m^2}{h^2}$.Étudier les variations de y en fonction de $x = \widehat{\mathrm{A}}$, exprimé en radians.

Tracer la courbe représentative de la fonction y. Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, la courbe et les droites d'abscisses $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

3. On suppose encore $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et l'on pose $\operatorname{tg} \mathrm{A} = \dfrac{n}{h}$.

Quelle relation a-t-on entre m, n et h?

Déterminer les nombres m et n *entiers* qui vérifient cette relation quand $h = 8$.

4. On suppose encore $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et l'on pose $\beta = \widehat{\mathrm{A'AH}}$.

Trouver une relation entre $\widehat{\mathrm{A}}$ et β.

Calculer $\cos 2\beta$ en fonction de n et m.

Que peut-on en conclure pour l'angle β?

5. On donne $\widehat{\mathrm{A}}$ et $\dfrac{m^2}{h^2} = K$.

Déterminer $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$: on montrera que $\cos\alpha = t$ est racine d'une équation du second degré et l'on en déduira que, si $K > 1$, il existe une valeur unique de α, quel que soit $\hat{\mathrm{A}}$.

6. On donne le point A, on suppose que $\dfrac{m^2}{h^2}2$ et que le sens de l'angle $\widehat{\mathrm{A'AH}}$ est le sens direct.

Le centre de gravité G du triangle ABC décrivant une droite d, trouver les lieux de A$'$ et de H et l'enveloppe de la droite BC.

Construire le triangle ABC, connaissant les sommets A et B ainsi que la droite d.

Quel est le lieu de B pour que le problème admette deux solutions confondues ?

B décrivant ce lieu, montrer que le sommet C décrit une demi-droite ; montrer que tout point C de cette demi-droite correspond à deux positions, B_1 et B_2, du point B et que $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ reste parallèle à une droite fixe.

NOTA. - Les questions **2**, **3**, **4**, **5** et **6** sont indépendantes.