

♣ Baccalauréat A. E. F. Maroc juin 1953 ♣
série mathématiques

I.

On considère un triangle ABC, d'angles A, B, C ($B \geq C$), de côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ($b \geq c$), de médiane $AA' = m$ et de hauteur $AH = h$.

1. Donner une expression de m^2 et une expression de h en fonction des éléments du triangle.

Exprimer le rapport $\frac{m^2}{h^2}$ en fonction des angles seulement et montrer que

$$\frac{m^2}{h^2} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \cos A)^2},$$

où $\alpha = \widehat{B} - \widehat{C}$.

2. On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et l'on pose $y = \frac{m^2}{h^2}$. Étudier les variations de y en fonction de $x = \widehat{A}$, exprimé en radians.

Tracer la courbe représentative de la fonction y . Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox , la courbe et les droites d'abscisses $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$.

3. On suppose encore $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et l'on pose $\operatorname{tg} A = \frac{n}{h}$.

Quelle relation a-t-on entre m , n et h ?

Déterminer les nombres m et n entiers qui vérifient cette relation quand $h = 8$.

4. On suppose encore $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et l'on pose $\beta = \widehat{A'AH}$.

Trouver une relation entre $\widehat{A}$ et β .

Calculer $\cos 2\beta$ en fonction de n et m .

Que peut-on en conclure pour l'angle β ?

5. On donne $\widehat{A}$ et $\frac{m^2}{h^2} = K$.

Déterminer $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$: on montrera que $\cos \alpha = t$ est racine d'une équation du second degré et l'on en déduira que, si $K > 1$, il existe une valeur unique de α , quel que soit $\widehat{A}$.

6. On donne le point A, on suppose que $\frac{m^2}{h^2} = 2$ et que le sens de l'angle $\widehat{A'AH}$ est le sens direct.

Le centre de gravité G du triangle ABC décrivant une droite d , trouver les lieux de A' et de H et l'enveloppe de la droite BC.

Construire le triangle ABC, connaissant les sommets A et B ainsi que la droite d .

Quel est le lieu de B pour que le problème admette deux solutions confondues?

B décrivant ce lieu, montrer que le sommet C décrit une demi-droite; montrer que tout point C de cette demi-droite correspond à deux positions, B_1 et B_2 , du point B et que B_1B_2 reste parallèle à une droite fixe.

NOTA. - Les questions **2, 3, 4, 5** et **6** sont indépendantes.