# Baccalauréat Série mathématiques A. E. F. et Maroc juin 1959

**I**

**1^er^ sujet**

Donner une méthode de résolution de

$$a\cos x + b\sin x + c = 0.$$

*Application* : $\sqrt{3}\cos x + \sin x - 1 = 0$.

**2^e^ sujet**

Démontrer les relations suivantes entre les éléments d'un triangle quelconque :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}}.$$

**3^e^ sujet**

Déterminer $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$.
*Application* : Calculer $\cos \dfrac{7\pi}{12}$.

**II**

La notation $(\mathrm{AO}, \mathrm{AO}_1)$ représente l'angle orienté, défini à $k\pi$ près, des droites AO et $\mathrm{AO}_1$.
Il est recommandé aux candidats de faire des figures séparées pour chaque partie du problème.

*Première partie*

Soient trois points, O, A, $\mathrm{O}_1$ sur un cercle $(\Gamma)$ dont le centre est $\omega$. Soient (C) et $(\mathrm{C}_1)$ les cercles passant par A respectivement centrés en O et $\mathrm{O}_1$. (C) et $(\mathrm{C}_1)$ se recoupent en P et recoupent $(\Gamma)$ respectivement en S et $\mathrm{S}_1$.

1. Montrer que les points O, P, $\mathrm{S}_1$ d'une part et $\mathrm{O}_1$ P, S d'autre part, sont alignés.
2. Montrer que

$$(\mathrm{OS}, \mathrm{O}_1\mathrm{S}_1) = 3\,(\mathrm{AO}, \mathrm{AO}_1) + k\pi$$

et que

$$(\mathrm{AS}, \mathrm{AS}_1) = 2\,(\mathrm{AO}, \mathrm{AO}_1) + k\pi.$$

3. Montrer que $\mathrm{SS}_1$ et la tangente en A au cercle $(\Gamma)$ ont des directions symétriques par rapport à $\mathrm{OO}_1$.

*Deuxième partie*

On considère un cercle $(\Gamma)$, de centre $\omega$, de rayon R, et un point A sur ce cercle.
À tout point O de $(\Gamma)$, on associe le cercle (C) centré en O et passant par A, le point d'intersection S, autre que A, des cercles $(\Gamma)$ et (C), le point T diamétralement opposé à S sur (C), la tangente $\Delta$ en T au cercle (C).

1. Étant donnés un point O de $(\Gamma)$ et la droite $\Delta$ associée, rechercher les points $\mathrm{O}'$ de $(\Gamma)$ dont les droites associées $\Delta'$ sont perpendiculaires à $\Delta$.
   On trouvera trois points. Montrer que l'un de ces points, que l'on notera $\mathrm{O}_1$ est diamétralement opposé à O sur $(\Gamma)$ et que les trois points, que l'on notera $\mathrm{O}_1$, $\mathrm{O}_2$, $\mathrm{O}_3$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

2. À chacun de ces points $O_n$ ($n = 1, 2, 3$) on associe le cercle $(C_n)$ centré en $O_n$ et passant par A, le point d'intersection $S_n$, autre que A, des cercles $(\Gamma)$ et $(C_n)$, le point T, diamétralement opposé à $S_n$ sur $(C_n)$ et la tangente $\Delta_n$ en T, au cercle $(C_n)$.

   Lieu de $\alpha$, intersection de $\Delta$ et $\Delta_n$ quand O décrit le cercle $(\Gamma)$.

*Troisième partie*

Le but de cette partie est de rechercher une définition simple du lieu de $\beta$, intersection de $\Delta$ et $\Delta_2$ quand O décrit $(\Gamma)$.

1. P étant le deuxième point d'intersection des cercles (C) et $(C_2)$, montrer que les triangles POT et $PO_2T_2$ sont équilatéraux.

   En déduire, après avoir projeté les vecteurs $\overrightarrow{\omega P}$ et $\overrightarrow{\omega\beta}$ sur deux droites convenablement choisies, que
   $\overrightarrow{\omega\beta} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\omega P}$.
2. Q étant le point d'intersection de $OO_2$ avec AP, par quelle transformation passe-t-on de Q à $\beta$ ?

   En déduire que le lieu de $\beta$ peut être considéré comme le lieu des projections d'un point fixe A′ sur les tangentes à un cercle fixe $(\mu)$.
3. En utilisant l'inversion de centre A′ qui laisse invariant le cercle $(\mu)$, montrer que le lieu de $\beta$ est l'inverse d'une hyperbole, dont on précisera les foyers et les asymptotes.