

## Adapter un logiciel de calcul formel pour l'utiliser avec des élèves de lycée.

Jean-Baptiste Lagrange et Lise Heilbronner

Des logiciels de calcul formel ont été développés pour les mathématiques professionnelles : ils sont mis à la disposition des élèves du Second degré sur des calculatrices et ordinateurs. Leur utilisation prometteuse à l'origine s'est révélée plus délicate que prévue. *A priori*, les professeurs attendaient de l'affranchissement de la manipulation des algorithmes de calcul une réflexion plus poussée de leurs élèves. L'usage a montré des attitudes non réflexives et des difficultés techniques.

À partir d'observations menées pendant une année scolaire auprès de lycéens (Caen et Chartres) disposant de TI92 en permanence, nous (groupe IREM de Rennes-INRP) avons défini différents types d'actions : les gestes d'exploration, les gestes de calcul et ceux de mise en œuvre de théorèmes pour établir des résultats. Tous ces « gestes » sont aussi réalisés en papier-crayon et avec les calculatrices graphiques, mais grâce au calcul formel les gestes de calcul symbolique (factorisation ou dérivation, ...) obtiennent une réponse quasi immédiate. Une première conséquence de cette rapidité est le recours répété à une même commande, soit pour contrôler avec un outil différent, soit parce que la réponse antérieure n'a pas été mémorisée. L'élève peut, en vue d'un même résultat, utiliser la table de valeurs, la représentation

graphique, la valeur exacte (par exemple sous forme symbolique  $e^3$  ou  $\cos^{-1} \frac{3}{\pi}$ ) de

la fonction. Le risque est que l'élève se perde avec une sur-information. Par contre dans les cas où la tâche nécessite des calculs en cascade (cas du signe d'une dérivée non factorisable), la rapidité d'exécution et la fiabilité permettent d'élaborer des stratégies – pas toujours économes – sans que l'enseignant intervienne pour relancer la recherche.

Au cours d'un premier travail<sup>(1)</sup>, nous avons construit un ensemble de situations d'utilisation du logiciel DERIVE (version DOS) en classe de seconde : nous avons ainsi déterminé pour chaque situation un ensemble de commandes de calcul formel liées au problème, et paramétré le logiciel pour qu'il ne propose que ces commandes, et nous leur avons attribué leur nom usuel. Nous avons alors pu observer les difficultés des élèves à prendre des initiatives, construire un raisonnement, et leur fréquent recours à l'enseignant.

---

(1) IREM Rennes 1996-98 : Un logiciel de calcul formel en seconde. Groupe : Intégration d'un logiciel de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques – IREM de Rennes publié en février 2000 – 92 pages.

Nous avons constaté que les logiciels (Derive et son avatar sur TI92) ne proposent et ne permettent pas de démarches systématiques de preuves. Les élèves confondent conjectures par observations et justifications liées à des calculs symboliques, et, comme ils ont recours à la fois à une exploration de la représentation graphique ou de la table de valeurs et au calcul symbolique et qu'ils ne nous ont pas fourni de traces écrites ni de bilan oral, on ne peut pas savoir si la conclusion s'appuie sur un évidence lue sur le graphique ou sur des propriétés connues de l'élève dont les conditions de mise en œuvre sont validables par les résultats du calcul symbolique.

Nous cherchons donc à mettre davantage l'accent sur les démarches de preuve pour amener à une réflexion plus consistante sur le choix et l'utilisation de techniques. Dans cette optique, nous envisageons de piloter des niveaux de granularité (terme technique qu'on peut traduire par des « niveaux de rigueur et d'explicitation »), c'est-à-dire de détails dans les justifications : par exemple, les exigences pour justifier le signe d'une fonction affine ou d'un polynôme du second degré ne sont pas les mêmes en classe de seconde qu'en terminale, et varient suivant les séries.

Par ailleurs les logiciels ne guident pas et ne proposent pas d'aide : ils renvoient seulement des messages d'erreurs difficiles à interpréter. Le professeur est obligé d'intervenir aussi bien sur des questions de syntaxe que de non compréhension. À partir de l'enregistrement de l'historique de ses gestes, l'élève peut revenir sur ses erreurs de calcul et de démarches, ses blocages et l'enseignant peut proposer une aide personnalisée.

## La réalisation

Nous avons développé une maquette que nous avons mise au point au fur et à mesure des essais (corrections des erreurs informatiques, amélioration des messages d'erreurs) sur TI92 et, en différé (par des étudiants en stage l'été à partir d'un cahier de charges établi par nous), une réalisation sur ordinateur. L'environnement proposé est global : il comporte les fonctionnalités des calculatrices graphiques, l'appel à un noyau de calcul formel pour générer les expressions définies dans l'analyse *a priori* et évaluer les expressions utilisées dans les preuves.

Pour aboutir à une réalisation concrète nous avons fixé les types de tâches : étude de variations et positions relatives de courbes, qui se ramènent à des études de signes. Nous avons estimé important de laisser des choix à l'élève :

- dans l'ordre des instructions : choix de l'action (menu F3) puis de l'expression sur laquelle elle s'applique ou l'inverse.
- dans les gestes d'exploration : graphique, table, valeurs calculées.
- dans les moyens de justification : par exemple signe d'un trinôme par règle ou par factorisation ou par sens de variation ou somme de termes tous de même signe. Ce n'est qu'un exemple : voir la liste des justifications proposées (menu F6)

## La maquette

Les expressions (menu F2) : au départ les expressions données par l'énoncé, puis celles que l'élève obtient à partir des outils de calcul (F3) avec des « arrêts » déterminés lors de l'analyse *a priori* de l'enseignant : par exemple on ne laisse pas indéfiniment dériver une expression. En effet celui-ci a élaboré, à l'aide d'une interface professeur, l'arbre des expressions que l'élève pourra utiliser. Le professeur a choisi les expressions terminales, les outils mis à la disposition de l'élève et les propriétés utilisables.

Le menu calculs (F3) : selon le niveau factorisation, développement, réduction au même dénominateur, dériver, recherche de zéros, ...

Le menu d'exploration (F4) : les représentations graphiques, les tables de valeurs, les équations.

Le tableau (F5) : l'élève construit un tableau de signes et variations : il peut entrer ou ôter des valeurs de  $x$ , des expressions, des signes et flèches à titre de conjectures (affichés en pointillés).

## La preuve (F6)

C'est un enchaînement de pas.

Les prémisses peuvent être conjecturées et la conclusion validée : quand les prémisses le seront, les conséquences n'auront pas à être redémontrées : les résultats partiels s'affichent automatiquement dans le tableau (F5).

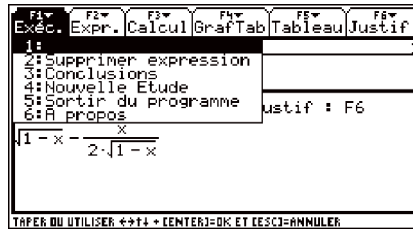
Pour justifier une conjecture, l'élève fait le choix d'une règle et d'une expression : il doit alors valider le type d'expression à laquelle s'applique la règle. Par exemple s'il choisit « affine », il doit fournir le zéro  $x_0$  et le coefficient directeur  $a$  : le logiciel contrôle l'égalité de  $a(x - x_0)$  avec l'expression étudiée et affiche un message de validation ou d'erreur. S'il y a eu validation, une boîte de dialogue demande, dans chaque intervalle défini par les valeurs de la variable introduites au fur et à mesure de l'étude, le signe ou le sens de variation, qui sont confirmés par affichage dans le tableau ou refusés.

On évite ainsi des essais de réponses systématiques sans réflexion où on tente les trois signes(+/-/0) l'un après l'autre. Si la conclusion qu'énonce un pas de déduction est vraie, le pas de déduction n'est pas obligatoirement validé ; la citation de la règle de déduction ne permet pas non plus de valider un pas de déduction : il faudrait s'assurer qu'elle est appliquée correctement, ce qui est difficile dans cet environnement qui ne permet pas de détailler davantage, ni de laisser plus d'initiatives.

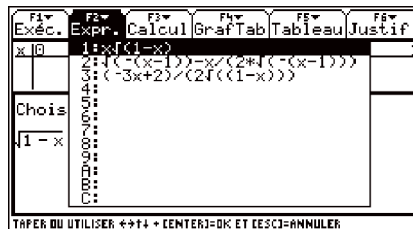
Nous avons adopté le processus suivant : l'élève choisit dans la liste (F6) la propriété (la règle de déduction), l'expression (F2) à laquelle il l'applique, une boîte de dialogue lui demande de donner des hypothèses (coefficient, racines, signe de dérivée, sens de variation, etc.) et une conclusion (une sortie de la règle de déduction) (signe d'une expression ou flèche de variation sur un intervalle) : le logiciel vérifie l'association propriété-hypothèses et conclusion (règle de déduction et entrée-sortie de la règle de déduction) et valide le pas de déduction en affichant le résultat en trait plein dans le tableau (indépendamment de toute conjecture, vraie ou fausse, antérieure introduite par l'élève).

## Présentation de la maquette:

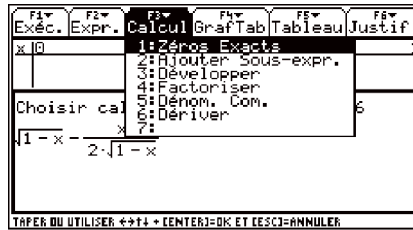
## 1. menu F1: récapitulatif et sortie



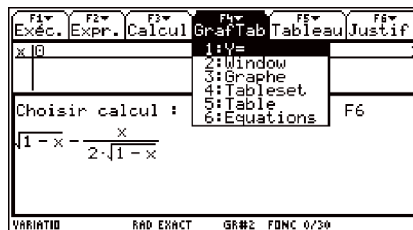
## 2. menu F2 : liste des expressions actives



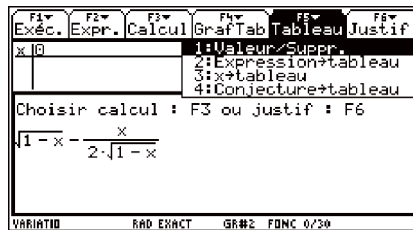
## 3. menu F3 : outils de calcul disponibles (liste modifiable)



## 4. menu F4 : exploration: graphique et numérique des expressions de la liste F2



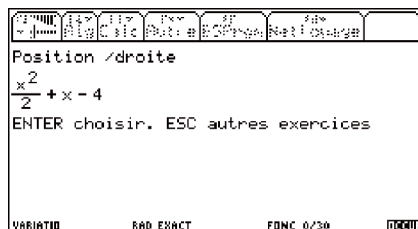
## 5. menu F5 : permet d'écrire des conjectures dans un tableau de signes et variations



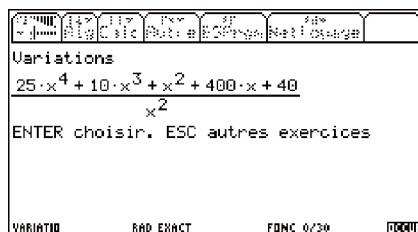
6. menu F6 : propose des « règles » de détermination de signes et sens de variations dont les conditions d'application sont à compléter. (avec une « granularité » modulable par le professeur)



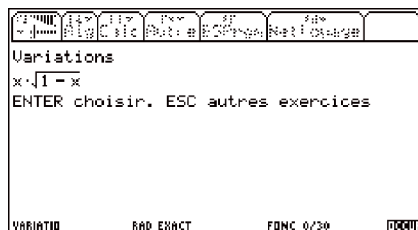
7. Exemple d'exercice



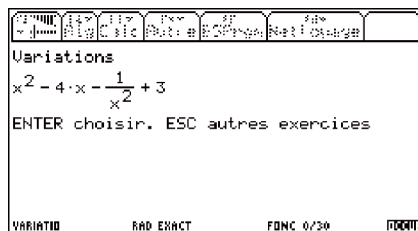
8. Exemple d'exercice



9. Exemple d'exercice

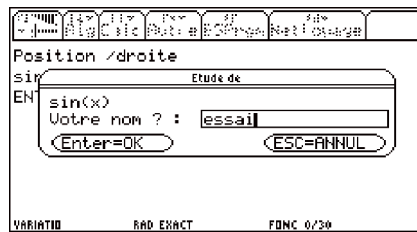
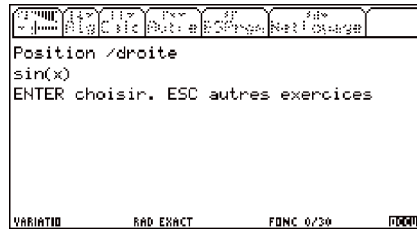


10. Exemple d'exercice

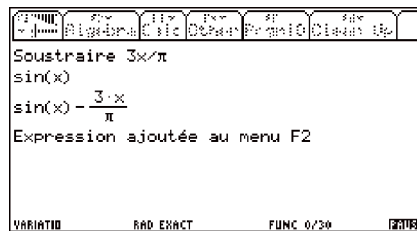


Un exemple d'utilisation : position relative de la courbe représentant  $x \mapsto \sin x$  et de la droite représentant  $x \mapsto 3x/\pi$  sur  $[0 ; \pi/2[$

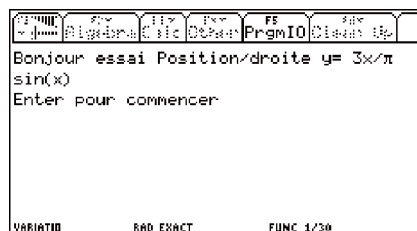
11. Exemple d'exercice avec enregistrement de l'élève



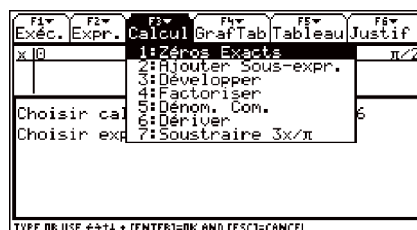
12. Message d'accueil précisant l'énoncé de l'exercice



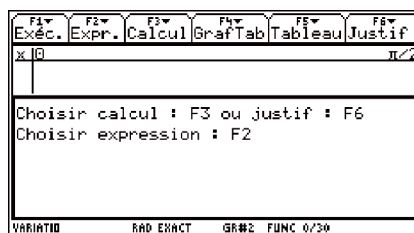
13. Liste des expressions préenregistrées pour l'exercice



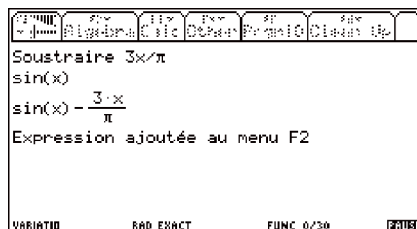
14. L'élève choisit un outil: ici « soustraire  $3x/\pi$  »



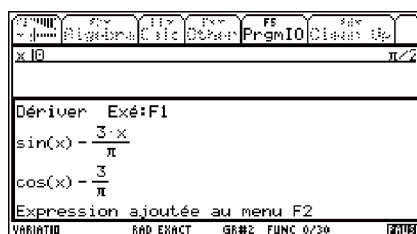
15. Pour effectuer un calcul l'élève doit avoir sélectionné en F2 l'expression sur laquelle il travaille, l'exécuter avec F1



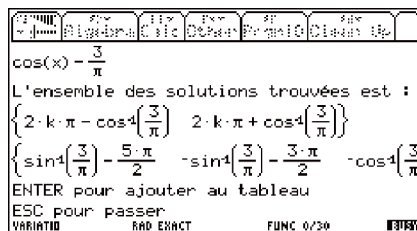
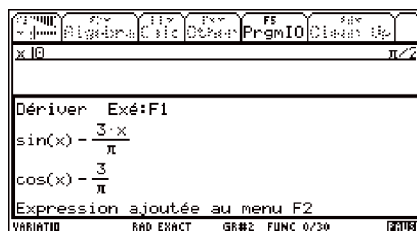
16. Cet écran s'affiche



17. Dérivée de l'expression précédente



18. Recherche des zéros exacts de la dérivée



## Conclusion

L'observation des élèves a conforté notre analyse *a priori* des élèves. La résolution d'un problème à l'aide d'un logiciel requiert tout autant sinon plus qu'en situation traditionnelle la compréhension des « gestes » et leur mise en relation avec l'objectif recherché. Sur papier l'élève adopte en général une procédure standard : il n'en a le plus souvent retenu qu'une d'autant que les énoncés, trop souvent, balisent la recherche et induisent, sinon imposent la démarche.

Ici avec « variatio » l'énoncé est succinct : étudier le signe ou les variations d'une fonction ou la position relative de deux courbes. Aucune indication n'est fournie au départ. Par contre l'élève dispose d'outils d'explorations : graphique, table de valeurs, factorisation, racines, équations. À chaque étape, il peut aussi contrôler la validité de ses conjectures avec le menu des justifications.

Nous avons constaté qu'en raison de la rapidité des réponses les élèves ont tendance à calculer, puis à réfléchir : c'est à dire chercher plusieurs arguments pour une même conjecture, parfois pour confirmer, mais aussi alors que la justification est déjà acquise. Certains n'envisagent de choisir leurs arguments de preuve qu'après avoir choisi la règle et font ou non le constat d'éléments manquants ou surabondants. Les élèves que nous avons recouru peu aux explorations de la représentation graphique ou de la table, bien qu'ils soient utilisateurs de calculatrices graphiques : ces outils de conjecture ne sont pas encore si familiers.

Les lycéens qui ont utilisé le logiciel plusieurs fois dans l'année (Première S ou TS) s'y sont habitués et associent sans difficulté les commandes de chaque menu à leurs connaissances : techniques de calcul et théorèmes : ils recherchent dans le menu « justifications » les résultats du cours.

## Perspectives

Cette maquette « variatio » nous a permis de tester directement la faisabilité de notre projet en y mettant en œuvre une partie de nos objectifs initiaux, d'expérimenter le « logiciel », d'en estimer les limites. Concrètement cet environnement manque d'ergonomie : la taille de l'écran ne facilite pas la lisibilité, elle restreint la longueur des expressions, des messages d'erreurs. Les TI92 sur lesquelles la maquette est implantée ne sont pas si nombreuses (remplacées par la TI89 d'écran plus net mais plus petit).

Dans la perspective d'un élargissement des situations traitées en analyse, nous mettons en place une nouvelle maquette sur PC appelée Casyopee. Sur l'écran s'affichent en même temps la liste des fonctions introduites, leurs représentations graphiques, l'historique des demandes et leurs réponses. Toutes les activités liées à l'étude des fonctions peuvent être envisagées : les données ne sont plus préinstallées nécessairement, mais le professeur a la possibilité de brider des commandes. L'expérimentation est en cours.

Suite du feuilleton dans un prochain numéro.