∽ Baccalauréat - A. O. F. Antilles Guyane juin 1951 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1er sujet
Formules de transformation en produitde la somme ou de la différence de deux sinus ou de deux cosinus.
Application - Transformer en produit l'expression $\sin x + \cos y$.

2e sujet
Résoudre un triangle, connaissant deux de ses côtés et l'angle compris entre ces deux côtés.
Application - Les côtés ont pour longueurs respectives 2,3 et 2,7. L'angle est égal à 38°.

2e sujet
Résoudre et discuter l'équation suivante :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m,$$

où x est un angle compris entre 0 et 4π et où m est un nombre algébrique donné. Interprétation graphique.

II

On considère une ellipse CE) d'excentricité e, de foyer F et de directrice associée. (D). On désignera par a le demi grand axe, par b le demi petit axe, par c la demi-distance focale de cette ellipse. H sera la projection orthogonale de F sur (D).

1. On définit chaque point M de l'ellipse par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{\text{FH}}, \overrightarrow{\text{FM}}\right)$ et par la longueur $r = \text{FM}$.

   Exprimer r en fonction de e, de θ et du demi grand axe a de l'ellipse.
2. FM coupe la directrice (D) en un point I et recoupe l'ellipse en un point N.

   Montrer que la somme $\dfrac{1}{\text{FM}} + \dfrac{1}{\text{FN}}$ garde une valeur constante, qu'on calculera en fonction de a et de b, lorsque M décrit l'ellipse.

   On considère les cercles de diamètre MN et de diamètre FI. Que peut-on dire de ces deux cercles ?

   Comment se transforment-ils dans une inversion de pôle F et de puissance $\overline{\text{FH}}^2$?

   Déterminer le centre et calculer le rayon du cercle (C′) inverse du cercle (C) de diamètre MN.

   Quel est le lieu du centre de (C′) lorsque M décrit l'ellipse E ?
3. À chaque point M de l'ellipse on fait correspondre le point M′ du cercle principal situé du même côté que M par rapport au grand axe sur la perpendiculaire menée de M à ce grand axe. O désignant le centre de l'ellipse, on pose

   $$\alpha = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OM}'}\right).$$

   Trouver la relation qui lie α et θ (on pourra, par exemple, écrire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{OM}'} = \overrightarrow{\text{OF}} + \overrightarrow{\text{FM}} + \overrightarrow{\text{MM}'}$ et projeter sur l'axe OH).

   Montrer que cette égalité peut se mettre sous la forme

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

Rendre cette dernière expression de $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ calculable par logarithmes en posant $e = \cos\varphi$.

Remarque - La troisième question est indépendante de la seconde.