Baccalauréat Mathématiques
A. E. F. et Maroc juin 1954

I.
1er sujet
Représentation d'une droite par une équation du premier degré.

I.
2e sujet
Variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3}.$$

Représentation graphique. Asymptotes. Position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

I.
3e sujet
Progressions géométriques. Définition.
Somme des n premiers termes.
Cette somme a-t-elle une limite quand n augmente indéfiniment ?

II. -
Partie A.

1. Construire les cercles passant par deux points donnés et tangents à un cercle donné (aucune discussion n'est demandée).
2. En déduire la construction des cercles tangents une droite donnée en un point donné de cette droite et tangents en outre à un cercle donné.

Partie B.

On donne trois points fixes, A, A$'$, F, distincts et alignés dans un ordre arbitraire. On appelle (C) le cercle de diamètre AA$'$, O son centre, D la polaire de F par rapport à (C), I l'intersection des droites AA$'$ et D.
P étant un point quelconque de D, construire les cercles γ_1 et γ_2 tangents en F à PF et tangents en outre au cercle (C) aux points K_1 et K_2.

1. Montrer que le cercle de diamètre PF passe par les points de contact K_1 et K_2.
2. PK_1 et PK_2 recoupent respectivement γ_1 et γ_2 en M_1 et M_2. Montrer que PM_1 et PM_2 sont vus de F sous des angles droits et que, lorsque P varie sur D, M_1 et M_2 décrivent une même conique.

   Préciser les sommets de l'axe focal de cette conique et ses tangentes en M_1 et M_2.
3. M_1M_2 coupe D en Q ; montrer que le cercle de diamètre M_1M_2 est orthogonal au cercle de diamètre FQ (on pourra utiliser l'inversion de pôle P, de module $\overline{PF}^2$).

   En déduire que IF est bissectrice de M_1IM_2.

Partie C.

On considère une droite fixe, D, un point fixe, F, projeté en I sur D et un point quelconque M de leur plan.
Dans une inversion de pôle F, de module λ arbitraire, le cercle γ de diamètre MF est transformé en une droite γ'.
Soient I$'$ et M$'$ les inverses de I et M, H la projection de M sur D, K$'$ la projection de I$'$ sur γ'.

Montrer que les triangles FIM et FM$'$I$'$ sont semblables, ainsi que les triangles HIM et K$'$M$'$I$'$.
En déduire que, si le rapport $\dfrac{\text{MF}}{\text{MH}}$ a une valeur fixe lorsque M varie, γ' reste tangent à un cercle fixe.
En conclure que γ est aussi tangent à un cercle fixe et montrer que D est la polaire de F par rapport à ce dernier cercle.

Partie D.

Réciproquement, on donne un cercle fixe (C), de centre O, et un point fixe F. Soient D la polaire de F par rapport à (C), I la projection de F sur D. On considère un cercle variable γ passant par F et tangent à (C) en K.
On effectue l'inversion de pôle F qui conserve le cercle (C). Que devient le cercle γ ?
Montrer que I est l'inverse de O.
Désignant par H la projection sur D du point M de γ diamétralement opposé à F, par K$'$ et M$'$ les inverses respectifs de K et M, démontrer que les triangles FMI et FOM$'$ sont semblables, ainsi que les triangles MIH et OM$'$K$'$.
En déduire que le rapport $\dfrac{\text{MH}}{\text{MF}}$ est indépendant du cercle γ.

N. B. - Les parties C et D sont indépendantes de A et B.