

# Des barycentres pour transformer des cercles en polygones

Yves Biton(\*)

## 0. Introduction

### 1. Définition de la transformation T

E désigne un plan euclidien.

Définition de T(M) : Si  $n$  est un entier,  $n \geq 2$ , on définit l'application  $T_{A_1 A_2 \dots A_n}$  de E dans E par :  $T_{A_1 A_2 \dots A_n}(M) = \text{bar} \{(A_1, MA_1) ; (A_2, MA_2) ; \dots ; (A_n, MA_n)\}$  (bar signifiant barycentre).

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, cette application sera notée simplement T.

### 2. Présentation de cet article

Nous étudierons dans cet article le cas de deux points, puis de trois points.

Dans le cas de  $n$  points ( $n \geq 4$ ) de nombreuses questions restent ouvertes que nous présenterons en fin de cet article.

On pourra identifier E et le plan complexe C et on appellera alors  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les affixes de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

### 3. Comment ce résultat a-t-il été découvert ?

Je ne suis bien entendu pas sûr qu'il s'agisse d'une découverte, mais jusqu'à présent je n'ai rencontré personne connaissant ce résultat.

C'est en testant le logiciel Math&Grafic dont je suis l'auteur que je suis tombé sur un résultat qui me semblait très curieux. J'avais eu l'idée de tracer un triangle ABC et son cercle circonscrit  $\Gamma$ . J'avais ensuite créé un point M lié à ce cercle, mesuré les longueurs MA, MB et MC et créé le barycentre M' des points pondérés (A, MA), (B, MB) et (C, MC). À ma grande surprise, je me suis aperçu que le lieu des points M' quand le point M décrivait le cercle  $\Gamma$  semblait être un triangle. J'ai alors découvert que ce résultat reposait en fait sur le théorème de Ptolémée.

Une nouvelle version de Math&Grafic doit être éditée par le CNDP pour la rentrée scolaire 2002, sous le nom de MathGraph32.

Une version de démonstration pourra être téléchargée à l'adresse suivante : <http://www.cndp.fr/math>.

### 4. Remerciements.

Je dois remercier particulièrement Mahdi Abdeljaouad, professeur à l'Université de Tunis, pour ses conseils judicieux, en particulier pour avoir eu l'idée d'utiliser la notion de transformation et Daniel Perrin, professeur à l'Université d'Orsay, qui a complété ce que j'avais trouvé en étudiant à fond la transformation T dans le cas de

(\*) Professeur de mathématiques au Lycée Einstein de Ste Geneviève des Bois.

deux et trois points et en utilisant de façon très judicieuse l'inversion. Merci aussi à mon jeune collègue Christophe Rivière pour sa relecture attentive.

## I. Les résultats que nous utiliserons dans cet article sans les démontrer

**Proposition 1.1.** Si  $MAB$  est un triangle et  $I$  le pied de la bissectrice intérieure issue

de  $M$ , alors  $I$  appartient au segment  $[AB]$  et  $\frac{MA}{MB} = \frac{IA}{IB}$ .

**Proposition 1.2 (théorème de Ptolémée).** Si  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points non alignés de  $E$ , alors on a  $AC \times BD \leq AB \times CD + BC \times DA$  avec égalité si et seulement si les quatre points sont cocycliques et le quadrilatère  $ABCD$  convexe.

Remarquons que la proposition 1.2 se démontre de façon classique avec une inversion.

**Proposition 1.3.** Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts de  $E$  et  $k$  un réel strictement

positif, l'ensemble  $C_{A,B,k}$  formé des points  $M$  tels que  $\frac{MA}{MB} = k$  est la médiatrice de  $[AB]$  si  $k = 1$ , sinon le cercle de diamètre  $[IJ]$  où  $I = \text{bar} \{(A, 1); (B, k)\}$  et  $J = \text{bar} \{(A, 1); (B, -k)\}$ .

**Proposition 1.4.** Si  $i$  est l'inversion de pôle  $O$  et de puissance  $k$ , alors pour tous

points  $M$  et  $N$  de  $E$  d'images respectives  $M'$  et  $N'$  par  $i$ , on a :  $M'N' = \frac{|k| MN}{OM \cdot ON}$ .

**Proposition 1.5.** Soient  $ABC$  un triangle,  $I$  et  $J$  les pieds des bissectrices issues de  $A$  et  $K$  le milieu de  $[IJ]$ . Alors la droite  $(AK)$  est tangente en  $A$  au cercle circonscrit à  $ABC$ .

**Proposition 1.6.** Si  $T$  est la tangente en  $A$  à un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$ , alors tout cercle centré sur  $T$  et passant par  $A$  est invariant par l'inversion  $i$  de centre  $O$  et de rapport  $OA^2$ .

## II. Cas de $n$ points cocycliques : utilisation d'une inversion

Dans ce paragraphe on suppose que les points  $A_i$  sont sur un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ . On note  $i$  l'inversion de pôle  $O$  et de puissance  $R^2$ .

**Proposition 2.1.** On a  $T \circ i = i$ .

*Démonstration:* Soit  $M \in E$  et posons  $N = i(M)$ . Le cercle  $\Gamma$  étant invariant par  $i$ , la

proposition 1.4 nous donne :  $NA_i = \frac{R^2 MA_i}{OM \times OA_i} = \frac{R}{OM} \times MA_i$ .

Les coefficients  $NA_i$  étant proportionnels aux coefficients  $MA_i$ , on en déduit que le barycentre des points pondérés  $(A_i, MA_i)$  et  $(A_i, NA_i)$  sont confondus, donc que  $T(M) = T(N) = (T \circ i)(M)$ .

**Corollaire 2.2.** L'image du plan  $E$  par  $T$  est égale à l'image par  $T$  du disque fermé  $D = D(O, R)$ .

En effet, si un point  $M$  n'est pas dans  $D$ , son inverse par  $i$  est dans  $D$ .

### III. Le cas de deux points

Dans ce paragraphe, on se donne deux points  $A$  et  $B$  distincts de  $E$  et on étudie l'application  $T_{AB}$  définie par  $T(M) = \text{bar} \{(A, MA) ; (B, MB)\}$ .

#### 1. Image de $T$

Comme  $MA$  et  $MB$  sont positifs, il est clair que  $T$  est à valeurs dans  $[AB]$ .  $T$  est évidemment surjective car, en restriction à  $[AB]$ ,  $T$  n'est autre que la symétrie par rapport au milieu  $I$  de  $[AB]$ .

#### 2. Construction géométrique de l'image par $T$ d'un point $M$ autre que $A$ et $B$

Soit  $\Gamma$  le cercle circonscrit au triangle  $MAB$ .

Appelons  $P$  le point d'intersection de la médiatrice de  $[AB]$  avec l'arc de cercle d'extrémités  $A$  et  $B$  ne contenant pas  $M$  et  $N$  le point d'intersection de la droite  $(MP)$  avec le segment  $[AB]$ .

On sait qu'alors  $N$  est le pied de la bissectrice intérieure issue de  $M$  dans le triangle  $AMB$ .

La proposition 1.1 entraîne alors que  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ ,

$N$  étant le barycentre de  $(A, NB)$  et de  $(B, NA)$ . On en déduit que  $N$  est le barycentre de  $(A, MB)$  et de  $(B, MA)$ . Le symétrique  $M'$  de  $M$  par rapport au milieu  $I$  de  $[AB]$  est alors le barycentre de  $(A, MA)$  et  $(B, MB)$ , autrement dit :  $T(M) = M'$ .

La construction inverse prouve que si  $\Gamma$  est un cercle passant par  $A$  et  $B$  et  $M'$  un point de  $]AB[$ , il existe un unique point  $M$  de l'arc de cercle de  $\Gamma$  ne contenant pas  $P$  tel que  $M' = T(M)$ .

Autrement dit :

**Proposition 3.1.** Lorsque  $\Gamma$  est un cercle et  $A$  et  $B$  deux points distincts de ce cercle, la transformation  $T_{AB}$  établit une bijection de chacun des deux arcs de cercle de  $\Gamma$  d'extrémités  $A$  et  $B$  dans le segment  $[AB]$ .

#### 3. Fibres de $T$

On appellera fibres de  $T$  les ensembles  $T^{-1}(\{C\})$  pour  $C \in [AB]$ .

Pour  $C = A$  (resp.  $C = B$ ), la fibre de  $C$  est réduite à  $\{B\}$  (resp. à  $\{A\}$ ).

Si  $C \in ]AB[$ ,  $C \neq A$  et  $C \neq B$ , alors  $C$  peut s'écrire comme barycentre de  $(A, \lambda)$  et  $(B, 1 - \lambda)$  avec  $0 < \lambda < 1$ .

Si  $M \in E - \{A, B\}$ ,  $T(M) = C$  équivaut à dire que le barycentre des points pondérés  $(A, MA)$  et  $(B, MB)$  et le barycentre de  $(A, \lambda)$  et  $(B, 1 - \lambda)$  sont confondus, ce qui

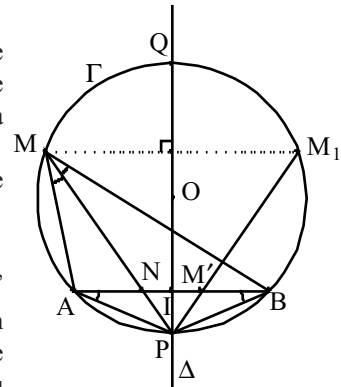


Figure 1

est vrai si et seulement si  $\frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ .

La fibre de C est donc l'ensemble  $C_{A,B,\frac{\lambda}{1-\lambda}}$ .

Cela donne un critère pour que T soit injective en restriction à un ensemble  $\Gamma$  : il faut et il suffit que  $\Gamma$  ne coupe pas deux fois les « cercles »  $C_{A,B,k}$ . C'est le cas si on prend un arc de cercle joignant A et B, mais aussi dans bien d'autres cas : un arc d'ellipse, une ligne brisée  $[AC] \cup [CB]$  où C est un point de la médiatrice de  $[AB]$ , ou comme sur la figure 2 une courbe de Bézier bien choisie.

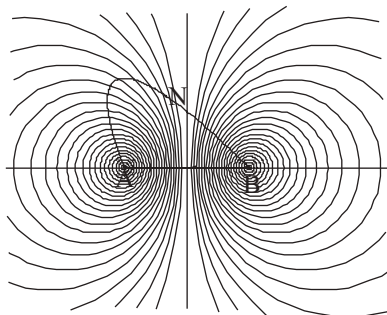


Figure 2

#### IV. Cas de trois points non alignés. Image par T du cercle circonscrit à ces points

**1. Montrons d'abord que l'image par  $T = T_{ABC}$  de E est incluse dans un triangle et étudions la restriction de T au cercle circonscrit au triangle ABC.**

Soit  $\Gamma$  le cercle circonscrit à un triangle ABC.

Nous utiliserons les notations usuelles dans ABC :  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ . Étant donné un triangle  $\Delta$ , nous dirons qu'un point est dans ce triangle s'il est soit à l'intérieur de  $\Delta$ , soit sur son pourtour (autrement dit nous considérons le triangle comme l'enveloppe convexe de ses trois sommets).

M étant un point quelconque du plan, construisons le barycentre  $M'$  des points pondérés (A, MA), (B, MB) et (C, MC), c'est à dire  $M' = T_{ABC}(M)$ .

Remarquons d'abord que si  $M = A$ , alors  $M' = A' = T_{BC}(A)$  où  $A'$  est le barycentre de (B, AB) et (C, AC) (puisque  $MA = 0$ ) et que si  $M = B$  alors  $M' = B' = T_{CA}(B)$  où  $B'$  est le barycentre de (C, BC) et (A, BA).

Nous allons montrer que si M appartient à l'arc de cercle de  $\Gamma$  d'extrémités A et B qui ne contient pas C, avec  $M \neq A$  et  $M \neq B$  alors  $M'$  appartient au segment  $]A'B'[$ .

$A' = \text{bar} \{(B, c); (C, b)\}$ . Alors, pour tout point N,  $c\overrightarrow{NB} + b\overrightarrow{NC} = (b+c)\overrightarrow{NA'}$ .

En remplaçant N par  $A'$ , on obtient que :

$A = \text{bar} \{(A', -a(b+c)); (B', b(a+c)); (C', c(b+a))\}$  (somme des coefficients :  $2bc$ )

ou encore que :

$A = \text{bar} \{(A', -a^2(b+c)); (B', ab(a+c)); (C', ac(b+a))\}$  (somme des coefficients :  $2abc$ )

De même :

$B = \text{bar} \{(B', -b^2(c+a)); (C', bc(b+a)); (A', ba(c+b))\}$  (somme des coefficients :  $2abc$ )

$C = \text{bar} \{(C', -c^2(a+b)); (A', ca(c+b)); (B', cb(a+c))\}$  (somme des coefficients :  $2abc$ )

Si  $M' = T(M)$ , on en déduit alors que :

$$M' = \text{bar} \{ (A', a(b+c) (-a MA + b MB + c MC)) ; \\ (B', b(c+a) (-b MB + c MC + a MA)) ; \\ (C', c(a+b) (-c MC + a MA + b MB)) \}$$

Le théorème de Ptolémée (proposition 1.2) montre que les trois coefficients sont positifs ou nuls, ce qui prouve que  $M'$  est situé dans le triangle  $A'B'C'$  et qu'il est sur un des côtés si et seulement si un des trois coefficients est nul, ce qui, toujours d'après le théorème de Ptolémée, équivaut à dire que  $M$  est sur un des trois arcs de cercles.

**Proposition 4.1.** L'image par  $T_{A,B,C}$  d'un point  $M$  quelconque de  $E$  est un point  $M'$  situé dans le triangle  $A'B'C'$ ,  $M'$  étant sur les bords du triangle  $A'B'C'$  si et seulement si le point  $M$  est sur le cercle circonscrit à  $ABC$ .

**Construction géométrique des points  $A'$ ,  $B'$  et  $M'$**

Remarquons que  $A' = T_{BC}(A)$  peut être construit de façon géométrique comme nous l'avons déjà expliqué ainsi que  $B' = T_{CA}(B)$ . Leur construction n'est pas décrite sur la figure 3 pour plus de lisibilité.

Construisons  $P = T_{AB}(M)$  à l'aide de la méthode exposée dans le cas de deux points. D'après le théorème du barycentre partiel,  $M'$  est donc le barycentre de  $(P ; MA + MB)$  et  $(C ; MC)$ .

Donc  $M'$  appartient à la droite  $(CP)$ . C'est donc le point d'intersection de la droite  $(CP)$  avec la droite  $(A'B')$ .

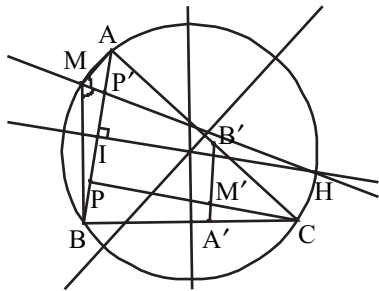


Figure 3

**Bijektivité de  $T$  en restriction à l'arc d'extrémités  $A$  et  $B$  ne contenant pas  $C$**

L'étude faite pour deux points nous prouve qu'à deux points  $M$  distincts de l'arc d'extrémités  $A$  et  $B$  ne contenant pas  $C$  correspondent deux points  $P = T_{AB}(M)$  distincts et donc deux points  $M'$  distincts sur le segment  $[A'B']$ .  $T$  est donc injective sur cet arc.

Soit  $M'$  un point du segment  $[A'B']$ , distinct de  $A'$  et  $B'$ . Appelons  $P$  le point d'intersection de la droite  $(CM')$  avec le segment  $[AB]$ . Construisons  $P'$ , symétrique de  $P$  par rapport à  $I$ , milieu de  $[AB]$ . Appelons  $H$  le point d'intersection de la médiatrice de  $[AB]$  avec l'arc de cercle qui contient  $C$ . Construisons alors le point  $M$ , point d'intersection de la droite  $(HP')$  avec le segment  $[AB]$ .

Nous savons alors que  $P = T_{AB}(M)$  et il est évident que  $M' = T_{ABC}(M)$ .

Conclusion :

**Théorème 4.2.**  $ABC$  étant un triangle inscrit dans un cercle  $\Gamma$ , la transformation  $T_{ABC}$  établit une bijection de  $\Gamma$  dans le triangle  $A'B'C'$  où  $A' = T_{BC}(A)$ ,  $B' = T_{CA}(B)$  et  $C' = T_{AB}(C)$ ,  $T_{ABC}$  envoyant respectivement les arcs  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  ne contenant pas  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur les segments  $[B'C']$ ,  $[C'A']$  et  $[A'B']$ .

## 2. Construction de l'image d'un point M quelconque par T.

Voir la figure 4. Il suffit de tracer les images respectives P, Q, R de M par  $T_{BC}$ ,  $T_{CA}$ ,  $T_{AB}$  à l'aide de la méthode expliquée dans le cas de deux points.

$M' = T(M)$  est alors à l'intersection des droites (AP), (BQ) et (CR) (deux de ces droites suffisent bien sûr).

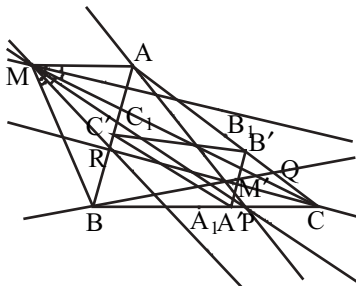


Figure 4

## 3. Cherchons maintenant les points ayant même image par T qu'un point M donné.

**Lemme 4.3.** Soit  $M \in E$ . Si  $M$  n'est pas sur  $\Gamma$  et si  $M \neq O$ , il y a exactement un autre point  $N$  qui vérifie  $T(M) = T(N)$  : c'est l'inverse  $i(M)$  par l'inversion  $i$  de pôle  $O$  et de rapport  $R^2$ ,  $R$  étant le rayon de  $\Gamma$ . Sur  $\Gamma$ , l'application  $T$  est injective.

*Démonstration.*

Remarquons d'abord que  $T(O) = G$  où  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$  et que  $O$  est l'unique antécédent de  $G$  par  $T$ .

Supposons  $M \in \Gamma$  fixé et  $M \neq O$ . On a vu à la proposition 2.1 que  $T(M) = T[i(M)]$ . En posant  $N = i(M)$ , on a donc  $T(N) = T(M)$ .

Pour montrer que  $N$  est le seul autre point ayant même image par  $T$  que  $M$ , il suffit donc de montrer que, un point  $M$  étant donné, il existe au plus deux points  $N$  vérifiant  $T(N) = T(M)$ .

Supposons donc que  $T(M) = T(N)$ . Comme  $(A, B, C)$  est un repère affine du plan, cela impose que les coordonnées barycentriques de  $M$  et  $N$  sur  $(A, B, C)$  sont égales donc que :

$$\frac{MA}{MA+MB+MC} = \frac{NA}{NA+NB+NC}, \quad \frac{MB}{MA+MB+MC} = \frac{NB}{NA+NB+NC} \quad \text{et}$$

$$\frac{MC}{MA+MB+MC} = \frac{NC}{NA+NB+NC}.$$

En passant aux inverses et en résolvant, on obtient alors :  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ ,  $\frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC}$

et  $\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}$ .

Donc  $N$  est sur l'intersection des cercles  $C_{A,B, \frac{MA}{MB}}$  et  $C_{A,C, \frac{MA}{MC}}$  (ainsi que sur

$C_{B,C, \frac{MB}{MC}}$ ), ce qui prouve bien qu'il y a au plus deux points  $N$  solutions (et donc

exactement deux quand  $M \notin \Gamma$  et  $M \neq O$  puisque alors  $i(M) \neq M$ ).

## 4. Montrons que T est surjective sur le triangle A'B'C'

**Lemme 4.4.** Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$ , rayon  $R$ , passant par les points  $A$  et  $B$ . Si

$k > 0$ , les cercles  $C_{A,B,k}$  sont des cercles orthogonaux à  $\Gamma$ . En particulier, ils sont invariants par l'inversion  $i$  de pôle  $O$  et de rapport  $R^2$ .

*Démonstration.* Supposons  $k > 0$ ,  $k \neq 1$  et soit  $C$  le cercle  $C_{A,B,k}$ . Soit  $M$  un point d'intersection de  $C$  et de  $\Gamma$ . En appelant  $I$  et  $J$  les pieds des bissectrices issues de  $M$  dans  $AMB$ , on sait que  $[IJ]$  est un diamètre de  $C$  et, d'après la proposition 1.5, la tangente à  $C$  en  $M$  passe par le milieu de  $[IJ]$ . Les cercles  $C$  et  $\Gamma$  sont donc orthogonaux et la proposition 1.6 prouve que le cercle est invariant par l'inversion  $i$  de centre  $O$  et de rapport  $OA^2$ .

**Remarque 4.5.** Le lemme 5.3 s'applique aussi au cas où  $k = 1$  en considérant que la médiatrice de  $[AB]$  est un cercle dont le centre est à l'infini. Cette médiatrice est invariante par  $i$ .

Comme le cercle  $C$  est invariant par  $i$ , il est naturel de s'intéresser à son image par  $T$ .

**Proposition 4.6.** Soit  $\Gamma$  le cercle circonscrit à un triangle  $ABC$ , et  $k$  un réel strictement positif. Appelons  $M_1$  et  $M_2$  les points d'intersection de  $C_{A,B,k}$  avec le cercle  $\Gamma$  et  $M'_1$  et  $M'_2$  leurs images respectives par  $T = T_{ABC}$ . L'image par  $T$  de  $C_{A,B,k}$  est le segment  $[M'_1 M'_2]$ .

Voir la figure 5.

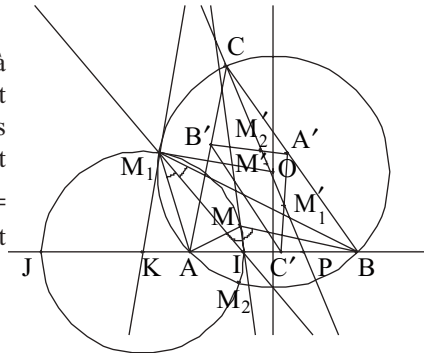


Figure 5

**Cas particulier.** Si  $k = 1$ ,  $C$  est la médiatrice de  $[AB]$  et si  $M$  est sur  $C$ ,  $M' = T(M)$  est sur la droite  $(CP)$ ,  $P$  étant le milieu de  $[AB]$ .

Voir la figure 6.

*Démonstration.* Appelons  $\Gamma_1$  un des deux arcs de cercle de  $C = C_{A,B,k}$  d'extrémités  $M_1$  et  $M_2$  et supposons que  $M$  est un point de  $\Gamma_1$ . Par définition même du cercle  $C$ , le pied  $I$  de la bissectrice issue de  $M_1$  dans  $AM_1B$  est le même que le pied de la bissectrice issue de  $M$  dans  $AMB$ . Soit  $P$  le symétrique de  $I$  par rapport au milieu de  $[AB]$ . On sait alors que  $M' = T(M)$  est sur la droite  $(CP)$ .

Posons  $M'_1 = T(M_1)$  et  $M'_2 = T(M_2)$ .

Comme  $M_1$  et  $M_2$  sont sur  $\Gamma$ , on sait que  $M'_1$  et  $M'_2$  sont sur un des bords du triangle  $A'B'C'$ . Comme de plus on sait que  $M'$  est dans ce triangle,  $M'$  est donc sur le segment  $[M'_1 M'_2]$ .

Reste à prouver que l'image par  $T$  de  $\Gamma_1$  est le segment  $[M'_1 M'_2]$  en entier. Nous allons pour cela utiliser un peu de topologie.

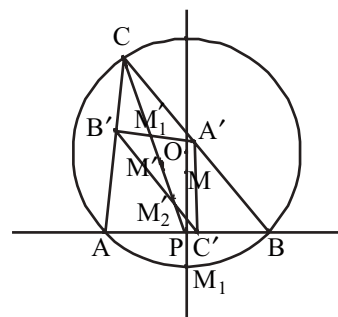


Figure 6

L'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  associée à  $T$  définie par :

$$f(z) = \frac{|z-a|a + |z-b|b + |z-c|c}{|z-a| + |z-b| + |z-c|}$$

étant continue, l'image par  $f$  d'un ensemble connexe est un ensemble connexe.

L'image de l'arc de cercle  $\Gamma_1$  (connexe) étant connexe et incluse dans le segment

$[M'_1 M'_2]$  ne peut être que le segment  $[M'_1 M'_2]$ .

Cette proposition nous prouve de plus que l'image par  $T$  du plan est le triangle  $A'B'C'$ .

Supposons en effet que le point  $M'$  est un point donné du triangle  $A'B'C'$ . Soit  $P$  le point d'intersection de  $(CM')$  avec le segment  $[AB]$  et  $I$  le symétrique de  $P$  par

rapport au milieu de  $[AB]$ . Ce qui précède prouve que, en posant  $k = \frac{IA}{IB} = \frac{PB}{PA}$ ,  $M'$

est sur l'image par  $T$  de  $C_{A,B,k}$ .

**Théorème 4.7.** Si  $ABC$  est un triangle, l'image par  $T = T_{ABC}$  du plan est le triangle  $A'B'C'$ , où  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les images respectives de  $A$ ,  $B$  et  $C$  par  $T$ .

Nous avons de plus une méthode pour trouver les antécédents d'un point  $M'$  du plan par  $T$ .

Il suffit de faire la construction précédente avec deux cercles  $C$  comme sur la figure 7 sur laquelle  $M_2$  et  $M_3$  sont les antécédents de  $M'$  par  $T$ . Nous savons de plus que la droite  $(M_2 M_3)$  passe par  $O$ , centre du cercle circonscrit  $\Gamma$  à  $ABC$ , puisqu'ils sont images l'un de l'autre par l'inversion de pôle  $O$  laissant  $A$ ,  $B$  et  $C$  invariants. Bien sûr, si nous traçons le troisième cercle  $C$  relatif aux points  $C$  et  $A$ , il passe aussi par  $M_2$  et  $M_3$ .

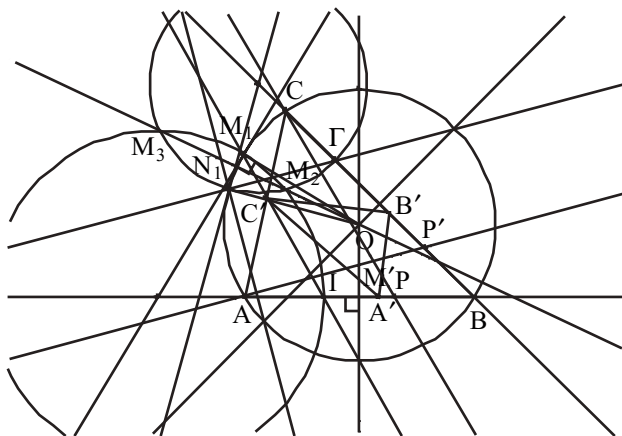


Figure 7

Si le point  $M'$  est sur le bord du triangle  $A'B'C'$ , les trois cercles sont tangents en un point situé sur le cercle circonscrit  $\Gamma$  (puisque  $M'$  admet un unique antécédent par  $T$ ) comme on peut le constater sur la figure 8.



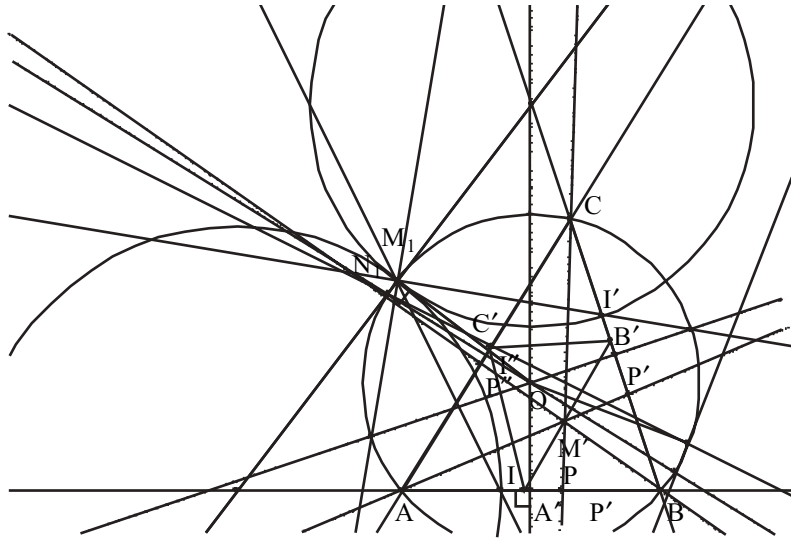


Figure 8

**5. Une construction plus simple de  $T_{ABC}(M)$  quand  $M$  est sur le cercle circonscrit  $\Gamma$**

Voir la figure 9.

Supposons que  $M$  est sur l'arc de cercle de  $\Gamma$  d'extrémités  $B$  et  $C$  qui contient le point  $A$ .

La droite  $(A'M)$  recoupe le cercle  $\Gamma$  en un point  $N$ .

Nous allons montrer que  $M' = T(M)$  est sur la droite  $(AN)$ .

Nous appellerons  $R$  le point d'intersection de la droite  $(AN)$  avec le segment  $[BC]$ .

$M' = \text{bar} \{(A, MA) ; (B, MB) ; (C, MC)\}$ .

Le théorème de l'angle inscrit prouve que les triangles  $A'MB$  et  $A'CN$  sont semblables.

On en déduit que  $\frac{MB}{BA'} = \frac{CN}{NA'}$ .

De même,  $A'MC$  et  $A'NB$  sont semblables.

On en déduit que  $\frac{MC}{CA'} = \frac{NB}{BA'}$ .

D'où  $M' = \text{bar} \{(A, MA) ; (B, \frac{CN \times BA'}{NA'}) ; (C, \frac{NB \times CA'}{BA'})\}$ .

Comme  $R = \text{bar} \{(B, RC) ; (C, RB)\}$ , en utilisant le théorème du barycentre partiel, il nous reste à prouver que

$$\frac{CN \times BA'}{NA' \times RC} = \frac{NB \times CA'}{BA' \times RB} \Leftrightarrow \frac{CN \times RB}{BN \times RC} = \frac{CA'}{BA'} \quad (1)$$

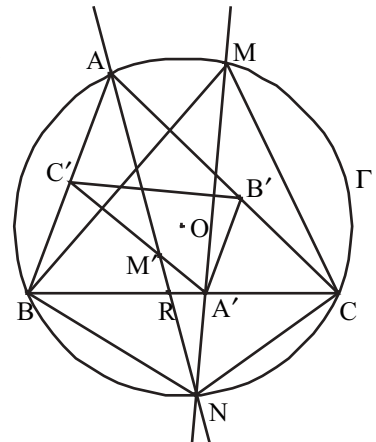


Figure 9

Comme  $A' = T(A) = \text{bar}\{(B, BA); (C, CA)\}$ , on a  $\frac{CA'}{BA'} = \frac{AB}{AC}$  d'où

$$(1) \Leftrightarrow \frac{CN \times RB}{BN \times RC} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

Les triangles RBN et RAC étant semblables, on a :  $\frac{RB}{BN} = \frac{RA}{AC}$ .

Les triangles RAB et RCN étant semblables, on a :  $\frac{CN}{RC} = \frac{AB}{RA}$ .

On déduit de ces deux égalités que (2) est vraie, donc que  $M' \in (AR) = (AN)$ .

## V. Des propriétés du triangle $A'B'C'$ dans le cas de trois points

### 1. Première propriété

Voir la figure 10.

$A'$  est le barycentre de  $(B, c)$  et  $(C, b)$ .

$B'$  est le barycentre de  $(C, a)$  et  $(A, c)$ .

$C'$  est le barycentre de  $(A, b)$  et  $(B, a)$ .

Montrons que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

Appelons H le barycentre des trois points pondérés  $(A, bc)$ ,  $(B, ca)$  et  $(C, ab)$ .

Le barycentre partiel de  $(B, ca)$  et  $(C, ab)$  est aussi celui de  $(B, c)$  et  $(C, b)$ . C'est donc  $A'$ .

D'après le théorème du barycentre partiel, H est donc le barycentre des points pondérés  $(A, bc)$  et  $(A', ca + ab)$ .

En particulier, H appartient donc au segment  $[AA']$ .

On montre de même que H appartient aussi aux segments  $[BB']$  et  $[CC']$ .

H est donc le point de concours des segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[CC']$ .

*Remarque.* les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont donc des droites de Ceva du triangle ABC.

### 2. Deuxième propriété

L'aire du triangle  $A'B'C'$  est toujours inférieure ou égale au quart de l'aire du triangle ABC.

Appelons  $S_A, S_B, S_C$  les aires respectives des triangles  $AB'C', BC'A'$  et  $CA'B'$ .

$$S_A = \frac{1}{2} AB' \cdot AC' \sin \hat{A}.$$

Comme  $B'$  est le barycentre de  $(A, c)$  et  $(C, a)$ ,  $\overrightarrow{AB'} = \frac{a}{a+c} \overrightarrow{AC}$ .

Comme  $C'$  est le barycentre de  $(B, a)$  et  $(A, b)$ ,  $\overrightarrow{AC'} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB}$ .

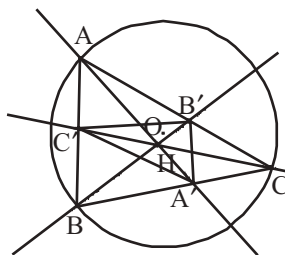


Figure 10

On a donc  $AB' = \frac{ab}{a+c}$  et  $AC' = \frac{ac}{a+b}$ .

Alors  $S_A = \frac{1}{2} \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} \sin \hat{A}$ .

De même,  $S_B = \frac{1}{2} \frac{b^2ca}{(b+c)(b+a)} \sin \hat{B}$  et  $S_C = \frac{1}{2} \frac{c^2ab}{(c+a)(c+b)} \sin \hat{C}$ .

Appelons  $S$  l'aire de  $ABC$  et  $S'$  celle de  $A'B'C'$ .

On a  $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ .

D'où  $S_A = \frac{a^2S}{(a+b)(a+c)}$ ,  $S_B = \frac{b^2S}{(b+c)(b+a)}$  et  $S_C = \frac{c^2S}{(c+a)(c+b)}$

Comme  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont sur les segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ , on a :  
 $S' = S - S_A - S_B - S_C$ .

Alors  $S' = S \left[ 1 - \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} - \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} - \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \right]$ .

$S' = \frac{S}{(a+b)(b+c)(c+a)} \left[ (a+b)(b+c)(c+a) - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b) \right]$ .

$S' = S \times \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ .

Nous voulons montrer que  $\frac{S'}{S} \leq \frac{1}{4}$ .

Posons  $p = a + b + c$ .

Alors  $(a+b)(b+c)(c+a) = (p-a)(p-b)(p-c)$   
 $= p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc$ .

Donc

$(a+b)(b+c)(c+a) = p^3 - p^2 \times p + p(ab+bc+ca) - abc = p(ab+bc+ca) - abc$ .

Donc

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = p \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 1$$
  
$$= (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 1 = 2 + \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left( \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)$$

D'où  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = 8 + \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca}$ .

On a donc toujours  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8$  et  $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{4}$ , l'égalité

n'ayant lieu que si le triangle  $ABC$  est équilatéral.

Donc  $S' \leq \frac{1}{4}S$ , l'égalité n'étant vérifiée que si le triangle ABC est équilatéral. Dans ce cas,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les milieux des côtés du triangle ABC.

## VI. Beaucoup de questions restent en suspens

### 1. Ce que j'ai démontré dans le cas de $n$ points cocycliques ( $n \geq 4$ )

J'ai démontré que si  $A_1A_2\dots A_n$  est un polygone convexe inscrit dans un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et rayon  $R$ ,  $T = T_{A_1A_2\dots A_n}$  établit une bijection du cercle circonscrit à ces points sur le polygone  $A'_1A'_2\dots A'_n$  où les  $A'_i$  sont les images des  $A_i$  par  $T$ . Cette démonstration qui est trop longue pour figurer dans cet article sera bientôt en ligne sur un site Internet dont l'adresse sera communiquée ultérieurement aux lecteurs du bulletin vert de l'APMEP.

### 2. Ce qu'il reste à prouver dans le cas de $n$ points cocycliques ( $n \geq 4$ )

Il semble que les résultats trouvés pour trois points restent encore valables, à savoir que si  $A_1A_2\dots A_n$  est un polygone convexe inscrit dans un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et rayon  $R$ , l'image du plan par  $T = T_{A_1A_2\dots A_n}$  est le polygone enveloppe convexe des points  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  où les  $A'_i$  sont les images des  $A_i$  par  $T$  et que les points  $M'$  intérieurs à ce polygone aient deux antécédents par  $T$  qui sont inverses l'un de l'autre par  $T$ .

Des figures d'essai faites avec Math&Grafic semblent confirmer ce résultat, comme la figure 11 où j'ai tracé pour cinq points les images par  $T$  de cercles  $C_{A,D,k}$ .

### 3. Dans le cas de $n$ points non cocycliques

Des tests me poussent à penser que l'image du plan est encore le polygone enveloppe convexe des points  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  mais je n'en ai pas la preuve non plus.

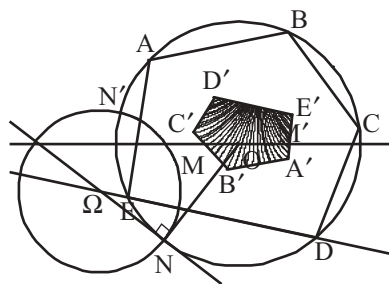


Figure 11

### 4. D'autres questions

Dans le cas d'un triangle  $A'B'C'$  donné, peut-on trouver un ou plusieurs triangles ABC tel que  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  soient les images respectives de A, B et C par  $T = T_{ABC}$  ? Si oui, comment construire ABC ?

Même question dans le cas de  $n$  points.

### 5. Appel à contribution

Pour tous les résultats non démontrés et ceux auxquels je n'aurais pas pensé, merci de nous communiquer tout ce que vous pourrez trouver.