

Quelles sont tes opérations ?

Boris Véron

Objectifs conceptuels

Expressions algébriques.
Variable et fonction.
Somme ou produit.
Distributivité.

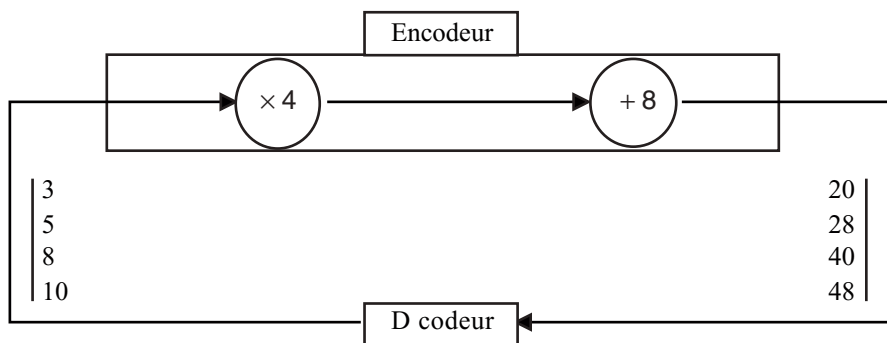
Règle du jeu

Un joueur (encodeur) choisit deux opérations (par exemple soustraire 4, multiplier par 5, ajouter 1). Son adversaire (décodeur) doit deviner les opérations choisies. Pour cela il annonce un nombre de départ, l'encodeur effectue la première opération avec ce nombre. Il obtient un nombre (intermédiaire) qui lui servira pour effectuer la seconde opération. Il annonce alors le résultat final au décodeur qui doit essayer de deviner les deux opérations choisies (et leur ordre !). Il a le droit de proposer autant de nombres de départ qu'il le veut.

Chaque joueur marque autant de points qu'il a donné de nombres de départ, le gagnant est celui qui a le moins de points.

On ne commencera qu'avec des opérations en nombres entiers.

Schéma et exemple



Le décodeur propose les nombres 3, 5, 8 et 10 et reçoit respectivement en retour les nombres 20, 28, 40 et 48.

À lui de retrouver les opérations choisies par l'encodeur.

Utilisations pédagogiques

Premier temps : découverte et appropriation de la situation

Le professeur joue d'abord le rôle du décodeur afin de vérifier que les élèves ont bien compris la règle. Surtout, il ne choisit ni 0, ni 1 comme nombres de départ, il en choisit même plus de 2. Il peut se tromper dans sa première proposition ; dans l'exemple ci-dessus il peut choisir d'abord l'addition de 2 puis la multiplication par 4. C'est d'ailleurs cette double possibilité qui sera exploitée plus tard pour faire formaliser aux élèves que :

$$(x + 2) \times 4 = 4x + 8.$$

Le professeur joue ensuite le rôle de l'encodeur, les élèves vont alors devoir deviner les opérations. Après quelques exemples où les solutions en nombres entiers sont uniques, le professeur choisit des situations où les solutions sont multiples afin de faire émerger la distributivité. Il refusera alors systématiquement la première solution acceptable proposée par les élèves.

Un élève ayant une solution acceptable va devoir comprendre l'équivalence de sa solution et de celle du professeur.

Deuxième temps : Formalisation et modélisation de la situation

La formalisation consiste à dire que nous avons des machines auxquelles nous fournissons un nombre et qui nous en retourne un. Selon le niveau où l'on enseigne (découverte en cinquième au collège, remédiation en aide individualisée en seconde au lycée), il faut souligner plus ou moins l'aspect fonctionnel de la situation.

On la modélisera sous la forme $ax + b$ ou $a(x + c)$, où x représente les nombres que le décodeur propose et $ax + b$ (ou $a(x + c)$) représente les nombres que l'encodeur (ou la machine) répond.

Une fois que cette situation est modélisée, il faut que chacun comprenne l'équivalence des solutions. On peut lancer le débat, d'autant mieux si un élève demande pourquoi sa solution n'est pas la bonne, et ainsi institutionnaliser la distributivité.

Troisième temps

On pourra ensuite modifier la règle, le décodeur ayant le droit de demander si la suite des opérations conduit à une « expression somme » ou à une « expression produit ». Dans ce jeu, on pourra dire que l'on a une somme (algébrique) lorsque la dernière opération est une addition (ou une soustraction), et un produit lorsque la dernière opération est une multiplication.

Utilisations pédagogiques supplémentaires

On pourra ensuite remarquer que les propositions de 0 et de 1 comme nombres de départ donnent rapidement les valeurs de a et de b (ou de a et de c). Ce qui sera réactivé au moment des équations de droite avec coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

Notons que l'on peut soustraire un nombre ou ajouter son opposé, ce qui donne le double de solutions.

On peut à partir de la quatrième ajouter la division et ainsi doubler une nouvelle fois le nombre de solutions, puis remarquer que diviser par un nombre revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

À ce stade, on obtient huit écritures possibles de la même fonction. Ce n'est pas un mauvais exercice que de les faire chercher toutes.

Si, de plus, on accepte la fonction carrée, l'utilisation de trois nombres de départ permettra de voir si l'accroissement des nombres d'arrivée est proportionnel à l'accroissement des nombres de départ. Cela permettra de caractériser les fonctions affines. Ceci est un objectif de la classe de seconde.

Remarques

Certains choix d'opérations peuvent conduire à des solutions en nombre infini. Le choix de deux additions par exemple ou de deux multiplications ou même une multiplication par 0 en seconde position qui masque alors la première opération. Il faut penser à utiliser de telles remarques si elles se présentent.