

# Mathématiques et voiles de bateaux

Denise Chenais

Ce travail a été effectué lors de la Coupe America 1987, pour la construction du Défi Français « French Kiss ». C'est une collaboration entre le CRAIN (La Rochelle), la Société ESI (Paris), et l'Université de Nice-Sophia Antipolis.

Les voiles d'un bateau sont des structures minces souples. Par structure mince, on entend un solide dont une dimension (l'épaisseur) est faible devant les autres. La voile est soumise à des efforts dits extérieurs : le vent, les forces avec lesquelles les cordages tirent sur les coins de la voile. Il en résulte dans le tissu des efforts dits internes, qui sont susceptibles de faire souffrir la voile, voire de la déchirer. Nous ne nous sommes pas intéressés à l'aspect aérodynamique, qui a été traité par une autre équipe. La forme de la voile est alors donnée. Notre sujet est le calcul de sa résistance structurelle. Il s'agit précisément d'assurer que la voile ne se déchire pas tout en étant la plus légère possible. Notre travail consiste à choisir les bons tissus et à orienter les fibres de manière appropriée.

L'exposé comporte deux parties : la mise en équations du problème, puis l'exposé dans ses grandes lignes de la méthode des éléments finis, utilisée pour résoudre numériquement ces équations.

## 1. La mise en équations : les principes mécaniques

Soit  $\Omega$  un corps élastique tridimensionnel. Tout d'abord, s'il s'agit d'une structure mince, les équations sont obtenues par passage à la limite en épaisseur, à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle, dont nous exposons les principes ici.

### 1.1. Données physiques

$\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbf{R}^3$ , de frontière  $\Gamma$ .  $\mathbf{R}^3$  est muni d'un repère canonique  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  auquel sont associées des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ . On

considère un solide qui au repos occupe la position  $\Omega$ . Une partie  $\Gamma_u$  de la frontière est fixée. On exerce sur le solide des forces volumiques  $\phi^1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  et des forces surfaciques  $\phi^2 : \Gamma \setminus \Gamma_u \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Le solide se déforme pour occuper une position  $\Omega'$ . Chaque point  $M$  de  $\Omega$  devient un point  $M'$  de  $\Omega'$ . La déformation est supposée instantanée.

### 1.2. Les inconnues

#### 1.2.1. Le champ de déplacements

Quel que soit  $\underline{M} \in \Omega$ , on note  $\vec{u}(\underline{M}) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ . On définit ainsi la fonction :

(\*) Laboratoire de Mathématiques Jean-Alexandre Dieudonné, UMR-CNRS 6621

Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France

Mél : chenais@math.unice.fr

$$\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3 : M \mapsto \sum_{i=1, \dots, 3} u_i(M) \vec{e}_i$$

qui contient toute l'information décrivant la position du solide à l'équilibre. On l'appelle « champ de déplacements ».

### 1.2.2. Le champ de contraintes

Les contraintes représentent les « tensions » créées dans le solide par le déplacement  $u$ . Soit  $M'$  un point de  $\Omega'$ . Les contraintes obéissent au principe suivant :

**Principe 1.** *Il existe une matrice (3,3) symétrique, notée  $\sigma(M')$  telle que toute surface  $S$  infinitésimale passant par  $M'$  de normale unitaire  $\vec{n}_S(M')$  subit une densité de tension (force) qui vaut :*

$$\vec{t}_S(M') = \sigma(M') \vec{n}_S(M')$$

La fonction  $\sigma : \Omega' \rightarrow \mathcal{M}_s(3,3) : M' \mapsto \sigma(M')$  est appelée *champ de tenseurs des contraintes*.

( $\mathcal{M}_s(3,3)$  désigne l'espace des matrices (3,3) symétriques).

Pour chaque  $M'$ , la matrice  $\sigma(M')$ , étant symétrique réelle, a trois valeurs propres réelles associées à trois vecteurs propres orthonormés. Ces valeurs propres en valeur absolue donnent les intensités les plus fortes et plus faibles des forces internes subies par le solide en  $M$ . Celles-ci sont orientées le long des vecteurs propres. En conséquence, on choisira la nature du tissu en fonction de ces valeurs propres, et on orientera les fibres le long des vecteurs propres. L'inconnue primordiale pour nous est donc le tenseur  $\sigma$ .

### 1.3. Les équations d'équilibre

Les principes de base de la mécanique conduisent à écrire l'équilibre des forces auxquelles le solide est soumis. On suppose le déplacement petit, ce qui permet de considérer  $\sigma$  comme défini sur  $\Omega$  et non sur  $\Omega'$ . Par contre les dérivées partielles du

déplacement ne sont pas petites. Pour  $M = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i \in \Omega$ , on note  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Les

éléments de  $\sigma(x)$  dans la base canonique sont notés  $\sigma_{i,j}(x)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \right] + \phi_i^1(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \sigma(x) \vec{n}(x) = \vec{\phi}^2(x) \quad \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma_u \\ \vec{u}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_u \end{array} \right. \quad (1)$$

( $\vec{n}$  désigne la normale unitaire sortante à  $\Gamma \setminus \Gamma_u$ ). On dispose par ailleurs d'une relation dite « loi de comportement ». Celle-ci relie, en fonction des constantes physiques du matériau, les efforts  $\sigma$  et  $\vec{u}$ . Elle a la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i, j = 1, 2, 3 \quad \sigma_{i,j}(x) = \sum_{k,l=1}^3 R_{i,j,k,l} \varepsilon_{k,l}(x) \\ \text{avec} \\ \varepsilon_{k,l}(x) = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \frac{\partial u_r}{\partial x_l} \right) \right] (x) \end{array} \right. \quad (2)$$

Les coefficients  $R_{i,j,k,l}$  sont des constantes physiques données par l'expérimentateur.

Le système d'équations qui régit le phénomène est formé de (1) et (2). On peut démontrer ([1]) que ce système possède une solution  $(u, \sigma)$  unique.

Nous nous intéressons maintenant aux grands principes de résolution de ces équations par la méthode des éléments finis, méthode très largement utilisée en ingénierie.

## 2. Principe de la méthode des éléments finis

Nous exposons cette méthode ([2]) sur un problème modèle simplifié. Ce problème précis pourrait être résolu à la main. Nous ne l'utilisons ici qu'à titre d'exemple pour illustrer la méthode.

### 2.1. Le problème modèle

Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction donnée. On cherche :

$$\left\{ \begin{array}{l} u: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{t.q.} \\ -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Ce problème est tout d'abord mis sous forme variationnelle : en multipliant l'équation par une fonction  $v$  quelconque et en intégrant par parties entre 0 et 1, le problème (3) est reformulé en :

$$\left\{ \begin{array}{l} u: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \text{ t.q. } v(0) = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Ce problème entre dans le cadre abstrait suivant.

## 2.2. Cadre général

### 2.2.1. Le problème continu

Soit  $V$  un espace de Hilbert (de dimension infinie en général). Son produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , sa norme  $\| \cdot \|$ . Soit :

$$a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$$

une forme bilinéaire continue symétrique,

$$l : V \rightarrow \mathbf{R}$$

une forme linéaire continue. On suppose que :

$$\exists \alpha > 0 \forall v \in V \ a(v,v) \geq \alpha \| v \|^2.$$

On a :

**Théorème 1.** *Il existe une unique fonction  $u \in V$  telle que :*

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (5)$$

Notre problème modèle entre dans ce cadre avec :

$$V = \{v \in L^2(]0,1[) ; v' \in L^2(]0,1[)\},$$

$$\langle u,v \rangle = \int_0^1 u'v', \quad \|v\|^2 = \int_0^1 v^2$$

Pour calculer une approximation de  $u$  solution de (5), on applique la méthode suivante.

### 2.2.2. Approximation de Galerkin

On a :

**Théorème 2.** *Soit  $(V_N)_{N \in \mathbf{N}}$  une suite de sous-espaces vectoriels de  $V$  (par exemple de dimension finie). Soit  $u_N \in V_N$  la solution unique de :*

$$a(u_N, v_N) = l(v_N) \quad \forall v_N \in V_N \quad (6)$$

(l'existence et l'unicité sont garantis par le théorème précédent). On suppose que :

$$d(u, V_N) = \inf_{v_N \in V_N} \|u - v_N\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Alors  $u_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u$ .

De plus on dispose d'une majoration de l'erreur  $\|u - u_N\|$ .

### 2.2.3. Calcul effectif de $u_N$

Soit  $\phi_1, \dots, \phi_N$  une base de  $V_N$  supposé de dimension finie. On cherche :

$$u_N = \sum_{i=1}^N u^i \phi_i, \quad u^i \in \mathbf{R}$$

Les inconnues, à  $N$  fixé, sont les  $u^i$ . On a, pour tout  $v_N = \sum_{i=1}^N v^i \phi_i \in V_N$  :

$$a(u, v) = \sum_{i,j} u^i a(\phi_i, \phi_j) v^j ; \quad l(v) = \sum_j l(\phi_j) v^j .$$

L'équation (6) n'est autre que  $AU = F$ , où  $A$  est la matrice  $(N, N)$  de coefficients  $a_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j)$ ,  $U$  est le vecteur colonne dont les composantes sont les  $u^i$ ,  $F$  est le vecteur colonne dont les coefficients sont les  $l(\phi_j)$ . Il suffit de résoudre ce système de  $N$  équations à  $N$  inconnues, dont on sait *a priori* qu'il est régulier. Il est à remarquer que pour avoir une précision correcte, il faut que  $N$  soit grand ( $10^3$ ,  $10^6$  est courant dans les exemples industriels). On a donc à résoudre de très grands systèmes linéaires.

### 2.3. Un choix d'espaces $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$ associés à notre problème

Nous présentons l'exemple le plus standard associé à notre problème modèle.

L'intervalle  $[0, 1]$  est coupé en  $N + 1$  intervalles de longueur  $h = \frac{1}{N+1}$ . On note

$x_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_{N+1} = 1$ . La base  $\phi_i$  est formée de fonctions linéaires sur chaque morceau  $]x_i, x_{i+1}[$ , continues sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Elle sont définies par :

$$\phi_i(x_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On remarque que ces fonctions sont dérivables au sens des distributions même si elles ne le sont pas au sens classique. On peut démontrer que ceci suffit pour qu'elles soient dans l'espace  $V$ . On peut aussi remarquer que chaque  $\phi_i$  est nulle en dehors de l'intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ . Il en résulte que la matrice  $A$  a tous ses coefficients nuls sauf ceux de la diagonale et leurs voisins immédiats. Cette structure de la matrice permet d'utiliser des méthodes de résolution du système  $AU = F$  très efficaces.

## 3. Conclusion

Nous avons écrit les équations de l'élasticité. Tout comme dans notre problème modèle, ces équations peuvent s'écrire sous forme variationnelle. La méthode des éléments finis peut s'adapter. La technique est plus lourde, mais le principe est le même.

Notons toutefois que dans le problème des voiles il y a une non-linéarité. Le système d'équations à résoudre en dimension finie sera non-linéaire.

## Références

- [1] DUVAUT G., LIONS J.L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1973.
- [2] RAVIART P.A., THOMAS J.M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris 1983.