∽ Baccalauréat A. O. F. La Guyane juin 1952 série mathématiques ∾

I. - 1^er^ sujet.

Transformer en produits les expressions

$$\sin p \pm \sin q, \quad \cos p \pm \cos q.$$

Application : Résoudre l'équation :

$$\sin x + \sin 2x - \sin 3x = 0.$$

I. - 2^e^ sujet

Résoudre l'équation

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

On n'exposera qu'une seule méthode, puis on l'appliquera à l'exemple suivant :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1.$$

I. - 3^e^ sujet

Démontrer le système fondamental suivant de relations entre les éléments d'un triangle quelconque :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}}$$
$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \pi.$$

II.

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ et, sur $x'\mathrm{O}x$, deux points A et A$'$ définis par

$$\overline{\mathrm{OA}} = a \quad ; \overline{\mathrm{OA}'} = -a \quad (a > 0).$$

1. Donner, sans démonstration, l'équation de l'hyperbole équilatère (H) de sommets A et A$'$.
   Construire les asymptotes de (H) et les foyers F et F$'$ respectivement associés à A et A$'$ (c'est-à-dire tels que F est du même côté que A par rapport à O sur $x'\mathrm{O}x$).
   Dans tout ce qui suit, on désignera par (HA) la branche de (H) de sommet A.
   M étant un point de (HA) d'abscisse x, calculer, en fonction de a et de x, les longueurs des rayons vecteurs MF et MF$'$, 'ainsi que l'abscisse du point I où la normale en M à $(\mathrm{H_A})$ coupe Ox.
   Le cercle de centre I et de rayon IM est bitangent à $(\mathrm{H_A})$: quelle est la limite de ce cercle lorsque M tend vers A ?
2. Soit (C) le cercle passant par A et centré au point C de Ox, d'abscisse $2a$. M étant un point de $(\mathrm{H_A})$, d'abscisse x, on appelle $(\sum)$ le cercle de centre M orthogonal à (C).
   Calculer, en fonction de a et de x, le rayon R de $(\sum)$.
   Les rayons vecteurs MF et MF$'$ sont coupés par $(\sum)$ en φ et φ'.
   Calculer les longueurs Fφ et Fφ' et en déduire que $(\sum)$ reste tangent à deux cercles fixes eux-mêmes tangents en A.
   Montrer que φ et φ' sont les points de contact de MF et MF$'$ avec le cercle inscrit dans le triangle MFF' et que $\varphi\varphi'$ passe par un point fixe lorsque M parcourt $(\mathrm{H_A})$.

3. On fait l'inversion de pôle A et de puissance $4a^2$.

a. Comment sont transformés le cercle (C) et les deux cercles fixes trouvés au **2.** ?

Le cercle $(\sum)$ est transformé en un cercle $(\sum')$.

Calculer le rayon du cercle (I :') et déterminer le lieu de son centre.

b. Déterminer l'inverse. M$'$ de M et calculer la longueur $\text{AM}' = \rho$ en fonction de a et de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{\text{A}x},\ \overrightarrow{\text{AM}'}\right)$.

Entre quelles limites varie θ lorsque M décrit (H_A) ?

Étudier les variations de ρ en fonction de a.

Trouver la position limite de AM$'$ lorsque θ tend vers $+\dfrac{\pi}{4}$ ou vers $-\dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que, lorsque θ tend vers $\pm\dfrac{\pi}{2}$, la distance du point M$'$ à la droite Δ inverse du cercle (C) tend vers 0.

En utilisant les résultats précédents, indiquer l'allure de la courbe $\left(\text{H}'_\text{A}\right)$ lieu du point M$'$.

c. Les courbes (H_A) et $\left(\text{H}'_\text{A}\right)$ se coupent en deux points P_1 et P_2 qui sont leurs propres transformés dans l'inversion considérée.

Calculer les angles θ_1 et θ_2 correspondant à ces deux points et montrer que les droites AP_1 et AP_2 sont les bissectrices des tangentes à (H_A) et à $\left(\text{H}'_\text{A}\right)$ en P_1 et P_2.