

⌘ Baccalauréat Série mathématiques A. E. F. et Maroc ⌘
juin 1959

I

1^{er} sujet

Donner une méthode de résolution de

$$a \cos x + b \sin x + c = 0.$$

Application : $\sqrt{3} \cos x + \sin x - 1 = 0.$

2^e sujet

Démontrer les relations suivantes entre les éléments d'un triangle quelconque :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

3^e sujet

Déterminer $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$.

Application : Calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$.

II

La notation (AO, AO_1) représente l'angle orienté, défini à $k\pi$ près, des droites AO et AO_1 .

Il est recommandé aux candidats de faire des figures séparées pour chaque partie du problème.

Première partie

Soient trois points, O, A, O_1 sur un cercle (Γ) dont le centre est ω . Soient (C) et (C_1) les cercles passant par A respectivement centrés en O et O_1 . (C) et (C_1) se recoupent en P et recoupent (Γ) respectivement en S et S_1 .

1. Montrer que les points O, P, S_1 d'une part et O_1, P, S d'autre part, sont alignés.
2. Montrer que

$$(OS, O_1S_1) = 3(AO, AO_1) + k\pi$$

et que

$$(AS, AS_1) = 2(AO, AO_1) + k\pi.$$

3. Montrer que SS_1 et la tangente en A au cercle (Γ) ont des directions symétriques par rapport à OO_1 .

Deuxième partie

On considère un cercle (Γ) , de centre ω , de rayon R , et un point A sur ce cercle.

À tout point O de (Γ) , on associe le cercle (C) centré en O et passant par A , le point d'intersection S , autre que A , des cercles (Γ) et (C) , le point T diamétralement opposé à S sur (C) , la tangente Δ en T au cercle (C) .

1. Étant donné un point O de (Γ) et la droite Δ associée, rechercher les points O' de (Γ) dont les droites associées Δ' sont perpendiculaires à Δ .
On trouvera trois points. Montrer que l'un de ces points, que l'on notera O_1 est diamétralement opposé à O sur (Γ) et que les trois points, que l'on notera O_1, O_2, O_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.
2. À chacun de ces points O_n ($n = 1, 2, 3$) on associe le cercle (C_n) centré en O_n et passant par A , le point d'intersection S_n , autre que A , des cercles (Γ) et (C_n) , le point T , diamétralement opposé à S_n sur (C_n) et la tangente Δ_n en T , au cercle (C_n) .
Lieu de α , intersection de Δ et Δ_n quand O décrit le cercle (Γ) .

Troisième partie

Le but de cette partie est de rechercher une définition simple du lieu de β , intersection de Δ et Δ_2 quand O décrit (Γ) .

1. P étant le deuxième point d'intersection des cercles (C) et (C_2) , montrer que les triangles POT et PO_2T_2 sont équilatéraux.
En déduire, après avoir projeté les vecteurs $\vec{\omega P}$ et $\vec{\omega \beta}$ sur deux droites convenablement choisies, que
$$\vec{\omega \beta} = \frac{3}{2} \vec{\omega P}.$$
2. Q étant le point d'intersection de OO_2 avec AP , par quelle transformation passe-t-on de Q à β ?
En déduire que le lieu de β peut être considéré comme le lieu des projections d'un point fixe A' sur les tangentes à un cercle fixe (μ) .
3. En utilisant l'inversion de centre A' qui laisse invariant le cercle (μ) , montrer que le lieu de β est l'inverse d'une hyperbole, dont on précisera les foyers et les asymptotes.