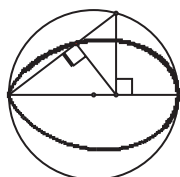
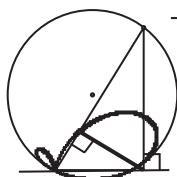


## « Ovoïde » avec ou sans Cabri

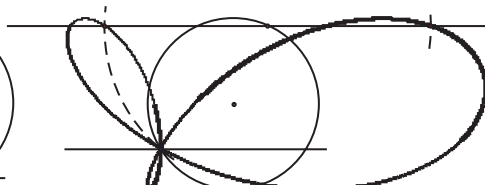
Bruno Alaplantive



folium simple



bifolium

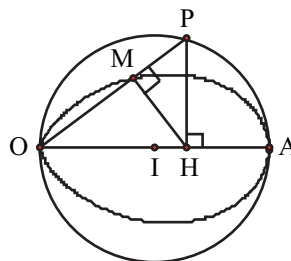


trifolium

Ayant découvert il y a déjà longtemps le numéro spécial de la revue du Palais de la découverte sur les courbes mathématiques<sup>(1)</sup>, je n'hésite pas à faire tracer de belles courbes à mes élèves en début de sixième. Folium simple, bifolium, trifolium, besace, ... Leur algorithme de construction est simple, il permet de faire tracer des perpendiculaires, des parallèles, de reporter des longueurs. Ces courbes sont très esthétiques et les élèves sont stupéfaits de voir apparaître des courbes qui ne se dessinent pas avec un compas. De plus le large sourire de ceux qui ont réussi une belle production est très réconfortant.

C'est à la suite de cette activité que je me suis décidé cette année à déterminer, pour moi d'abord, le sommet du folium simple. L'idée ne m'était pas nouvelle mais, ne pensant pas trouver de position remarquable, je ne m'étais jamais donné la peine d'effectuer les calculs.

Rappelons tout d'abord que le folium simple ou ovoïde, est le lieu du point M lorsque P décrit le cercle.



### 1. Recherche du sommet du folium simple

**Première méthode :** Géométrie analytique

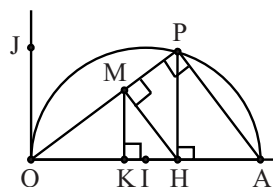
Par commodité, on choisit le repère orthonormal  $(O, I, J)$  où I est le centre du cercle et on ne se place que dans le demi-cercle supérieur (coordonnées positives)

d'équation :  $y = \sqrt{x(2-x)}$ .

Calculons  $y_M$  en fonction de  $x_P$  :

Soit K le projeté orthogonal de M sur (OA).

Le triangle rectangle OMH est l'homothétique du triangle rectangle OPA, dans l'homothétie de centre O telle que :  $A \mapsto H, P \mapsto M, H \mapsto K$ .



(1) Cette brochure est co-diffusée par l'APMEP. Brochure n° 202 : Courbes Mathématiques, prix 3,80 €.

Donc  $\frac{MK}{PH} = \frac{OH}{OA}$  ; c'est à dire  $y_M = \frac{x_P}{2} y_P$ , soit  $y_M = \frac{x_P}{2} \sqrt{x_P(2-x_P)}$  où  $x_P \in [0 ; 2]$ .

*Remarque. On peut éviter de parler d'homothétie :*

*Il suffit de signaler que les triangles OMH et OPA sont « semblables » ou même, au collège, qu'ils sont « à l'échelle l'un de l'autre ». Dès lors, comme le rapport des longueurs d'un segment et de son image est constant (cf. cartes « à l'échelle » !), on*

*retrouve  $\frac{MK}{PH} = \frac{OH}{OA}$ , etc.*

◆ Exploitation de  $y_M = \frac{x_P}{2} \sqrt{x_P(2-x_P)}$  où  $x_P \in [0 ; 2]$ .

• À ce stade, il serait possible :

- avant la classe de Première, de tracer le graphique de  $y_M$  en fonction de  $x_P$  et d'en déduire des conjectures pour  $x_P$  relativement au maximum de  $y_M$ .
- dès la classe de Première, de dériver  $y_M$  par rapport à  $x_P$  et d'en déduire  $x_P$  pour  $y_M$  maximal.

• Mais cette double voie s'exerce sans doute plus facilement en utilisant  $y_M^2$ .

La fonction  $x \mapsto x^2$  étant croissante sur  $[0;2]$ ,  $y_M$  est maximum lorsque  $y_M^2$  l'est aussi.

L'étude sur  $[0 ; 2]$  de la fonction  $f(x) = \frac{2x^3 - x^4}{4}$  permet de conclure que  $y_M$  est

maximum pour  $x_P = 1,5$ .

Cela correspond à H milieu de [IA], donc à :

- IPA triangle équilatéral,
- OPP' équilatéral, en désignant par P' le symétrique de P par rapport à (OA).

**COMMENTAIRE**

*Cette méthode « automatique » révélera sa pleine efficacité dès la classe de Première. Elle n'en laisse pas moins quelque insatisfaction : Pourquoi ces triangles équilatéraux ? Cela pourrait-il advenir « naturellement » en restant dans le champ des configurations, sans analytique ?*

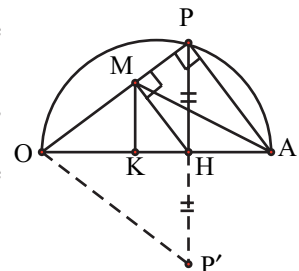
**Deuxième méthode :**

En se souvenant d'une démonstration du théorème de « Thalès-triangle » par les aires.

Le parallélisme de (MH) et (PA) induit l'égalité des aires de OPH et OMA.

Or celle de OMA est maximale en même temps que MK.

MK est donc maximale quand l'aire de OPH l'est.



Voici alors deux démarches possibles :

- Aire OHP =  $\frac{1}{2}$  OH  $\times$  HP, ce qui renvoie à la méthode 1 ;
- Le maximum de l'aire de OPH correspond à celui de l'aire du triangle double OPP', ce qui envoie au problème suivant : « Quand un triangle inscrit dans un cercle fixe est-il d'aire maximale ? »

Réponse : quand il est équilatéral... Je traiterai cela en annexe.

#### COMMENTAIRES

– En sa démarche initiale, cette méthode n'est pas naturelle si l'on n'a pas le souvenir de la démonstration de « Thalès-triangle » par les aires. Mais elle peut être l'occasion de revisiter ainsi un théorème majeur tout en montrant l'intérêt des aires comme outil.

– D'autre part, elle permet de s'évader du problème, mineur, relatif au sommet du folium, pour se brancher sur le problème apparemment plus général du triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle.

Cette interdépendance entre problèmes particuliers et problèmes plus généraux est l'une des fécondités des mathématiques : elle mérite d'être soulignée.

– Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle.

Le rendre isocèle, par exemple de base [BC], en A'BC augmente sa hauteur, donc son aire. L'intuition nous dit qu'il suffit de recommencer en le rendant isocèle de base [A'C]. Mais alors il cesse de l'être de sommet A'. On recommence pour A'... On enclenche ici une suite dont on soupçonne bien qu'elle a comme limite le triangle équilatéral. Resterait à le démontrer.

L'annexe proposera des démonstrations plus élémentaires.

#### Troisième méthode : avec CABRI

La recherche sur CABRI permet de conjecturer que la hauteur maximale MK correspond à l'aire maximale du triangle OPH ; que  $\frac{\text{aire(OPH)}}{\text{MK}}$  = constante, puis que celle-ci est égale au rayon du cercle. On a donc aire (OPH) = rayon  $\times$  MK, ce qui renvoie sur l'aire de (OMA) et justifie la conjecture. Dès lors, on termine comme dans la deuxième méthode.

#### COMMENTAIRES

- L'intervention de CABRI permet d'être actif en mobilisant peu de connaissances. Mais il faut être très attentif aux suggestions de CABRI, ce qui développe des connaissances fondamentales. L'emploi de CABRI est ainsi d'autant plus intéressant.
- L'on retrouve bien entendu la fin des commentaires de la méthode 2...

#### COMMENTAIRE RELATIF AUX TROIS METHODES :

Les trois méthodes peuvent s'imbriquer fortement<sup>(2)</sup>, ce qui :

(2) Par la première méthode, j'avais obtenu l'expression de  $y_M$  à partir  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ , traduction analytique minimale des données qui aboutit à un calcul plus lourd. L'évidence

- d'une part facilite éventuellement la recherche,
- d'autre part permet de donner davantage de sens aux divers micro-problèmes apparus avec chaque méthode et à leurs conclusions.

Ainsi, par leur glissement vers le problème auquel elles aboutissent, les méthodes 2 et 3 répondent-elles au « Pourquoi ? » qu'inspire le résultat de la première méthode, tandis que celle-ci résout le problème final des méthodes 2 et 3 (cf. annexe, méthode 1).

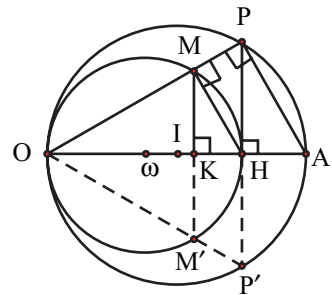
Ces convergences, ces appuis mutuels peuvent être un régal et contribuer au plaisir de faire des maths !

**2. Position de K pour M sommet du folium, donc pour OPP' équilatéral**

K est l'image de H dans l'homothétie de centre O qui

envoie OPA sur OMH et donc de rapport  $\frac{OH}{OA} = \frac{3}{4}$ .

Ainsi  $OK = \frac{3}{4}OH = \frac{9}{8}$ .



Remarque. On peut éviter de parler d'homothétie :  
Soit M' le symétrique de M par rapport à (OA).

Comme  $\widehat{MOM'} = \widehat{POP'}$ ,  $\widehat{MOM'} = 60^\circ$  et le triangle OMM' est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de diamètre [OH], centre  $\omega$ .

Alors K est le milieu de [OH] et  $OK = \frac{3}{4}OH = \frac{9}{8}$ .

**Annexe**

Problème : Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle. Quand a-t-il l'aire maximale ?

Pour simplifier l'écriture je désignerai les aires par des parenthèses : ainsi (ABC) désignera l'aire du triangle ABC.

**Méthode 1**

Elle est évidemment fournie par notre problème sur le folium : la première méthode conduit à un triangle équilatéral quand les méthodes 2 et 3 conduisent au triangle d'aire maximale. Donc...

Voici maintenant trois méthodes indépendantes de l'étude sur le folium.

---

de l'utilisation de l'homothétie et la légèreté qu'elle induit sur le calcul ne vient qu'après le tracé du segment [PA]. Or, mauvais chercheur que j'étais, celui-ci ne m'a été dicté que par la découverte de l'égalité des aires des triangles OPH et OMA sur CABRI.

## Méthode 2

Le triangle CAB est inscrit dans le cercle  $\Gamma$ . Tout triangle a au moins un angle inférieur à  $\pi/3$ . Soit  $\widehat{C}$  un tel angle.

Cette condition initiale empruntée à M. Jacques Dabanc (cf. méthode 3) me permettra de ne considérer que le seul cas où  $[AB]$  est situé entre  $[GF]$  et  $\alpha$ , où EFG est le triangle équilatéral inscrit avec  $[GF] \parallel [AB]$  et  $(E\alpha)$  l'axe de symétrie de AEB.

On a :  $(ACB) \leq (AEB)$ , l'égalité étant atteinte pour C et E confondus.

Comparons donc EAB au « champion présumé » EFG (on les suppose distincts).

De (EAB) à (EFG) il y a :

- perte de (AMNB),
- gain de 2 (EMG).

Pour faciliter la comparaison de la perte et du gain, ajoutons-leur (MAG) et (NFB). Il y a alors :

- perte de (AGFB),
- gain de 2 (EAG).

a)  $(EAG) > (FAG)$ .

En effet, d'une part  $EG = FG$ , d'autre part  $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$  (angles inscrits...), et enfin  $EA > FA$  (régionnement du plan par la médiatrice de  $[EF]$ ). Cela suffit par superposition – les deux triangles ayant un angle et un côté communs – à justifier l'inégalité proposée (sans avoir nécessairement à utiliser

$$(EAG) = \frac{1}{2} EG \cdot AE \sin \widehat{E_1},$$

etc.<sup>(3)</sup>)

b)  $(FAG) > (FAB)$ .

Cette inégalité provient de  $GF > AB$  et du fait que les hauteurs correspondantes sont égales.

De a) et b) il vient :

$$2(EAG) > (FAG) + (FAB)$$

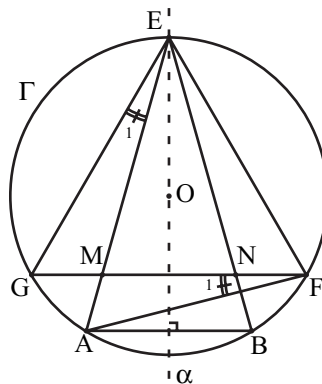
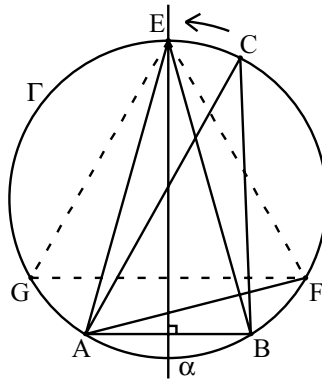
soit

$$2(EAG) > (AGFB)$$

Le gain est supérieur à la perte.

EFG, équilatéral, est bien le triangle inscrit d'aire maximale.

(3) On pourrait également faire intervenir la rotation de centre G et d'angle  $-\pi/3$  pour la comparaison des deux triangles.



**Méthode 3** (due à Jacques Dablang)

(1) CAB triangle quelconque inscrit dans le cercle  $\Gamma$ .  
EFG inscrit, équilatéral.

C est un sommet de CAB tel que  $\widehat{C} \leq \pi/3$ .

( $E\alpha$ ) étant un axe de symétrie de EGF,  
(EAB)  $\geq$  (CAB).

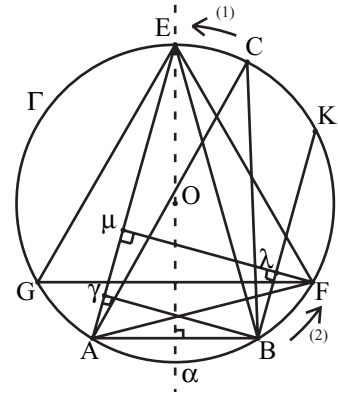
(2) Soit (BK) // (AE).

Alors  $\widehat{EOK} = \widehat{AOB} \leq 2\pi/3$ .

Il en résulte que F est entre B et K,  
éventuellement confondu avec les deux.

D'où la relation  $F\mu = F\lambda + \lambda\mu \geq B\gamma$ .

On a donc : (EAB)  $\leq$  (EAF)  $\leq$  (EGF).



Ainsi l'aire du triangle équilatéral EFG est égale au maximum des aires des triangles inscrits dans  $\Gamma$ .

Les inégalités écrites sont strictes si CAB n'est pas équilatéral car l'aire de tout autre triangle peut être strictement augmentée ( $C \rightarrow E$ ).

Remarque : La précaution initiale, à savoir  $\widehat{C} \leq \pi/3$ , permet d'éviter les multiples « cas de figure ». Seule la figure proposée est alors possible.

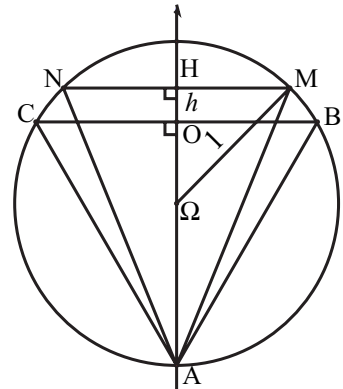
**Méthode 4** (communiquée par Jean Cuenat)

De tous les triangles inscrits à un cercle donné et partageant un même côté PQ non diamétral, celui qui a la plus grande aire est le triangle isocèle

PQR tel que  $RP = RQ$  et tel que  $\widehat{R} < \frac{\pi}{2}$ . Si PQ

est diamétral, les deux triangles isocèles rectangles d'hypoténuse commune PQ répondent à la question.

Tous les triangles équilatéraux inscrits à un cercle donné ayant même aire, on compare l'aire d'un triangle isocèle AMN à celle d'un triangle équilatéral ABC de même cercle circonscrit, en faisant intervenir la décomposition de la figure ci-contre, le rayon du cercle étant pris comme unité.



En posant  $h = \overline{OH}$ , l'aire du triangle isocèle AMN est égale à :

$$\mathcal{A}(h) = \left(1 + \frac{1}{2} + h\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + h\right)^2}$$

Désignons par  $\mathcal{A}(0)$  l'aire du triangle équilatéral ABC :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(0)^2 - \mathcal{A}(h)^2 &= \frac{27}{16} - \left(\frac{3}{2} + h\right)^3 \left(\frac{1}{2} - h\right) \\ &= \frac{27}{16} + \left(h + \frac{3}{2}\right)^3 \left(h - \frac{1}{2}\right) \\ &= h^4 + 4h^3 + \frac{9}{2}h^2 = h^2 \left[ (h+2)^2 + \frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{A}(0) \geq \mathcal{A}(h)$ .

D'où l'aire maximale cherchée,  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ , c'est-à-dire celle du triangle équilatéral.