Du temps pour le « sport mathématique »

Pierre Rey

Les mathématiques ont longtemps été une discipline respectée, jugée incontournable dans toute formation, scientifique s'entend, mais aussi humaine. Cette « aura » des mathématiques s'estompe et les critiques contre ce caractère indispensable à toute formation se font de plus en plus fréquentes et nombreuses : « les mathématiques sont en train de se dévaluer de façon quasi inéluctable» disait récemment un Ministre de l'Éducation Nationale. Parmi les raisons de cette désaffection, j'en souligne deux. Le caractère rigoureux des mathématiques en avait fait la discipline par excellence pour sélectionner, la rigueur s'alliant ici avec un sentiment de justice. Depuis quelques années l'objectif n'est plus de sélectionner mais d'amener 80% d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat ; les mathématiques deviennent alors dans cette perspective plutôt un handicap. Par ailleurs, une grande part de l'importance des mathématiques s'est construite sur la pertinence et la dextérité de calculs de plus en plus compliqués. C'est d'ailleurs pour se faciliter ces tâches calculatoires que la mathématique a créé l'informatique qui est devenu une discipline à part entière privant ainsi sa génératrice de ce qui faisait une part de son existence. « Désormais il y a des machines pour faire les calculs » poursuivait le même ministre.
À ces déclarations ministérielles, J.P. Kahane(1), professeur à l'université Paris XI, répond :
« *Certes les enjeux de la formation des hommes dépassent, et de loin, la formation mathématique. Mais on ne saurait réduire la formation mathématique à une couche d'utilisateurs virtuels. La mathématique est une langue universelle, dont les éléments doivent être connus de tous les hommes : c'est un sport universel accessible à tous les enfants ; c'est une science vivante, dont le mouvement, dans ses grandes lignes, doit pouvoir être saisi par tous les citoyens ; c'est la continuation d'une longue histoire, l'annonce d'une histoire future, qui intéresse tous les êtres humains à venir. Elle a sa place, complètement et pour tout le monde, dans la culture de notre temps*. »

Je voudrais, à travers cet article, essayer de montrer comment ce « sport » mathématique est fondamental et comment il contribue effectivement à la formation de tout individu, à la condition expresse qu'on lui consacre suffisamment de temps.
Les programmes de mathématiques au collège sont d'ailleurs parfaitement clairs : « *au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.*

(1) Jean-Pierre Kahane, Université Paris XI-Orsay, 1994.

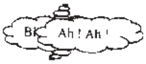
À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié. »[2]

Ces commentaires décrivent assez bien ce que sont les différentes étapes de la résolution d'une « situation-problème » et ce sont ces aspects que je voudrais développer à partir d'exemples de situations expérimentées.

Sans vouloir engager un débat autour d'une définition de ce que j'appelle « situation-problème », il me faut néanmoins en définir les attributs qui m'apparaissent les plus importants : c'est une tâche proposée aux élèves dans laquelle chacun peut s'impliquer aisément, aucun ne disposant de réponse toute faite ou adaptable. On attend de la situation qu'elle provoque des hypothèses, amène des conjectures et des réponses procédant de l'argumentation[3].

Les exemples décrits ne satisfont pas tous à ces caractéristiques, mais tous permettent de mettre en œuvre ces capacités humaines.

Dans son livre, *L'Esprit Mathématique*[4], John Mason résume avec humour les différents stades de la résolution d'un problème :

PROCESSUS	PHASES	RUBRIQUE	PROCESSUS	ÉTATS
	Approche	Je sais		Je démarre !
		Je veux		
		Introduction		Je me lance à fond !
Exemplification				
				Je rumine !
	Attaque	Essayons	Émission de conjectures	Je continue !
		Peut-être que …		
Généralisation		Mais pourquoi ?	Démonstration	Je comprends !
		Vérification		Je doute !
	Révision	Réflexion		
		Extension		Je contemple !

Première étape : l'approche : je démarre, je me lance à fond.

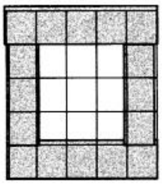
Comment entre-t-on dans un problème ? Souvent par l'essai d'un cas particulier choisi au hasard ou presque.

Prenons par exemple la situation suivante proposée en classe de Quatrième :
« *on veut tracer un triangle qui possède :*
– un angle de 30°,

(2) Programmes de la classe de Sixième. Ministère de l'Éducation Nationale. Décembre 1995.
(3) Résumé extrait du numéro spécial IV du CEPEC de Lyon.
(4) John Mason. *L'Esprit Mathématique*. De Boeck Université, 1994.

– un angle de 80°,
– un périmètre de 30 cm ».
Ce problème peut être considéré comme une situation-problème introduisant à la propriété de Thalès. L'élève va tracer un premier triangle en choisissant la longueur d'un côté au hasard, souvent 10 cm (30 : 3). Cette difficulté du choix d'un nombre est réelle chez certains élèves et il est important de l'aborder (on la retrouve de manière cruciale lors de l'étude des fonctions affines lorsqu'il faut choisir les abscisses des deux points permettant de tracer la représentation graphique). Certains vont éviter cette difficulté en traçant les angles et c'est le rayon du rapporteur utilisé qui donnera la longueur du côté.
Remarquons que dans cette situation, la mise en action se fait par un passage à la figure.

Prenons un autre exercice utilisé pour établir certaines règles de réduction du calcul littéral.



Le carré a un côté de n carreaux.
Calculer le nombre de carreaux grisés.

L'entrée dans la tâche va se faire en prenant un cas particulier, par exemple un carré de 5 × 5.

Le cas particulier choisi ne donnant pas la réponse à la question posée, on va choisir d'autres exemples mais peut-être de manière moins aléatoire.

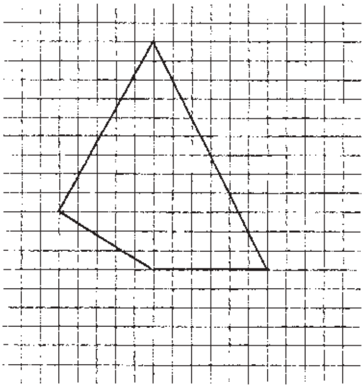
Dans la situation du triangle à trouver, une fois les deux angles tracés, l'élève se rend compte alors qu'il n'a plus de choix pour les longueurs des deux autres côtés : son périmètre est entièrement déterminé par la longueur du premier côté. On va alors tracer un autre triangle en augmentant (ou diminuant) la longueur du premier côté.

Pour le calcul des cases grisées, on va essayer d'autres carrés en choisissant de manière systématique 2 × 2, puis 3 × 3, etc.

C'est ce que John Mason appelle l'exemplification : « *Exemplifier, c'est choisir des exemples :*
• *au hasard pour avoir une idée du problème ;*
• *systématiquement, pour préparer le terrain à une généralisation ;*
• *astucieusement, pour tester une généralisation* »[5].

Je voudrais indiquer une autre situation-problème introduisant la même notion, mais dans laquelle on n'entre pas en choisissant un exemple mais une procédure. Cette situation est donnée directement par la figure et ne comporte pas la difficulté d'une « traduction » en un autre langue.

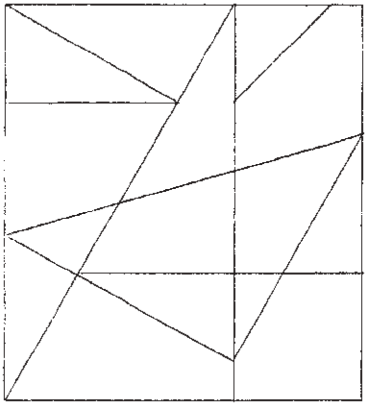
(5) John Mason, *ibid*.



Cette figure étant donnée sur une feuille quadrillée, la consigne est :
Trouver une méthode économique pour reproduire ce quadrilatère à l'échelle $\frac{1}{3}$.

La possibilité de partager certaines longueurs en 3 permet à tout élève d'entrer clans la tâche demandée.

Dans cet autre exercice proposé en classe de Cinquième, l'entrée dans la tâche se fait aussi par le choix d'une procédure. Il est extrait de *Activité cognitive et Images mentales* de H. Planchon(6).



On distribue aux élèves la figure suivante et on se réserve un moment de discussion autour de ce que l'on voit. Ce temps d'observation et de partage d'informations est important lui aussi dans l'appropriation du problème. Il permet en outre de préciser le vocabulaire utilisé et fait apparaître la nécessité d'un codage commun.
Une fois ce codage effectué, on se pose la question :
Calculer tous les angles de cette figure.

On peut envisager cet exercice comme un réinvestissement des connaissances sur les angles d'un triangle notamment que la somme des trois égale 180°. On peut aussi la pratiquer à partir des deux équerres, 45° et 60°, pour aboutir à ce résultat.
Les élèves entrent dans la tâche en calculant (ou « mesurant ») les ongles les plus faciles.

Cette première étape, phase d'approche du problème, que John Mason résume en trois questions :
• *qu'est-ce que je sais ?*
• *qu'est-ce que je veux ?*
• *qu'est-ce que je peux introduire ?*
est une phase d'appropriation du problème. Elle nécessite du temps et des efforts que certains ne veulent pas faire. Ils se précipitent sur la première idée venue et, si elle n'aboutit pas, ils n'en cherchent pas d'autres. Elle doit conduire à se rendre compte

(6) H. Planchon. *Activité cognitive et Images mathématiques*, F.A.P., 1991.

qu'il y a un problème derrière la situation exposée. Les étapes suivantes permettront de clarifier cette problématique, de la réduire à quelques questions, voire une seule. Cette phase d'appropriation développe ces capacités d'expérimentation, d'imagination dont parle le programme officiel. Elle met aussi en œuvre la capacité d'organiser, de planifier la tâche, capacité qui sera plus développée dans la deuxième étape. Peut-on nier que ces capacités contribuent à la formation de tout citoyen ?

Deuxième étape : l'attaque : je rumine, je continue.

Elle aura forcément un caractère d'échanges et de confrontations aux pairs.
C'est une phase d'essais, de tâtonnements, de doute et éventuellement d'impasses à reconnaître. Elle doit aboutir à des conjectures. C'est une véritable démarche scientifique.

Dans la situation du triangle à construire, un premier élève a effectué plusieurs tracés, qu'il a effacés au fur et à mesure. Par essais et erreurs, il va obtenir une solution satisfaisant les conditions mais, si le même problème est posé avec un périmètre différent, il devra reprendre ses essais et erreurs. Un autre élève a conservé ses tracés, mis ses résultats dans un tableau avant d'entrevoir une première conjecture. Un troisième ne voulant pas retracer à chaque essai les deux angles, en a conservé un et a tracé ses triangles les uns sur les autres, il met en évidence la propriété du parallélisme.
Dans cette phase, John Mason distingue deux états : *bloqué* et *émissions de conjectures*.
« *Reconnaître qu'on est bloqué et l'accepter, ce n'est pas aussi facile ni aussi automatique qu'il peut le sembler. On est souvent bloqué sans en être suffisamment conscient pour entreprendre quelque chose*. »(7)
Cette incapacité est d'ailleurs souvent la source des difficultés de certains élèves face à l'apprentissage. Serge Boimare écrit dans *L'enfant et la peur d'apprendre*(8) :
« *N'oublions pas qu'apprendre c'est d'abord rencontrer des limites et des règles, c'est pouvoir se confronter avec ses insuffisances, c'est accepter d'abandonner ses certitudes […], c'est accepter d'être comparé, d'être jugé, de se soumettre*. »

Lorsqu'on est bloqué, Mason conseille de reprendre les exemples de l'approche, d'en proposer d'autres et d'être attentif à toute idée : « *Ah !Ah !* », « *Essayons* », « *Peut être que …* », « *Et si …* », etc.
La mise en commun, la confrontation avec les pairs permet aussi d'avancer et d'aboutir à une conjecture. Pour émettre une conjecture « *deux qualités sont de mise : confiance en soi et hardiesse* ». Inutile d'insister sur le caractère non mathématique de ces qualités. Par la suite une conjecture se repère par la recherche d'un cheminement sous-jacent aux exemples écrits. Si cette recherche relève aussi de la créativité, elle est facilitée par l'étude analogique de ces exemples, l'écriture de nouveaux exemples pour vérifier une idée ou pour la mettre en doute.
Mettre en doute ses opinions, ses idées en questionnement, reconnaître l'impasse où elles nous mènent, accepter la remise en cause par les idées et les questions des

(7) John Mason, *ibid*.
(8) Serge Boimare. *L'enfant et la peur d'apprendre*. Dunod, 2000.

autres, n'y a-t-il pas là formation pour tout citoyen ? Cette formation est bien inscrite comme un objectif des programmes de mathématiques au collège. Mais elle exige beaucoup de temps. Alors, elle est le plus souvent escamotée. Pour aller vite, l'enseignant ne va prendre en compte que les réponses allant dans le sens de la démarche à laquelle il veut aboutir. Ce faisant, il contribuera à maintenir les autres dans une attitude de passivité acceptant la solution donnée sans chercher à la mettre en question.

Prenons un autre exercice proposé en Sixième :
On verse de l'eau dans un vase. Pour chaque quantité d'eau versée, on mesure la hauteur de l'eau dans le vase. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume d'eau en cl	*40*	*80*	*120*	*160*	*200*	*240*	*280*
Hauteur d'eau en mm	*27*	*54*	*81*	*108*	*132*	*150*	*160*

1. Peut-on trouver la hauteur d'eau pour un volume de 60 cl ?
2. Même question pour un volume de 132 cl.
3. Même question pour un volume de 260 cl.

La connaissance des règles de proportionnalité permet à chacun d'entrer facilement dans l'exercice et, bien souvent, les élèves donnent les trois réponses sans remettre en cause leurs résultats même contraires à toute logique. Dans l'expérience citée, le vase est cylindrique à sa base, puis s'évase vers le haut.

Troisième étape : validation : je comprends, je doute.

Lors des deux premières étapes, nous cherchons ce qui est vrai à travers des exemples ou en appliquant des procédures valides, puis nous l'écrivons sous forme d'une conjecture. Dans cette étape nous allons chercher **pourquoi c'est vrai** (ou faux dans certains cas). Ce travail va se faire en recherchant le lien logique entre ce que je sais (de l'énoncé et des exemples choisis) et ce que je veux (écrit par la conjecture). John Mason pense qu'une conjecture est validée, si elle permet de:
• *se convaincre soi-même ;*
• *convaincre un ami ;*
• *convaincre un ennemi.*(9)

L'argument fait loi s'il est basé sur un système de propositions admises par la communauté, s'il se réfère explicitement à un répertoire de propriétés elles-mêmes validées.

Défendre un point de vue, savoir exposer des arguments convaincants, ne pas imposer la loi du plus fort, qui niera que ce sont là des compétences nécessaires à tout citoyen désireux de vivre en société. Les mathématiques ne sont pas les seules à travailler ces capacités mais elles les approchent de manière plus spécifique.

Certaines situations demandent aux élèves de prendre une position Pour ou Contre face à une question ou un avis. Il est intéressant ensuite de prendre le temps de travailler sur la justification de cette prise de position. Cette justification va se faire

(9) John Mason, *ibid*.

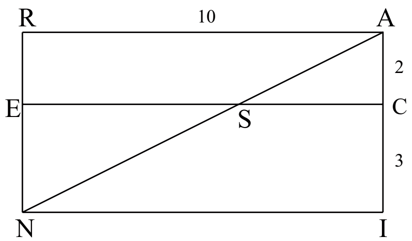
par la recherche d'arguments, par l'explicitation de la question ou sa traduction dans un autre langage plus symbolique, par des calculs ou une véritable démonstration, celle des mathématiciens.

Prenons, par exemple, la situation suivante exposée par un petit télé-film mis en image pour l'émission « Tangente » il y a quelques années.
Un homme et une femme sont à la terrasse d'un café, lui a pris une tasse de café et elle une tasse de lait. Avec sa petite cuillère, elle prend une cuillère de lait, la transvase dans la tasse de café, remue puis reprend une cuillère du mélange et la transvase dans sa tasse de lait. La question qu'elle pose est alors : « as-tu autant de lait dans ton café que moi j'ai de café dans mon lait ? ».
En général, la classe se divise en deux camps et la discussion s'anime vite, mais les arguments sont assez difficiles à mettre en œuvre par la simple parole. Très vite il devient nécessaire d'expliciter la question. Le film propose alors une solution en forme de schéma qui met tout le monde d'accord.

Dans le même ordre d'idée, citons la situation suivante qui permet d'introduire la comparaison de fractions :
Monsieur Valentine veut repeindre sa salle de bains avec de la peinture rose. Pour la fabriquer, il mélange 2 pots de peinture rouge et 3 pots de peinture blanche. Madame Valentine trouve que le rose obtenu n'est pas assez foncé et propose de mettre 3 pots de peinture rouge pour 4 pots de peinture blanche. Monsieur Valentine pense que la couleur sera la même.

Pour justifier ses arguments, l'élève est souvent amené à changer de langage, passer d'un langage écrit à un schéma, à une algébrisation de la situation, comme la mise en équation, ou encore à une représentation graphique. De même sur une figure qui n'est qu'un dessin muet mais devient une figure géométrique porteuse d'informations dès qu'elle est codée, enrichie par la traduction de certaines données en de nouveaux codages pour en extraire la partie nécessaire à sa démonstration.
Dans d'autres cas, le changement de langage peut consister à utiliser une machine.

D'autres situations nécessitant une validation des résultats sont celles qui, par des procédures différentes de résolution, amènent à des résultats formellement différents et qu'il faut prouver égaux.
Citons, par exemple, pour travailler sur les propriétés des racines carrées :



RAIN est un rectangle.
(EC) est parallèle à (IN).
Calculer la valeur exacte de SN.

Là aussi, l'action va mettre en œuvre des compétences comportementales de l'individu : écoute et respect des arguments des autres.

Quatrième étape : communication : je contemple.

C'est celle de la communication écrite ou orale de ses résultats. Savoir expliquer à d'autres ce que j'ai compris.
Je n'ai pas l'intention de développer cette dernière phase, elle est beaucoup plus générale et met en œuvre des compétences travaillées dans de nombreuses disciplines comme en mathématiques.

En explicitant ainsi ces quelques exemples, j'ai voulu montrer l'importance de l'activité mathématique dans la formation du citoyen qui est la mission première du collège. Mais cette activité mathématique que les instructions officielles mettent en exergue est exigeante de temps, de beaucoup de temps. Si nous voulons qu'elle soit formatrice pour tous, il faut laisser du temps pour entrer dans la tâche, attendre que chacun ait écrit quelques exemples, puis prendre le temps d'entendre les conjectures même celles dont on sait qu'elles sont fausses, et encore du temps pour permettre à la bonne conjecture de s'imposer à tous avant de les aider à la valider. Tout ce temps n'existe plus dans nos classes, il ne nous reste que celui de valider rapidement une conjecture fortement suggérée, de la mettre en forme et de l'exercer un minimum. Autant d'actions qui nient tout l'aspect formateur que j'ai essayé de mettre en évidence.

Je voudrais terminer alors en citant trois extraits qui m'apparaissent significatifs de l'importance de ce temps à accorder au travail de formation par l'intermédiaire de la résolution de problèmes.

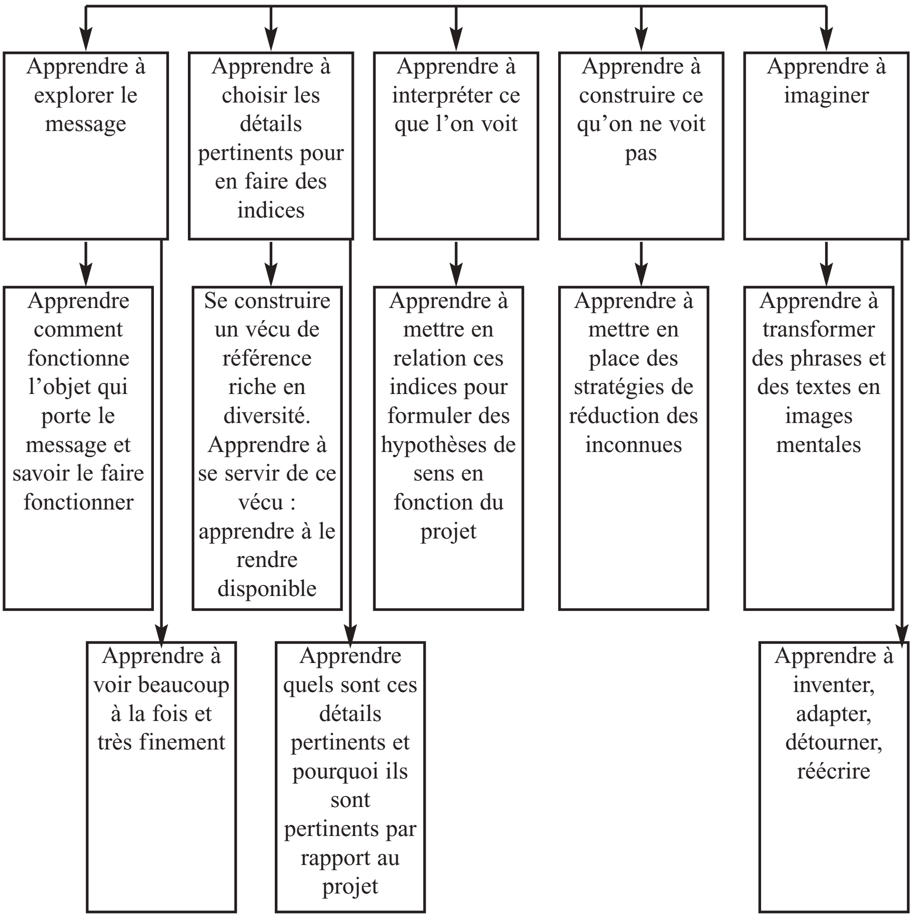
Le premier n'est pas extrait d'un ouvrage concernant les mathématiques mais d'un ouvrage plus général *Savoir lire au collège*(10). Le tableau (page suivante) que j'ai extrait de cet ouvrage reprend, à sa façon, les différents processus que j'ai développés dans l'article concernant ce que Mason appelle l'exemplification, l'étude des analogies entre les exemples donnés, la recherche d'un lien, d'un cheminement entre ces exemples et entre ce qu'ils me disent et le projet (la conjecture) que j'énonce, etc.

Comment peut-on espérer réaliser cette construction du sens, c'est à dire toutes ces étapes dans un temps de plus en plus réduit tout en conservant des contenus importants car nécessaires : on ne peut construire du sens sur rien.

Le deuxième extrait provient d'un ouvrage collectif publié par l'IUFM de Nice dans lequel Pierre Eysseric écrit :
« *Le temps, instant ou durée, revêt une importance déterminante. On saisit ici une des conditions que bien souvent l'institution scolaire, calquée sur des modèles socio-économiques, ne permet plus. L'enfant qui entame une recherche va " grandir " avec elle. Prendre, reprendre le travail en cours, avoir à affiner, vérifier, recommencer, tout cela participe à un processus de maturation dont l'incidence intéresse plus largement l'individu et ses relations que le strict champ mathématique.* »(11)

(10) Evelyne Charmeux. *Savoir lire au collège*. CEDIC.
(11) *Le plaisir de chercher en mathématiques*. IUFM de Nice (1996).

APPRENDRE À CONSTRUIRE DU SENS
CELA VEUT DIRE



Enfin le troisième extrait est la conclusion d'un livre de Roland Charnay(12) :

« *En accordant une place importante, centrale, à la résolution de problèmes, en favorisant la variété des solutions, en organisant de vrais débats entre les élèves, en acceptant que l'accès à la connaissance soit marqué par des impasses dont on a su se sortir, en aidant aussi à organiser et à structurer les morceaux de savoirs fabriqués dans ces activités, en offrant des occasions, même modestes, de comprendre comment, historiquement, certains problèmes ont été posés et résolus … bref, en engageant chaque élève à son niveau et avec ses ressources propres, dans des activités de production mathématique, on aura permis, à chacun, de goûter, et peut-être d'adhérer, à ce sport universel, accessible à tous les enfants dont parle J.P. Kahane*. »

(12) Roland Charnay. *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* ESF ,1996.