

Dallage de rectangles et fractions continues

Jean-Pierre Friedelmeyer^(*)

Introduction

Dans son article « *Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence* »⁽¹⁾, Dominique Bénard évoque *trois gestes caractéristiques du numérique (compter, calculer, mesurer) qui permettent d'en instituer (...) une cohérence enveloppant la diversité de ses manifestations formelles*. Et de faire remarquer que *cela importe d'autant que les deux premiers gestes, compter et mesurer, vont se trouver mis à mal par l'irruption d'une autre forme, la racine carrée*. Il ajoute que : *À parler trop vite de nombres irrationnels, et à ne plus parler de grandeurs incommensurables, nous perdons sans doute un point d'appui essentiel pour l'introduction de ces formes numériques nouvelles*.

Le texte qui suit fait écho à cet article en ce qu'il cherche à mettre en place une progression qui part du *compter* pour aller au *mesurer* en s'appuyant sur le *calculer*. Il prolonge un travail fait à l'Irem de Strasbourg par une équipe de professeurs pour fournir quelques ressources pour l'enseignement en série littéraire particulièrement autour des alinéas de programme « *Commensurabilité et algorithme d'Euclide* ».

Une des difficultés pour instituer une cohérence de l'enseignement des mathématiques au collège et encore au lycée, réside dans l'extension du concept de nombre, c'est-à-dire le passage du nombre qui compte au nombre qui mesure, et au-delà, au nombre pensé, exprimant une relation abstraite entre deux objets qui les rende accessibles au calcul. Il nous semble qu'une manière particulièrement efficace pour affronter cette difficulté est de s'appuyer sur la géométrie : pour un élève de collège ou de lycée, une figure donne prise sur la réalité plus facilement qu'un calcul algébrique ou numérique, qui en reste trop souvent à l'application d'un algorithme automatique. À l'âge de l'apprentissage des mathématiques élémentaires et du raisonnement, la géométrie nous paraît la plus apte à donner une intuition, un sens et une représentation des nombres irrationnels : sans elle on n'aura jamais qu'une

approximation décimale sur un écran, ou un symbole graphique tel que $\sqrt{\quad}$. Le professeur de mathématiques doit faire comprendre à ses élèves l'existence de relations entre des grandeurs qui ne s'expriment pas par un rapport de nombres entiers ; puis les préparer à un élargissement du concept de nombre qui permette le calcul sur ces relations avec comme aboutissement le concept de nombre réel.

Comme dans toute pédagogie active, il s'agit de faire participer l'élève à l'élaboration des notions à apprendre ; cette participation se distingue d'un simple

(*) IREM de Strasbourg.

(1) Repères IREM n° 47, avril 2002.

apprentissage en ce que la démarche est ponctuée de questions que l'élève est amené de lui-même à se poser, et auxquelles il peut apporter de lui-même des éléments de réponse. Le rôle du professeur est ici de susciter questions et réponses par des problèmes précis et explicites, d'accompagner l'élève dans sa progression, de l'aider à la formulation des questions et à la synthèse des réponses. La démarche de l'élève est ainsi une démarche individuelle qui se traduira quelquefois dans le texte par l'utilisation du « je », mais qui se conclut dans un savoir universel concernant l'enrichissement du concept de nombre et sa compréhension : alors sera utilisé le « nous ».

L'idée de départ nous est venue d'un étonnement provoqué par la lecture des *Éléments* d'Euclide, précisément par la mise en parallèle de deux propositions : l'une se trouve au livre VII et concerne les entiers naturels. C'est la première proposition de ce livre :

Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais [le reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux.

L'autre concerne des grandeurs quelconques ; c'est la proposition 2 du livre X :

Si, de deux grandeurs inégales {proposées} la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.

Ce parallélisme se retrouve dans la mise en place d'algorithmes qui concernent aussi bien les entiers (livre VII) que les grandeurs (livre X) :

Étant données deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure (X, 3).

et :

Étant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver leur plus grande commune mesure (VII, 2).

Nous attribuons à juste titre à Euclide le nom d'un algorithme portant sur les nombres entiers (et plus généralement sur les éléments d'un anneau euclidien – par exemple un anneau de polynômes). Mais nous ne l'appliquons pas à un couple de nombres réels.

La progression qui suit s'appuie sur ce parallélisme rencontré chez Euclide entre nombres entiers et rapports de grandeurs pour permettre de dépasser le cadre des entiers et accéder au concept de nombre réel.

Le support de base reprend ce que les Grecs appelaient *anthyphaësis* (littéralement *soustraction réciproque*) et consistant, pour deux grandeurs inégales données, *de retrancher la plus petite de la plus grande de façon réitérée et en alternance*, selon les termes utilisés par Euclide dans les propositions citées ci-dessus. Le rectangle et le carré sont les deux figures idéales pour visualiser cette opération, sous la forme d'un dallage de rectangle par des carrés, et selon les règles qui sont exposées dans la première partie.

La progression proposée ne s'adresse pas à un niveau d'enseignement déterminé ; elle va du plus élémentaire au plus abstrait, et peut donner lieu à des exercices et des problèmes de tous niveaux. Nous la développerons en quatre parties :

1. une exploration géométrique met en place le support intuitif sous-jacent à la problématique générale,
2. une exploration numérique met en évidence la question du nombre apte à traduire les propriétés géométriques et à les rendre accessibles au calcul,
3. ce calcul sera formalisé au moyen de quelques outils algébriques modernes pour lui donner toute son efficacité,
4. efficacité qui sera perceptible dans les exemples proposés de calculs au moyen d'un tableur. Cette dernière partie peut elle-même rendre plus facile l'illustration et donc la compréhension des parties 2 et 3.

L'article donnera sens aux concepts de nombre rationnel et irrationnel, mais il suppose que l'on connaisse les nombres décimaux, la racine carrée ainsi que l'approximation décimale d'un réel. L'objectif n'est pas de donner une n-ième présentation de la théorie des fractions continues et du développement d'un réel en fraction continue. Ceux-ci s'introduisent naturellement à partir de la problématique du dallage d'un rectangle. Ils permettent de donner sens à la notion d'irrationalité et de décrire les propriétés remarquables de certains rectangles. Les cas explicites de fractions continues que l'on rencontrera restent presque toujours particuliers et décrivent des situations concrètes. Les situations plus générales développées dans la partie III peuvent très bien être laissées de côté dans un premier temps. Une courte bibliographie à la fin de l'article permettra si nécessaire de trouver un exposé précis des aspects théoriques liés à cette question.

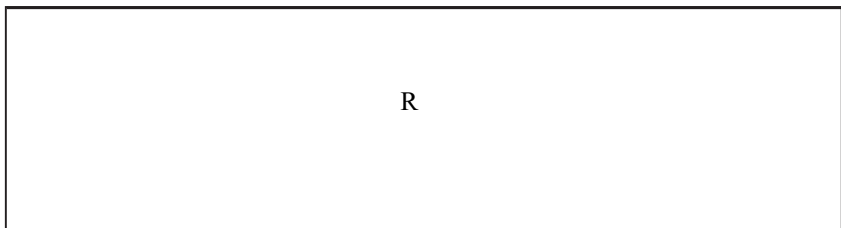
I. Exploration géométrique : dallage d'un rectangle

Définition

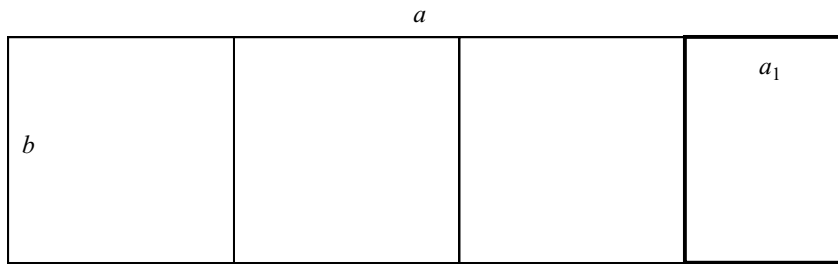
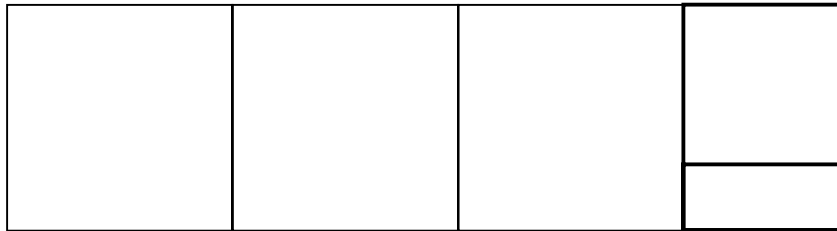
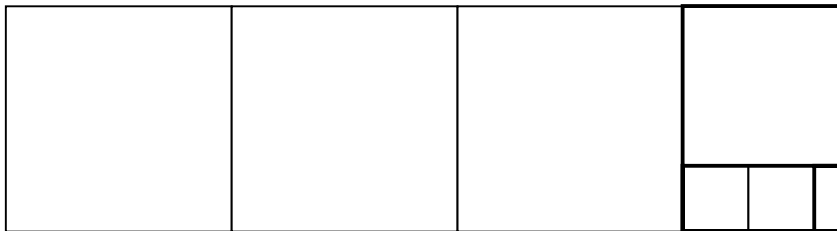
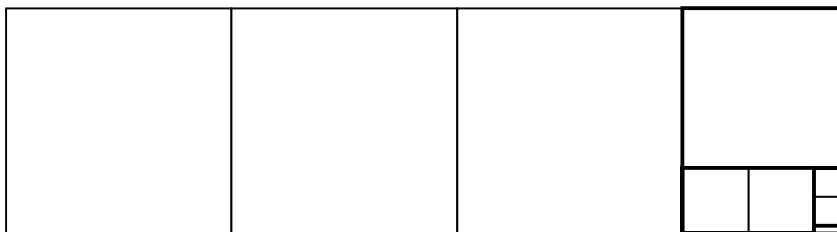
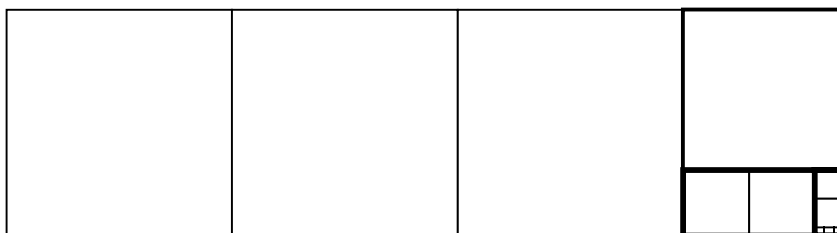
1. On appelle dallage Δ d'un rectangle R son recouvrement par des carrés à intérieurs disjoints (seuls les côtés peuvent se superposer) les plus grands possibles et à côtés parallèles aux côtés du rectangle. Pour la réalisation d'un tel dallage, on commence par placer les plus grands carrés possibles dans le rectangle R ; il restera en général un rectangle plus petit sur lequel on recommencera l'opération. La seule contrainte est de loger à chaque étape le carré ou les carrés égaux les plus grands possibles dans le rectangle restant. Les étapes successives de cette opération seront notées $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ qui serviront aussi à désigner les figures correspondantes, et le processus d'ensemble sera, pour rester simple, également appelé dallage Δ .

Exemple

Figure 1



Étape Δ_0

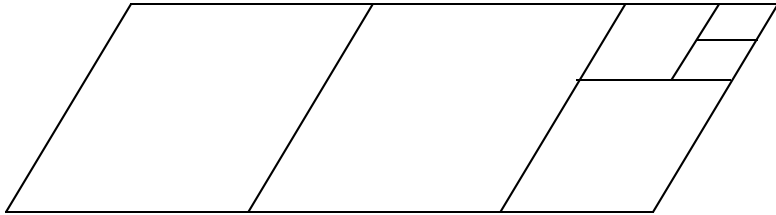
Étape Δ_1 Étape Δ_2 Étape Δ_3 Étape Δ_4 Étape Δ_5

2. On appelle dallage δ d'un rectangle R son recouvrement par des carrés à intérieurs disjoints (seuls les côtés peuvent se superposer) et à côtés parallèles aux côtés du rectangle, avec la contrainte que les carrés soient tous identiques et les plus grands possibles.

Exemple : Nous obtenons un dallage δ du rectangle ci-dessus au moyen de $89 \times 24 = 2\,136$ petits carrés tous égaux aux plus petits des carrés du dallage Δ .

Ce résultat est général : tout dallage Δ fournit automatiquement un dallage δ , au moyen des plus petits carrés intervenant dans Δ . Inversement, nous verrons un peu plus loin que tout dallage δ est l'aboutissement d'un dallage Δ .

Remarque. On pourrait, dans tout ce qui suit, remplacer les rectangles par des parallélogrammes et les carrés par des losanges sans que cela change en quoi que ce soit les relations mises en évidence. Il faudrait alors fixer une direction pour les côtés parallèles ou bien l'angle formé par les côtés des parallélogrammes et des losanges.



Rectangles et carrés présentent en cela l'avantage que cette direction ou cet angle est connu implicitement comme droit et offre donc une plus grande commodité graphique sur une feuille de papier elle-même de forme rectangulaire.

Ces opérations de dallage ne donnent lieu pour l'instant qu'à des activités du niveau *école primaire* sur un rectangle que nous pouvons qualifier de « quelconque », c'est-à-dire sans propriété ni information autre que celle de « rectangle », étant entendu que le dallage Δ se fait forcément sur un rectangle particulier : celui qui a été dessiné sur la feuille de papier. Pourtant une telle activité amorce automatiquement une démarche mathématique à deux niveaux au moins :

1. elle fait intervenir des nombres par le comptage des carrés ;
2. elle soulève d'emblée des questions sur des propriétés plus abstraites du rectangle. Précisons chacun de ces deux points.

1. L'irruption du numérique et de la mesure

Désignons par a et b , a plus grand que b , les côtés du rectangle ; nous disons bien : « côtés » et non pas « mesures des côtés » ; il s'agit pour l'instant de grandeurs, en l'occurrence des segments, que l'on peut additionner (en les mettant bout à bout), et multiplier par un entier naturel non nul.

Si nous désignons par a_1, a_2, a_3, a_4 successivement le nouveau côté qui s'introduit à chaque étape dans le rectangle restant, nous avons :

Étape 0 : $a = b \times 3 + a_1$; étape 1 : $b = a_1 \times 1 + a_2$; étape 2 : $a_1 = a_2 \times 2 + a_3$;

étape 3 : $a_2 = a_3 \times 2 + a_4$; étape 4 : $a_3 = a_4 \times 3$.

En remontant de proche en proche les indices, nous avons : $a_3 = 3a_4$; $a_2 = 7a_4$; $a_1 = 17a_4$; $b = 24a_4$ et $a = 89a_4$. Nous avons mis en évidence un segment : a_4 , qui mesure les côtés a et b du rectangle, ainsi que les côtés des rectangles résiduels de chaque étape.

La suite des entiers [3, 1, 2, 2, 3] et leur agrégat en les entiers 24 et 89 caractérisent la « forme » du rectangle en ceci que si nous remplaçons le côté a_4 par n'importe quel autre segment, mais que nous conservons les relations numériques, le rectangle R sera plus ou moins grand, mais la relation entre ses côtés sera toujours la même ainsi que le dallage Δ (figure 2).

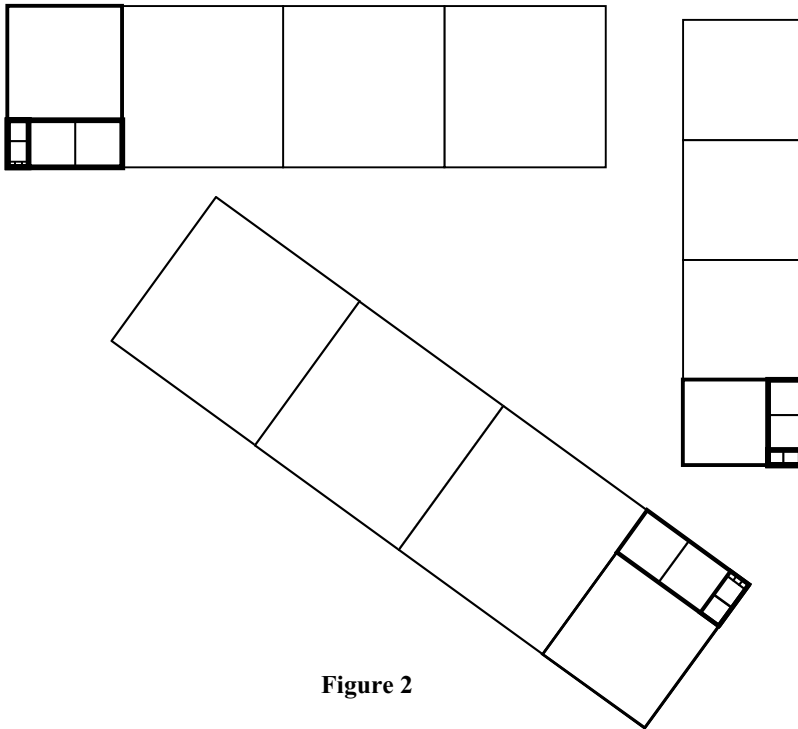


Figure 2

Nous appellerons cette relation : **rapport des côtés du rectangle R**, que nous noterons $\frac{a}{b}$ et nous écrirons $\frac{a}{b} = \frac{89}{24}$, ce qui revient à considérer l'écriture $\frac{89}{24}$ comme un nombre écrit sous forme de fraction, ou quotient de deux entiers. Et nous dirons que les côtés du rectangle ont une mesure commune, à savoir a_4 , ou qu'ils sont **commensurables**.

On pourrait penser que pour caractériser le rectangle R il faut, à la fois la suite des entiers [3, 1, 2, 2, 3] et leur « convergence » vers le couple (89 ; 24). Il n'en est rien :

le couple (89 ; 24), ou le rapport $\frac{89}{24}$ contient implicitement cette suite, par les égalités :

$$89 = 24 \times 3 + 17 ; 24 = 17 \times 1 + 7 ; 17 = 7 \times 2 + 3 ; 7 = 3 \times 2 + 1 ; 3 = 1 \times 3.$$

Le dallage Δ du rectangle R en cinq étapes s'est ainsi abstrait en une suite de cinq calculs sur des nombres. Cette suite de calculs est appelée **algorithme d'Euclide**,

appliqué au couple (89 ; 24). C'est donc la même chose que d'écrire le rapport $\frac{89}{24}$ ou d'écrire la suite [3, 1, 2, 2, 3]. Cette identité se retrouve lorsque l'on écrit les cinq égalités ci-dessus sous la forme :

$$\frac{89}{24} = 3 + \frac{17}{24} ; \frac{24}{17} = 1 + \frac{7}{17} ; \frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7} ; \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3},$$

et que l'on inverse de proche en proche les différentes fractions, ce qui donne :

$$\frac{89}{24} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}$$

Cette écriture, ou l'écriture typographiquement plus simple [3, 1, 2, 2, 3] est appelée

développement en fraction continue du nombre $\frac{89}{24}$.

Inversement, proposons-nous de réaliser un dallage Δ pour un rectangle dont les mesures des côtés relativement à une unité choisie soient connues, par exemple pour le rectangle R_1 de dimensions 133 mm et 91 mm.

Je peux inscrire dans le rectangle R_1 un carré de côté 91 et il reste un rectangle 91×42 (car $133 = 91 + 42$).

Dans ce rectangle je peux inscrire deux carrés de côté 42, qui laissent un rectangle 42×7 (car $91 = 42 \times 2 + 7$). Enfin dans le dernier rectangle je peux inscrire 6 carrés de côté 7 (puisque $42 = 7 \times 6$).

Récapitulons :

$133 = 91 \times 1 + 42 ; 91 = 42 \times 2 + 7 ; 42 = 7 \times 6$: le rapport des côtés est donné par le développement en fraction continue [1, 2, 6] ou :

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}} = \frac{19}{13}$$

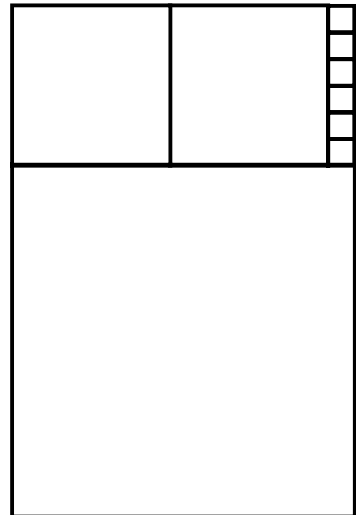


Figure 3

On remarquera que ce n'est pas la fraction $\frac{133}{91}$, mais une expression simplifiée de celle-ci. L'algorithme d'Euclide nous fournit en plus du développement en fraction continue :

- 1) le PGCD des nombres 133 et 91 à savoir 7, avec les relations : $133 = 19 \times 7$ et $91 = 13 \times 7$.
- 2) un dallage δ uniforme avec des carrés tous égaux, les plus grands possibles, donc de côté 7, au nombre de $19 \times 13 = 247$.
- 3) le rapport simplifié des côtés du rectangle initial : $\frac{19}{13}$, que l'on retrouve également en écrivant les quotients successifs :

$$\frac{133}{91} = 1 + \frac{42}{91} ; \frac{91}{42} = 2 + \frac{7}{42} ; \frac{42}{7} = 6,$$

d'où :

$$\frac{133}{91} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}} = \frac{19}{13}.$$

De même, si les dimensions du rectangle étaient 133 mm et 92 mm (au lieu de 91), le même procédé de dallage s'appliquerait, mais ne se serait achevé qu'avec des carrés de côté 1, traduisant le fait que 133 et 92 sont des nombres premiers entre eux et il n'y aurait pas eu de simplification de la fraction $\frac{133}{92}$.

Dans tous les cas, l'algorithme d'Euclide nous fournit la suite des quotients partiels correspondant aux nombres de carrés dans les étapes d'un dallage Δ . Cela démontre ce que nous affirmons plus haut : tout dallage δ est l'aboutissement d'un dallage Δ .

Mieux encore que pour le rectangle R, on

comprend que le rapport simplifié $\frac{19}{13}$ du

rectangle R_1 caractérise la **forme** du rectangle indépendamment des unités de mesure : pour les rectangles 133×91 et 19×13 ou $19u \times 13u$, il existe toujours une homothétie transformant l'un en l'autre si les côtés sont pris respectivement parallèles.

La figure ci-contre met en évidence cette permanence de la forme et l'homothétie qui la sous-tend. Mais des rectangles de même forme, (on dit aussi « semblables ») peuvent se présenter sans être homothétiques. Il suffit qu'ils aient même rapport des côtés.

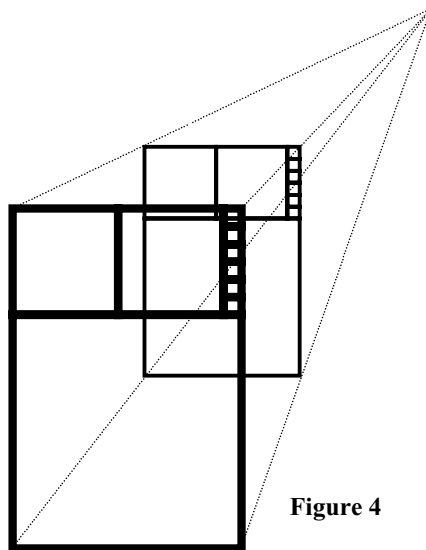


Figure 4

Donc, plus généralement et sans avoir besoin de faire référence à la notion de similitude telle qu'elle est au programme d'une terminale scientifique, nous pouvons appliquer aux seuls rectangles la notion de similitude et la définir ainsi : deux rectangles sont dits semblables s'ils ont même rapport des côtés. Cette définition, appliquée aux seuls rectangles, n'est pas contradictoire avec celle de la similitude en général. Mais comme les termes « *semblable* » et « *similitude* » sont utilisés dans des contextes mathématiques précis, nous utiliserons ici l'expression « *rectangles de même forme* », et cette forme est caractérisée par le rapport des côtés. Reste à préciser la nature de ce rapport : dans les exemples ci-dessus, ce rapport est clairement identifié en tant que rapport de nombres entiers.

2. Du rectangle concret ou physique au rectangle abstrait ou mathématique

La caractérisation de la *forme* d'un rectangle peut-elle toujours se faire aussi facilement et simplement par un nombre exprimant le rapport des côtés ? Examinons cette question pour un rectangle quelconque. Mais, qu'est-ce qu'un rectangle quelconque ? Convenons que c'est un rectangle que je dessine sans me soucier des longueurs des côtés ; c'est un rectangle pour lequel je n'ai aucune information, sinon que c'est un rectangle (on parle bien de la même manière d'un triangle quelconque) Dans le premier exemple du rectangle R, qui est quelconque en ce qu'il a été choisi « au hasard », nous avons eu en quelque sorte de la « chance » (mais est-ce vraiment de la chance ?) parce que le processus s'est terminé au bout de cinq étapes. On imagine très bien cependant qu'il pourrait être beaucoup plus long, voire qu'il ne se termine jamais. En fait, tant que je me fie à la simple observation, il arrivera toujours un moment où le pouvoir de résolution de mon œil sera inférieur à l'épaisseur du trait, et où le processus sera terminé.

Il en va tout autrement si, au-delà de la simple observation et de la mesure directe, j'introduis un raisonnement sur **un objet pensé, idéal**, donné non plus d'abord par une figure dessinée et concrète, mais par une propriété abstraite, tel l'exemple suivant (figure 5) : le rectangle ABCD considéré a la propriété que si j'enlève le plus grand carré possible, EFCD, il reste un rectangle ABFE *de même forme* (c'est-à-dire gardant le même rapport des côtés), sur lequel je peux recommencer la même opération, mettant ainsi en évidence un rectangle encore *de même forme* que le rectangle initial ; et de nouveau sur le dernier rectangle ainsi obtenu je peux réitérer le même découpage, mais avec des figures de plus en plus petites.

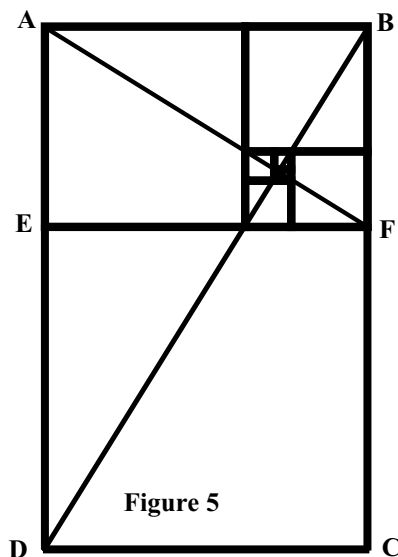


Figure 5

On rencontre un tel rectangle dans la proposition 11 du livre II des *Éléments* d'Euclide qui traite le problème suivant : placer un point C sur un segment [AB] de telle façon que $BC \times BA = CA^2$ qui se traduit sur la figure 6 ci-contre par l'égalité en aire du rectangle BCKD et du carré ACHG. Pour construire la figure, on part d'un carré ABDE. Si F est le milieu de [AE], soit G tel que $FG = FB$ et C tel que $AC = AG$, et l'on complète le rectangle DEGM. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que cette construction fournit bien un point C vérifiant la relation $BC \times BA = CA^2$. Celle-ci peut aussi s'écrire :

$$\frac{BC}{CA} = \frac{CA}{BA} = \frac{BC+CA}{CA+BA} = \frac{BA}{EG},$$

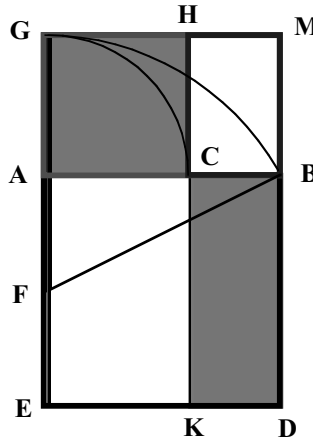


Figure 6

ce qui montre exactement la similitude (même forme) des rectangles BCHM, ABMG et DEGM. En fait on aura reconnu le « rectangle d'or ». Appelons R_2 un tel rectangle.

Peut-on réaliser un dallage Δ et un dallage δ du rectangle d'or R_2 ?

Dans une étape Δ_0 , le dallage comprendra un unique carré plus un rectangle de même forme que le rectangle initial. Donc l'étape Δ_1 fournira de nouveau un unique carré plus un rectangle de même forme que le rectangle initial, etc. Le processus de dallage ne peut aboutir, puisqu'il restera toujours un rectangle résiduel, sur lequel il faudra répéter le processus de dallage. Celui-ci se poursuivra à l'infini, et il n'est pas possible de réaliser un dallage Δ , et donc non plus, un dallage δ . Par contre chacune des étapes intermédiaires est réalisable et nous fournit une relation entre les côtés des carrés et des rectangles successifs, exactement comme dans le cas du rectangle R, et qui s'écrit ici, en utilisant les mêmes notations :

Étape 0 : $a = b \times 1 + a_1$; étape 1 : $b = a_1 \times 1 + a_2$;
étape 2 : $a_1 = a_2 \times 1 + a_3$; etc, à l'infini. Pour tout entier n , il existe un carré de côté a_n et deux rectangles de même forme dont les côtés a_{n-1} et a_{n+1} vérifient :
 $a_{n-1} = a_n \times 1 + a_{n+1}$ (figure 7).



Figure 7

Conséquence : Contrairement aux rectangles R et R_1 , il n'existe pas de carré « ultime » dont le côté serait une mesure commune aux deux côtés du rectangle R_2 . On dit que **ces côtés sont incommensurables**. Pourtant les étapes partielles successives nous donnent un développement du rapport de ces côtés en fraction continue, sous la forme $[1, 1, 1, 1, \dots]$, la seule nouveauté étant que cette fois-ci ce développement est infini, ce qui est traduit par les pointillés qui prolongent la succession des nombres 1. Nous conviendrons donc que ce développement définit encore un nombre, mais celui-ci sera qualifié de **nombre irrationnel**, par opposition aux cas précédents d'un rapport formé du quotient de deux entiers, dont le

développement est fini et qui sera qualifié de **nombre rationnel**. En toute rigueur il faudra montrer que, inversement, à la suite $[1, 1, 1, 1, \dots]$ correspond un rectangle, et que ce rectangle est identique au rectangle R_2 . Ceci ne sera possible qu'avec un outil numérique plus élaboré, et sera traité dans la partie III.

Un autre exemple rencontré quotidiennement dans la vie pratique nous est donné par un rectangle qui a pour côtés respectivement le côté d'un carré et sa diagonale (il s'agit en fait du format de la feuille de papier, par exemple le format A4). Désignons par R_3 un tel rectangle (figure 8). En restant sur une mesure empirique des côtés des carrés successifs (par exemple avec une règle graduée), j'arrive à la situation suivante :

$$a = b + r ; b = 2r + r_1 ; r = 2r_1 ;$$

et en remontant les indices :

$$b = 5r_1 ; a = 7r_1,$$

ce qui me donne le rapport :

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Je peux avoir un résultat plus précis en mesurant les côtés avec une bonne règle graduée ; je trouve alors en mm : $a = 297$ et $b = 210$, et le rapport :

$$\frac{a}{b} = \frac{297}{210} \approx 1,4142.$$

Par contre, si j'introduis dans la construction de mes différents carrés en même temps la considération du rapport des côtés du rectangle, je constate qu'à chaque étape (après la première) il y a « conservation de la forme du rectangle » et que le processus n'a aucune raison de s'arrêter.

En effet, si a, a_1, a_2, a_3, \dots et d, d_1, d_2, d_3, \dots désignent les côtés (respectivement les diagonales) des carrés successifs, et en tenant compte des relations :

$$d^2 = 2a^2 ; a_1 = d - a,$$

$$d_1 = a - a_1 = 2a - d,$$

$$d^2 = (a + a_1)^2 = a^2 + 2aa_1 + a_1^2,$$

$$d_1^2 = (a - a_1)^2 = a^2 - 2aa_1 + a_1^2,$$

$$d_1^2 + d^2 = 2a^2 + 2a_1^2,$$

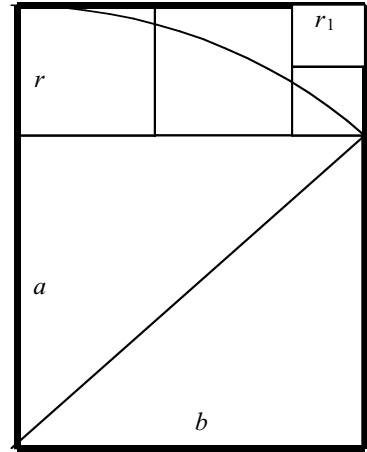


Figure 8

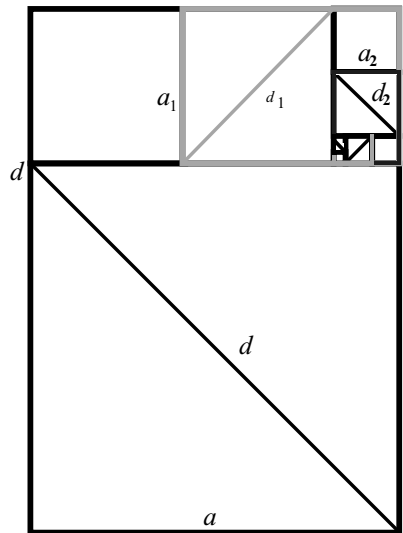


Figure 9

d'où :

$$d_1^2 = 2a_1^2,$$

etc.

On a les rapports :

$$\frac{2a}{d} = \frac{d}{a} = \frac{2a-d}{d-a} = \frac{d_1}{a_1} = \frac{2a_1-d_1}{d_1-a_1} = \frac{d_2}{a_2} = \frac{2a_2-d_2}{d_2-a_2} = \frac{d_3}{a_3} \text{ etc.}$$

Je pourrai inscrire indéfiniment des carrés certes de plus en plus petits, mais sans arriver jamais à épuiser par ces carrés le dernier rectangle restant. Il n'existe ni dallage Δ , ni dallage δ pour le rectangle R_3 . Mais le rapport des côtés peut être caractérisé par son développement en fraction continue infini $[1, 2, 2, 2, \dots]$.

Conclusion de l'étude de ces différents exemples :

- ou bien le processus de dallage du rectangle s'arrête au bout d'un nombre fini d'opérations. On pourra réaliser un dallage δ du rectangle au moyen de carrés tous de même dimension. Le côté commun de tous ces carrés est une mesure commune aux deux côtés du rectangle. On dit que ces deux côtés sont commensurables. Chaque côté du rectangle peut s'exprimer par un multiple p (respectivement q) de cette mesure commune, et le rapport des côtés est alors

le nombre rationnel $\frac{p}{q}$.

- ou bien ce processus ne s'arrête pas, il n'y a pas de dallage δ ; il n'y a pas de mesure commune et les deux côtés sont dites incommensurables ; le rapport des côtés ne peut pas s'exprimer au moyen d'une fraction, il est irrationnel. On peut cependant lui associer un développement en fraction continue infini, lequel définit un nombre irrationnel.

Ces définitions se retrouvent exactement dans Euclide, lorsque l'on remarque que l'utilisation des carrés permet de relier directement les deux côtés du rectangle, qui jouent le rôle des grandeurs inégales proposées dans son texte et qui visualisent ce que les Grecs appelaient *anthyphaîrèse*, ou soustraction réciproque :

Euclide X 2

Si, de deux grandeurs inégales {proposées} la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.

Euclide X 3

Étant données deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure.

Le parallélisme est flagrant entre ces deux propositions du livre X et les propositions 1 et 2 du livre VII concernant les nombres⁽²⁾ :

Euclide VII 1 :

Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais [le reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux.

(2) *Ibid.* Vol. 2, p. 290 et 291.

Euclide VII 2 :

Étant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver leur plus grande commune mesure.

C'est la raison pour laquelle la méthode proposée est appelée **algorithme d'Euclide**, à cette nuance près que celui-ci est appliqué ici aux grandeurs au lieu de l'être aux nombres.

Nous la présentons sous la forme modernisée suivante :

Soient G et g les deux grandeurs ; $G > g$.

$G = gq_1 + a_1$ avec q_1 nombre entier et a_1 grandeur, $a_1 < g$,
 $g = a_1q_2 + a_2$ avec q_2 nombre entier et a_2 grandeur, $a_2 < a_1$,

.....

$a_{n-2} = a_{n-1}q_n + a_n$ avec q_n nombre entier et $a_n < a_{n-1}$,

$G > g > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n$.

- ou bien il existe n tel que a_n soit nul (et a_{n-1} non nul) ; alors G et g sont commensurables et a_{n-1} est une commune mesure et $\frac{G}{g}$ est rationnel.
- ou bien un tel n n'existe pas et alors G et g sont incommensurables et $\frac{G}{g}$ est irrationnel.

Ce mot d'irrationnel traduit le grec *αλογον* (alogon) lequel signifie qu'on ne peut ni l'écrire ni le penser comme un rapport de nombres (entiers). Nous conviendrons dorénavant que quel que soit le rectangle, le rapport de ses côtés désignera un nombre et ce nombre est qualifié de rationnel lorsque les côtés sont commensurables, d'irrationnel lorsqu'ils sont incommensurables. Pratiquement, ce nombre mesure le côté a lorsque l'unité de mesure est b . Nous admettrons également que le fait de considérer un tel rapport comme un nombre à part entière permet de lui appliquer les règles de calcul ordinaire sur les nombres. Dans la première partie nous avons élargi le concept de nombre au moyen de la géométrie. Dans une seconde partie le calcul sur ces nouveaux nombres va nous permettre de mieux appréhender les propriétés de certains rectangles et préciser la nature de leurs dimensions.

II. Exploration numérique

Considérons un rectangle R dont les côtés soient commensurables et par conséquent dont les mesures peuvent s'exprimer par deux entiers a et b (avec $a > b$). Il existe alors pour R un dallage Δ et un dallage δ obtenus par une traduction géométrique de l'algorithme d'Euclide que nous pouvons écrire ainsi :

$a = b \times q_0 + a_1$; $b = a_1 \times q_1 + a_2$; $a_1 = a_2 \times q_2 + a_3$; ... ; $a_{n-2} = a_{n-1} \times q_{n-1} + a_n$;
 $a_{n-1} = a_n \times q_n$; ici tous les nombres $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n, q_0, q_1, \dots, q_n$ sont des entiers naturels **non nuls**, et l'on a les inégalités : $a > b > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > 0$.

Nous avons vu que la forme du rectangle est caractérisée par le rapport de ses côtés. Nous constatons que lorsque les côtés sont commensurables ce rapport est lui-même caractérisé par la suite des quotients q_0, q_1, \dots, q_n , alors que les restes successifs a_1, a_2, \dots, a_n ne sont que des intermédiaires de calcul. C'est pourquoi nous pouvons

écrire le rapport $\frac{a}{b}$ de deux autres manières sous la forme du développement en

fraction continue de $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} = [q_0, q_1, \dots, q_n] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n}}}}$$

Dans l'exemple de la feuille de papier de format A4 dont le rectangle R_3 est de dimensions approximatives 297×210 , le lecteur mettra facilement en évidence le

développement en fraction continue : $\frac{297}{210} = [1, 2, 2, 2, 2, 2]$.

La même caractérisation peut s'effectuer lorsque les côtés du rectangle sont incommensurables ou que le rapport $\frac{a}{b}$ est irrationnel, avec cependant deux différences majeures :

1. le processus de division est infini, ce qui amène à deux suites infinies, l'une formée par les quotients $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, l'autre par les restes $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$;
2. les restes successifs $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ne sont plus des entiers, mais des réels strictement positifs, qui vérifient néanmoins les inégalités :

$$a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > \dots > 0.$$

Exemple : dans le rectangle R_3 correspondant au format de la feuille de papier, le rapport des côtés est $\sqrt{2}$ dont le développement en fraction continue est $[1, 2, 2, 2, \dots]$. Dans le rectangle d'or R_2 , nous avons le développement très simple $[1, 1, 1, 1, \dots]$.

Question : le rectangle R_2 est pour l'instant uniquement défini par la propriété d'être constitué d'un carré complété par un rectangle de même forme. Par quel nombre le rapport des côtés de cette forme est-il caractérisé ? Désignons par a et b les côtés de ce rectangle. La propriété caractéristique de R_2 se traduit par les égalités : $a = b + r$

avec $\frac{a}{b} = \frac{b}{r}$.

Posons $x = \frac{a}{b} = \frac{b}{r}$. Alors $x = 1 + \frac{r}{b} = 1 + \frac{1}{x}$. Donc x est racine de l'équation

$x = 1 + \frac{1}{x}$ ou encore $x^2 - x - 1 = 0$, dont la racine positive est le nombre bien connu :

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ou nombre d'or. Donc nous pouvons écrire l'égalité $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots]$.

Seulement, dans la pratique, nous aurions besoin d'une expression finie sous forme de valeur approchée rationnelle de ce nombre irrationnel. Une telle valeur nous est fournie en nous arrêtant à une étape Δ_n et en négligeant le dernier rectangle résiduel mis en évidence dans cette dernière étape (ce dernier rectangle pouvant par exemple être confondu avec l'épaisseur du trait physique). Cela revient à dire que nous remplaçons le développement **infini** $[1, 1, 1, 1, \dots]$ par le développement **fini** $[1, 1, 1, \dots, 1]$ qui contient $n + 1$ chiffres tous égaux à 1, et qui par conséquent est le développement d'un nombre rationnel. Lequel ?

Appelons $r_n = \frac{P_n}{Q_n}$ (pour $0 \leq n$) la fraction obtenue par ce développement, donc pour $r_n = [1, 1, 1, \dots, 1]$ (avec $n + 1$ termes égaux à 1) ou $[1, 1, 1, \dots, 2]$ (avec $(n - 1)$ termes égaux à 1 et le n -ième égal à 2). Alors $r_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ avec les relations

$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$ et $Q_{n+1} = Q_n + Q_{n-1}$ (pour $1 \leq n$) et les conventions $P_0 = 1 ; P_1 = 2 ; Q_0 = 1$ et $Q_1 = 1$.

Finalement ici, $r_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ où F_n est le n -ième nombre de Fibonacci ($F_0 = 0 ; F_1 = 1 ;$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) ce qui donne comme suite des $r_n : 1 ; 2 ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{3} ; \frac{8}{5} ; \frac{13}{8} ; \frac{21}{13} ;$
etc.

Voici le rectangle 8×13 dont le rapport des côtés se décompose en :

$$\frac{13}{8} = [1, 1, 1, 1, 1, 1] = [1, 1, 1, 1, 2]$$

ou

$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

On a mis en superposition ce rectangle (en gris) avec le rectangle d'or (en noir) (figure 10).

Plus généralement : quels sont les rectangles pour lesquels le processus de réalisation d'un dallage Δ conduit à chaque étape à un nombre q de carrés tous identiques complétés par un rectangle toujours de même forme ? Ces rectangles seront caractérisés par les relations suivantes entre les côtés a et b ($a > b$) :

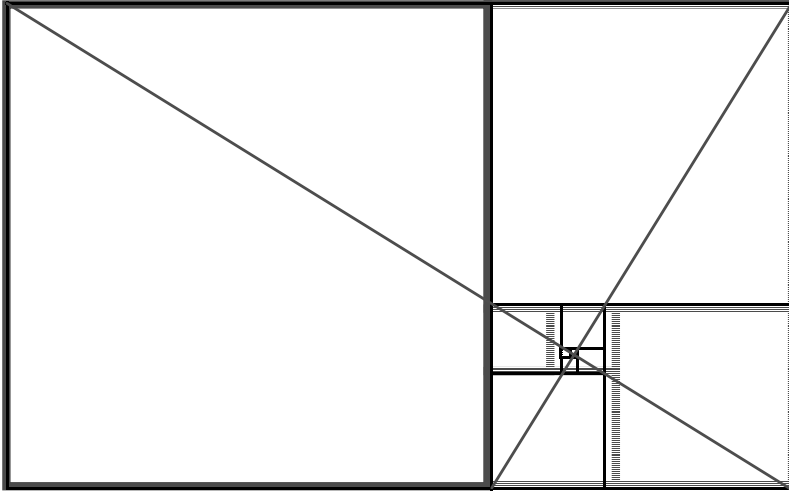


Figure 10

$a = bq + a_1$, avec $\frac{a}{b} = \frac{b}{a_1}$. Si l'on désigne par x ce rapport, x est racine de l'équation

$x = q + \frac{a_1}{b} = q + \frac{1}{x}$ (q entier naturel non nul) ou encore $x^2 - qx - 1 = 0$, dont la racine positive est : $\frac{1}{2} \left[q + \sqrt{q^2 + 4} \right]$ et dont le développement en fraction continue est

$[q, q, q, q, \dots]$. On y trouve en particulier tous les nombres de la forme $p + \sqrt{p^2 + 1}$, lorsque q est pair ($q = 2p$), tels que $1 + \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{5}$; $3 + \sqrt{10}$, etc.

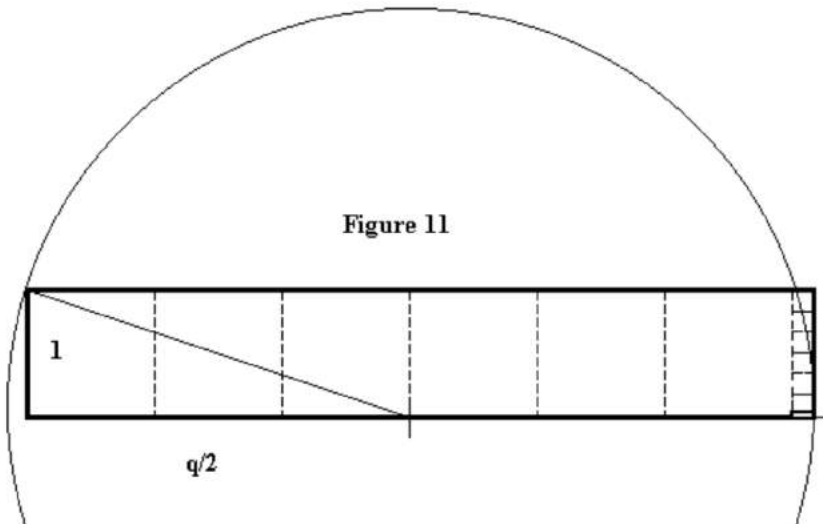


Figure 11

Un tel rectangle se construit facilement, à partir d'un triangle rectangle de côtés 1 et $q/2$ et d'un cercle de rayon l'hypoténuse de ce triangle, de la manière suivante (ici on a pris $q = 6$ qui donne $x = 3 + \sqrt{10} = [6, 6, 6, 6, 6, \dots]$) (figure 11). C'est simplement la généralisation de la construction du rectangle d'or utilisée par Euclide (voir figure 6).

Développement en fraction continue de $\sqrt{p^2 + 1}$ (p entier naturel non nul)

Du développement de $p + \sqrt{p^2 + 1} = [2p, 2p, 2p, \dots]$, on déduit directement celui de $\sqrt{p^2 + 1} = p + \frac{1}{p + \sqrt{p^2 + 1}} = [p, 2p, 2p, 2p, \dots]$. Ainsi nous retrouvons

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots] \text{ ou } \sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \dots].$$

Périodes à deux termes

Il peut arriver que ce retour d'un rectangle de même forme s'effectue seulement à la deuxième étape, lorsque $a = bq + a_1$ et $b = a_1r + a_2$, avec

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Alors $x = q + \frac{a_1}{b} = q + \frac{1}{r + \frac{1}{x}}$ (avec q et r entiers

naturels non nuls distincts ; si $q = r$, on retombe dans le cas précédent), ce qui donne x racine de l'équation $rx^2 - qrx - q = 0$, dont la racine positive est :

$$\frac{1}{2r} \left[qr + \sqrt{(qr+2)^2 - 4} \right] = [q, r, q, r, q, r, \dots]$$

(nous soulignerons dorénavant le groupe de termes qui se reproduit périodiquement).

Par exemple avec $q = 2$ et $r = 1$, nous avons

$r = 1 + \sqrt{3}$, correspondant au rectangle R_4 défini par les côtés perpendiculaires d'un demi triangle équilatéral, complété par un carré sur le plus petit côté. La période à deux termes de la fraction continue qui représente le rectangle se traduit (figure 12) par une série de rectangles homothétiques dont le rapport des côtés est de 1 à 2 (c'est la traduction du paramètre $q = 2$), accompagnée d'une série de carrés également homothétiques (traduction de $r = 1$).

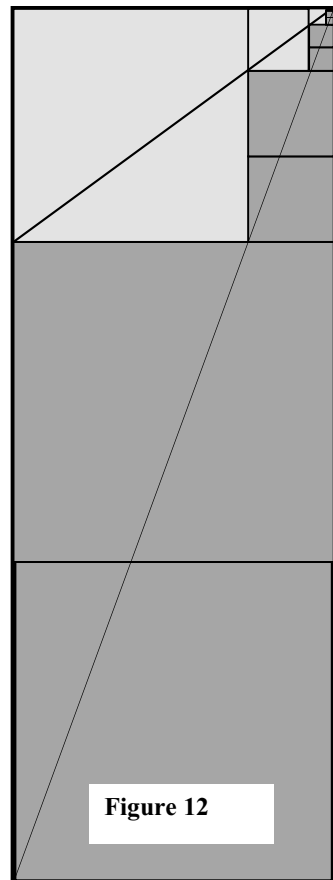


Figure 12

Remarque. Contrairement à ce que nous ferons dans la partie III, nous n'avons pas besoin, ici, d'imposer une orientation des rectangles. Donc

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Sur la figure 12, si nous estimons que les deux derniers tout petits rectangles gris foncé ne laissent plus de place à un rectangle gris clair, cela revient à approcher

$1 + \sqrt{3}$ par

$$1 + \sqrt{3} \approx 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} = \frac{112}{41}.$$

Remarque : le développement de $\sqrt{3}$ est immédiat : $\sqrt{3} = [1, \underline{1}, \underline{2}, 1, 2, 1, 2, \dots]$.

Exercice. Calculer le rapport entre la surface coloriée en gris foncé et la surface totale.

(Réponse : $\frac{3 + \sqrt{3}}{6} \approx 0,8$; on pourra s'aider de la partie III).

Périodes à trois termes

Le lecteur pourra démontrer qu'un retour périodique au bout de trois étapes se produit pour un rapport de la forme $x = [p, \underline{q}, \underline{r}, p, q, r, p, q, r, \dots]$, p, q, r entiers naturels non nuls dont deux au moins sont distincts, ce qui correspond à x racine positive de l'équation :

$$(qr + 1)x^2 - (pqr + p + r - q)x - (pq + 1) = 0,$$

soit

$$x = \frac{1}{2(qr + 1)} \left[pqr + p + r - q + \sqrt{(pqr + p + q + r)^2 + 4} \right].$$

Exemple : pour $p = 1$; $q = 2$; $r = 1$,

$$[\underline{1}, \underline{2}, \underline{1}, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots] = \frac{\sqrt{10} + 1}{3},$$

dont voici le rectangle associé, avec un dallage jusqu'à l'étape 8, c'est à dire correspondant à $[1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2]$. Nous le désignerons dans la suite par R_5 (figure 13) (comme pour les autres, on ne tient compte que du rapport des côtés).

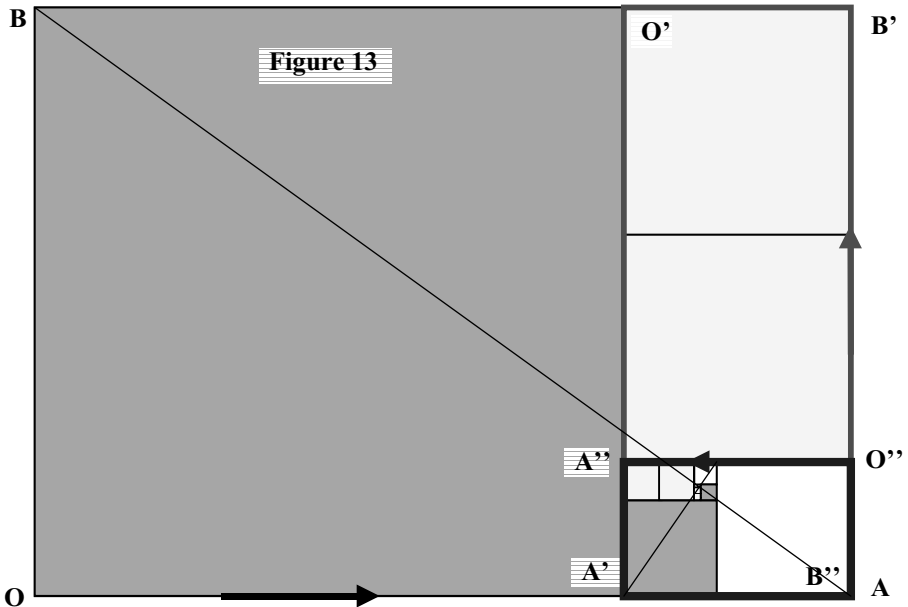


Figure 13

III. Traduction algébrique

Dans cette partie a et b ($a > b$) désignent les mesures des côtés d'un rectangle $R(a, b)$, de sorte que relativement à un repère orthonormal (\vec{i}, \vec{j}) les côtés du rectangle soient

portés respectivement par $a\vec{i}$ et $b\vec{j}$. Les relations $a = b \times q_0 + a_1$; $b = a_1 \times q_1 + a_2$; $a_1 = a_2 \times q_2 + a_3$; ... ; $a_{n-1} = a_n \times q_n + a_{n+1}$, etc. correspondant aux opérations $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$, (voir la première partie), font passer du rectangle $R(a, b)$ au rectangle $R(b, a_1)$ puis $R(a_1, a_2)$, etc. jusqu'à $R(a_{n-1}, a_n)$. Ces étapes peuvent se caractériser par les relations matricielles :

$$\Delta_0 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 : \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix}$$

.....

$$\Delta_{n-1} : \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les écritures, nous noterons, pour tout q entier relatif, $T(q)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z}) = \{T \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}) ; \det(T) = \pm 1\}.$$

Comme ce qui nous intéresse, c'est le réel $x = \frac{a}{b}$ caractéristique de la forme du

rectangle R plus que les valeurs séparées des côtés, les relations $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{a_1}{b}$;

$\frac{b}{a_1} = q_1 + \frac{a_2}{a_1}$; ... ; $\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}}$, peuvent aussi se décrire avec les matrices ci-dessus, en posant pour x non entier :

$$\partial x = \frac{1}{x - [x]} = x_1 \quad (1)$$

où $[x] = q_0$ désigne la partie entière de x , puis en itérant l'opération sur x_1 , avec $\partial x_1 = \partial^2 x = x_2$, et $[x_1] = q_1$ etc., $\partial x_{n-1} = \partial^n x = x_n$ et $[x_{n-1}] = q_{n-1}$; remarquons qu'on a toujours $\partial x > 1$.

Prenons l'exemple du rectangle R_5 avec $x = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots] = \frac{\sqrt{10}+1}{3}$.

On a $[x] = 1$; $\partial x = \frac{3}{\sqrt{10}-2} = \frac{\sqrt{10}+2}{2} = x_1$; $[x_1] = 2$; $\partial x_1 = \frac{\sqrt{10}+2}{3} = x_2$;

$[x_2] = 1$; $\partial x_2 = \frac{\sqrt{10}+1}{3} = x_3$, et nous sommes ainsi ramenés au point de départ, ce qui était prévisible compte tenu de la manière dont le rectangle R_5 avait été introduit dans la partie précédente.

En revenant au cas général, le groupe $GL(2, \mathbf{Z})$ opère à gauche sur l'ensemble des réels \mathbf{R} par :

$$G \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ si } G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z}).$$

La relation (1) peut donc aussi s'écrire :

$$x = [x] + \frac{1}{\partial x} = \frac{[x]\partial x + 1}{\partial x} = \begin{pmatrix} [x] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \partial x = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \partial x,$$

c'est-à-dire $x = T(q_0) \cdot (\partial x)$ ou encore $\partial x = T(q_0)^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \cdot x$.

Ces notations peuvent être commodes pour exprimer les différents x_k .

Exemple : pour $x = \frac{\sqrt{10}+1}{3}$,

$$x_3 = \partial^3 x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot x = \frac{-2x+3}{3x-4}.$$

Or $x = \frac{\sqrt{10}+1}{3}$, ce qui redonne bien la valeur $\frac{\sqrt{10}+1}{3}$.

Réduites

Posons (pour $0 \leq n$) $r_n = \frac{P_n}{Q_n} = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]$ la fraction réduite (ou simplement

réduite d'ordre n) du développement en fraction continue d'un réel x .

Avec les conventions $P_{-1} = 1$; $P_0 = q_0$; $Q_{-1} = 0$; $Q_0 = 1$, on démontre les relations de récurrence

$$\begin{cases} P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2} & \text{pour } n \geq 1 \\ Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} & \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

ainsi que

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \quad (3)$$

et

$$P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = (-1)^n \quad (4)$$

La relation (3) (comme la relation (4)) démontre que la fraction r_n est irréductible, d'après le théorème de Bézout.

Les relations (2) peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ P_{n-1} & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n-1} & Q_{n-1} \\ P_{n-2} & Q_{n-2} \end{pmatrix} = T(q_n) \cdot T(q_{n-1}) \cdot \dots \cdot T(q_0).$$

On retrouve pour le cas particulier du rectangle d'or :

$$\begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ P_{n-1} & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

Autre exemple : la réduite d'ordre $2n$ du réel $x = [q, r, q, r, \dots, q, r, \dots]$, où le couple (q, r) se retrouve n fois, est obtenue par la matrice

$$\begin{pmatrix} P_{2n} & Q_{2n} \\ P_{2n-1} & Q_{2n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} qr+1 & r \\ q & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Exercice : Calculer la réduite r_{30} pour $x = 1 + \sqrt{3} = [2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$.

(Réponse : $r_{30} = \frac{299\ 303\ 201}{109\ 552\ 575}$; voir le § IV où l'on trouvera d'autres calculs de réduites).

Convergence des réduites

La relation (4) peut aussi s'écrire :

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-2}} = r_n - r_{n-2}.$$

Comme les Q_i sont strictement positifs, on en déduit que la suite des réduites r_n de rang pair est croissante et celle des réduites de rang impair décroissante.

Par ailleurs la relation (3) peut s'écrire :

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}},$$

donc

$$|r_n - r_{n-1}| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

car la suite des Q_n est une suite d'entiers naturels strictement croissante. Les suites de réduites de rang impair (respectivement de rang pair) sont donc adjacentes et la suite des réduites est convergente vers un nombre réel. Cela démontre aussi qu'à un développement en fraction continue infini on peut associer un rectangle défini à une similitude près, et dont le rapport des côtés est défini par ce réel, limite de la suite des réduites.

Transformations géométriques associées

Quelles sont les transformations géométriques qui font passer du rectangle $R(a,b)$ au rectangle $R(b,a_1)$ et plus généralement au rectangle $R(a_{k-1},a_k)$? Prenons comme sens de parcours du contour des rectangles le sens trigonométrique et convenons de les remplir par des carrés en commençant par la gauche lorsque le rectangle à remplir est vu « au-dessus » de la dernière rangée de carrés contenue dans le rectangle précédent. Ainsi, dans l'exemple du rectangle R_5 on a marqué successivement (O,A,B) , (O',A',B') , (O'',A'',B'') (voir figure 13). Avec ces conventions les coordonnées respectives de ces points dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) sont dans le cas général : $O(0,0)$;

$A(a,0)$; $B(0,b)$; $O'(a - a_1,b)$; $A'(a - a_1,0)$; $B'(a,b)$; $O''(a,a_2)$; $A''(a - a_1,a_2)$; $B''(a,0)$; et l'on pourrait poursuivre avec des points $O'''(a - a_1 + a_3,0)$; $A'''(a - a_1 + a_3,a_2)$; $B'''(a - a_1,0)$; etc.

Alors, en utilisant le fait que le repère affine (O,A,B) est transformé en (O',A',B') et celui-ci en (O'',A'',B'') , puis en (O''',A''',B''') etc., les matrices correspondantes associées seront respectivement :

Pour la transformation de $R(a,b)$ en $R(b,a_1)$:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\partial x} \\ \frac{-1}{x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

en reprenant les notations définies plus haut.

Pour le passage de $R(b,a_1)$ en $R(a_1,a_2)$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\partial x} \\ \frac{-1}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

et celui de $R(a_1,a_2)$ en $R(a_2,a_3)$:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x_3 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'une manière générale on pourra montrer que pour tout entier naturel p ($p > 0$), le passage de $R(a_{2p-2}, a_{2p-1})$ en $R(a_{2p-1}, a_{2p})$ s'effectue avec

$$M_{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x_{2p-1} \\ x_{2p} & 0 \end{pmatrix}$$

et celui de $R(a_{2p-1}, a_{2p})$ en $R(a_{2p}, a_{2p+1})$ s'effectue avec

$$M_{2p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x_{2p+1} \\ x_{2p} & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on vérifiera les égalités :

$$M_{2p-1} \cdot M_{2p-2} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot M_0 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^p}{xx_1 \dots x_{2p-1}} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^p}{x_1 x_2 \dots x_{2p}} \end{pmatrix}$$

(nombre pair de transformations) et

$$M_{2p} \cdot M_{2p-1} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^p}{x_1 x_2 \dots x_{2p+1}} \\ \frac{(-1)^{p-1}}{xx_1 \dots x_{2p}} & 0 \end{pmatrix}$$

(nombre impair de transformations). La matrice M_0 est une matrice de similitude directe si et seulement si $x = x_1$, correspondant à un développement en fraction continue dont tous les termes sont égaux, tels ceux de l'exemple du rectangle d'or R_2 ou plus généralement les rectangles de rapport de côtés $x = [q, q, q, \dots]$ avec

$[x] = q = \frac{1}{2} \left[q + \sqrt{q^2 + 4} \right]$. La similitude est alors de rapport $\frac{1}{x} = x - [x]$ et d'angle

$-\frac{\pi}{2}$ (figure 5 et figure 11). On vérifiera que le centre de similitude se trouve à l'intersection de (AB) et de $(A'B')$.

Le produit

$$M_1 \cdot M_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{xx_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_1x_2} \end{pmatrix}$$

donne une matrice d'homothétie si et seulement si $x = x_2$, c'est à dire pour x avec un développement en fraction continue périodique à deux termes tel l'exemple du rectangle R_4 avec $x = 1 + \sqrt{3}$ (figure 12). Le rapport d'homothétie est en valeur absolue égal à $\frac{1}{xx_1} = 1 - \frac{[x]}{x}$. À cause du choix de l'orientation des rectangles, le rapport d'homothétie est négatif, ce qui n'est pas le cas dans la figure 12. Le produit

$$M_2 \cdot M_1 \cdot M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_1x_2x_3} \\ \frac{1}{xx_1x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de similitude directe si et seulement si $x = x_3$, correspondant à un développement en fraction continue périodique à trois termes, tels celui de l'exemple du rectangle R_5 avec $x = \frac{\sqrt{10}+1}{3}$ (figure 13). Chacun des groupes de carrés de même teinte s'enroule autour du centre de similitude commun situé à l'intersection de (AB) et de $(A''B''')$.

De façon générale le produit d'un nombre impair de matrices :

$$M_{2p} \cdot M_{2p-1} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot M_0$$

donne une matrice de similitude directe si et seulement si $x = x_{2p+1}$ et cette similitude est d'angle $(-1)^{2p+1} \frac{\pi}{2}$; et le produit d'un nombre pair :

$$M_{2p-1} \cdot M_{2p-2} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot M_0$$

est une homothétie si et seulement si $x = x_{2p}$. Cela ne peut se produire si les côtés du rectangle sont commensurables, car alors x est rationnel et son développement en fraction continue est fini.

Exercice. Montrer que la matrice de la transformation qui fait passer du rectangle R

au dernier petit rectangle contenant 3 petits carrés (voir figure 1) est $\begin{pmatrix} \frac{3}{89} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$.

Dans le cas où les côtés du rectangle sont incommensurables (donc lorsque x est irrationnel), la question se pose de savoir pour quels rapports de ces côtés une certaine étape d'ordre n du dallage amène un rectangle semblable au rectangle initial ? La réponse équivaut à dire qu'il existe un indice n et un irrationnel x ($x > 1$) pour lequel on a :

$$\partial^n x = x_n = x.$$

Or

$$\partial^n x = T(q_{n-1})^{-1} \cdot T(q_{n-2})^{-1} \cdot \dots \cdot T(q_1)^{-1} \cdot T(q_0)^{-1} \cdot x = G \cdot x$$

où G est une matrice du groupe $GL(2, \mathbf{Z})$ ce qui revient à dire que x est solution d'une équation de la forme :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x,$$

avec a, b, c, d entiers relatifs vérifiant $ad - bc = \pm 1$ ou encore :

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0.$$

C'est ce que l'on a pu vérifier pour $x = \frac{\sqrt{10}+1}{3}$ et $G = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ un peu plus haut.

En général on aura : ou bien $c = 0$; alors $a = d = \pm 1$; $b = 0$; $G = \pm I$ avec I matrice identité.

$G = I$ est impossible car pour $n > 0$ on aurait

$$T(q_1) \cdot T(q_2) \cdot \dots \cdot T(q_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix}$$

où les q_i sont des entiers strictement positifs et donc le produit du premier membre donne une matrice dont aucun terme n'est négatif. Si $n = 0$, on a $T(q_0) \neq I$. Un argument analogue exclut le cas $G = -I$. Enfin, on ne peut avoir $a = -d = \pm 1$ car alors

x serait rationnel ($= \pm \frac{b}{2}$).

Donc x est nécessairement un irrationnel de la forme $\frac{A \pm \sqrt{B}}{C}$ appelé irrationnel

quadratique. Réciproquement, tout irrationnel quadratique est-il le rapport des côtés d'un rectangle se reproduisant périodiquement ? La réponse est négative ; toutefois le développement en fraction continue d'un irrationnel quadratique est périodique après un certain nombre de termes correspondant à une partie non périodique. Ce que nous avons déjà pu constater pour les quelques exemples de développement de \sqrt{N} , dont la périodicité n'intervient qu'à partir du second terme.

Problème

Le rectangle R_6 a pour rapport des côtés le nombre irrationnel x dont le développement en fraction continue est périodique de période 4, égal à $[1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots]$.

1. Exprimer x comme réel quadratique racine d'une équation du second degré.
2. Décrire la transformation géométrique faisant passer du rectangle initial au premier rectangle semblable obtenu à l'étape 5 et en donner la matrice.
3. Donner les approximations rationnelles

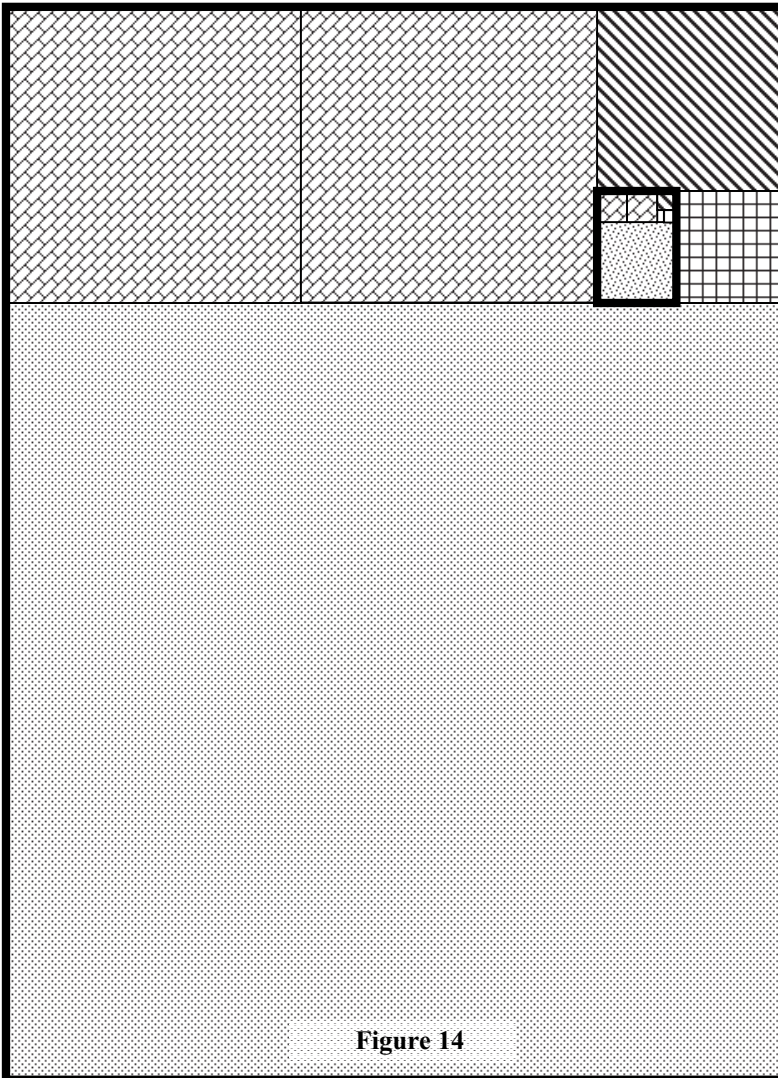
$$\underline{x} = [1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1]$$

et

$$\underline{x}' = [1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1].$$

Réponses (figure 14)

1. $x = \frac{2+2\sqrt{6}}{5} \approx 1,379\,795\,897$, racine de $5x^2 - 4x - 4 = 0$.
2. C'est une homothétie de rapport $5 - 2\sqrt{6} \approx 0,1$.
3. $\underline{x} = \frac{69}{50} = 1,38$; $\underline{x}' = \frac{683}{495} \approx 1,379\,797\,780$.



IV. Applications

Approximations rationnelles d'un nombre rationnel

Dans le cas où le réel x est rationnel, son développement en fraction continue est fini égal à la réduite d'ordre n : $x = [q_0, q_1, \dots, q_n]$, alors que la réduite d'ordre k donne

une approximation de x sous la forme d'une fraction irréductible $r_k = \frac{P_k}{Q_k}$ avec un

dénominateur strictement inférieur à celui de x . On a :

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{a_1}{b} > q_0 ; \quad \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{a_2}{a_1}} < q_0 + \frac{1}{q_1} ;$$

de façon générale les développements d'ordre impairs donnent une valeur approchée par excès, et les développements d'ordre pair une valeur approchée par défaut de

$\frac{a}{b}$, selon les inégalités suivantes :

$$[q_0] < [q_0, q_1, q_2] < \dots [q_0, q_1, \dots, q_{2r}] < \frac{a}{b} < [q_0, q_1, \dots, q_{2r-1}] < \dots < [q_0, q_1].$$

Cela peut être utile pour des fractions dont le dénominateur est trop grand pour être utilisable dans des situations pratiques, ce qui s'est souvent présenté dans des questions d'astronomie ou de calendrier. Donnons-en un seul exemple, celui de l'horloge astronomique de Strasbourg.

L'horloge astronomique de Strasbourg

Tous les Strasbourgeois connaissent « leur » horloge astronomique. Ils ne se doutent peut-être pas des trésors d'ingéniosité utilisés par ses constructeurs, dont certains relèvent précisément de mathématiques en relation avec les fractions continues.

Une première version, appelée « horloge des Trois Rois » avait précédé l'horloge construite au XVI^e siècle sous l'impulsion du mathématicien Dasypodius et avec le concours des horlogers Isaac et Josias Habrecht, le peintre Tobias Stimmer et le maître d'œuvre Hans Uhlberger. Cette horloge réalisait une véritable synthèse des connaissances astronomiques et mécaniques de la Renaissance, mais elle s'arrêta de fonctionner vers la fin du XVIII^e siècle. Elle fut heureusement remarquablement restaurée en 1838 par le prestigieux horloger Jean Baptiste Schwilgué.

Autodidacte, Schwilgué devint professeur de mathématiques, vérificateur des Poids et Mesures, et surtout un génial mécanicien. Il conçut des mécanismes de haute précision, entièrement nouveaux, avec un nombre impressionnant d'engrenages au profil cycloïdal parfaitement calculé. Ce n'est pas le lieu, ici, d'en donner une description détaillée⁽³⁾.

Évoquons seulement le Planétaire, dont le cadran reproduit le mouvement des six premières planètes autour du Soleil : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne,

(3) On trouvera celle-ci dans le livre de Roger Lehni, *L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg*, Éditions La Goélette, 1997. Voir aussi le site <<http://juillot.home.cern.ch/juillot/horloge.html>>

auxquelles on ajoute la Lune tournant autour de la Terre. Les six planètes décrivent des cercles autour du Soleil placé au centre, cercles dont les rayons sont proportionnels aux distances moyennes relativement au Soleil. Uranus n'a pu être admise sur le Planétaire à cause de son trop grand éloignement. Neptune n'a été découverte qu'en 1846 par Leverrier. Chaque planète est représentée par une boule dorée au feu, de diamètre proportionnel à sa grandeur apparente et fixée à la pointe d'une aiguille très effilée, peinte en bleu foncé de manière à être aussi imperceptible que possible. Les six planètes sont équilibrées et montées sur des tubes concentriques, séparés entre eux par des bagues en acier ; chacun de ces tubes porte à son extrémité intérieure une roue dentée qui communique le mouvement de révolution à la planète respective.

La Terre est montée sur un grand disque qui décrit un tour complet autour du Soleil en une année tropique, que Schwilgué prend égale à :

$$365 \text{ jours, } 5 \text{ h, } 48 \text{ min, } 48 \text{ s} = 31\,556\,928 \text{ s.}$$

Ce disque est entraîné par un arbre moteur qui fait un tour en une heure de 3 600 secondes. Il y a de ce fait un système de trois engrenages réducteurs dont les rapports sont donnés par :

$$\frac{3\,600}{31\,556\,928} = \frac{9}{156} \times \frac{10}{188} \times \frac{10}{269}.$$

Pour réaliser le mouvement des autres planètes, Schwilgué emploie pour chacune deux engrenages dont les rapports sont calculés au plus juste en utilisant des approximations déterminées au moyen de fractions continues, approximations données par le tableau suivant où le numérateur représente le nombre de secondes d'une année tropique et le dénominateur le nombre de secondes pour la révolution de la planète considérée :

Planète	Durée de révolution à réaliser	Rapport à réaliser	Rapports choisis pour les engrenages	Durée de la révolution obtenue
Mercure	87 j 23 h 14 min 35 s	$\frac{31\,556\,928}{7\,600\,475}$	$\frac{3\,060}{737} = \frac{240}{44} \times \frac{102}{134}$	87 j 23 h 14 min 35,79 s
Vénus	224 j 16 h 41 min 25 s	$\frac{31\,556\,928}{19\,413\,685}$	$\frac{6\,107}{3\,757} = \frac{197}{17} \times \frac{31}{221}$	224 j 16 h 41 min 25,68 s
Mars	686 j 22 h 18 min 44 s	$\frac{31\,556\,928}{59\,350\,724}$	$\frac{10\,759}{20\,235} = \frac{203}{95} \times \frac{53}{213}$	686 j 22 h 18 min 43,87 s
Jupiter	4 330 j 14 h 14 min 10 s	$\frac{31\,556\,928}{374\,163\,250}$	$\frac{384}{4\,553} = \frac{96}{157} \times \frac{32}{232}$	4 330 j 14 h 14 min 23,5 s
Saturne	10 746 j 22 h 30 min 10 s	$\frac{31\,556\,928}{928\,535\,410}$	$\frac{290}{8\,553} = \frac{58}{161} \times \frac{20}{212}$	10 746 j 22 h 30 min 2,15 s

Traitons le cas de Mercure à titre d'exemple.

$$\begin{array}{ll}
 31\,556\,928 = 7\,600\,475 \times 4 + 1\,155\,028 & 30\,525 = 10\,987 \times 2 + 8\,551 \\
 7\,600\,475 = 1\,155\,028 \times 6 + 670\,307 & 10\,987 = 8\,551 \times 1 + 2\,436 \\
 1\,155\,028 = 670\,307 \times 1 + 484\,721 & 8\,551 = 2\,436 \times 3 + 1\,243 \\
 670\,307 = 484\,721 \times 1 + 185\,586 & 2\,436 = 1\,243 \times 1 + 1\,193 \\
 484\,721 = 185\,586 \times 2 + 113\,549 & 1\,243 = 1\,193 \times 1 + 50 \\
 185\,586 = 113\,549 \times 1 + 72\,037 & 1\,193 = 50 \times 23 + 43 \\
 113\,549 = 72\,037 \times 1 + 41\,512 & 50 = 43 \times 1 + 7 \\
 72\,037 = 41\,512 \times 1 + 30\,525 & 43 = 7 \times 6 + 1 \\
 41\,512 = 30\,525 \times 1 + 10\,987 & 7 = 1 \times 7 + 0
 \end{array}$$

La fraction $\frac{31\,556\,928}{7\,600\,475}$ est donc égale à son développement en fraction continue fini :

$$[4, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 23, 1, 6, 7].$$

L'utilisation d'un tableur peut énormément faciliter les calculs⁽⁴⁾. Détaillons le remplissage d'une feuille de calcul. Il est conseillé de remplir la première ligne (la ligne 1 de la feuille de calcul) par des indications : « dividende », « diviseur », « quotient entier », « reste ».

Les données, 31 556 928 et 7 600 475 dans notre exemple, sont introduites dans les cellules A2 et B2. Ensuite, on a introduit les formules dans chaque cellule exactement comme c'est indiqué. On remarquera ici que la seule fonction à utiliser, en plus des opérations arithmétiques, est la fonction « partie entière » notée ENT. Ainsi dans la cellule C2, on a demandé de prendre la partie entière du rapport des nombres qui sont en A2 (c'est-à-dire 31 556 928 dans notre exemple) et B2 (7 600 475 dans notre exemple). Lorsqu'une formule (débutant par le signe d'égalité) a été introduite dans une cellule, la valeur numérique s'affiche : on verra ici apparaître 4 dans la cellule C2. On introduira donc les données suivantes :

	A	B	C	D
1	dividende	diviseur	quotient entier	reste
2	31 556 928	7 600 475	=ENT(A2/B2)	=A2-B2*C2
3	=B2	=D2		

Sur la ligne 3 de la feuille de calcul, on entame l'algorithme d'Euclide en prenant comme nouveau dividende l'ancien diviseur et comme nouveau diviseur l'ancien reste. On pourrait continuer de même en introduisant les formules successives, cellule après cellule. Mais une feuille de calcul dispose d'un outil quasiment magique, le « copier – coller », qui évite toute nouvelle introduction dans une cellule d'une formule déjà utilisée dans une autre cellule.

Voici précisément comment s'effectue un « copier-coller », celui de la cellule C2 vers C3 : quand on copie la formule de la cellule C2, qui est « =ENT(A2/B2) », la formule ensuite collée en C3 est automatiquement décalée d'une ligne, pour devenir « =ENT(A3/B3) ». La valeur calculée en C3 est donc le quotient entier de A3 par B3.

(4) Sur une suggestion de F. Pluvinaige ; voir Ressources pour l'enseignement mathématique en série littéraire, IREM de Strasbourg.

De même copier-coller D2 vers D3 fournira le reste de la division euclidienne de A3 par B3. Il n'y aura alors plus qu'à copier la ligne 3 au complet pour la coller dans la ligne 4. Puis on recommence, jusqu'à obtenir un reste égal à 0. Voici l'ensemble des résultats obtenus ainsi de façon tout à fait automatique :

dividende	diviseur	quotient entier	reste
31556928	7600475	4	1155028
7600475	1155028	6	670307
...
43	7	6	1
7	1	7	0

Avec ces quotients partiels nous pouvons maintenant obtenir la fraction réduite

$\frac{3\ 060}{737}$ qui a servi à Schwilgué pour ses engrenages relatifs à Mercure en multipliant

(à gauche) les matrices T(4), T(6), T(1), etc., jusqu'à arriver aux nombres 3 060 et 737. En fait il faut aller jusqu'au 11^e quotient, c'est-à-dire effectuer le produit

$$T(1) \cdot T(2) \cdot T(1) \cdot T(1) \cdot T(1) \cdot T(1) \cdot T(2) \cdot T(1) \cdot T(1) \cdot T(6) \cdot T(4) = \begin{pmatrix} 3\ 060 & 737 \\ 2\ 213 & 533 \end{pmatrix}$$

Mais l'on peut, plus simplement, utiliser le tableur évoqué ci-dessus et automatiser les calculs de la façon suivante en utilisant l'opérateur ∂ de la partie 3 :

	A	B	C	D
1	Introduire le nombre	Termes	Numérateur	Dénominateur
2	en A3	successifs	0	1
3	= 31 556 928 / 7 600 475	=ENT(A3)	1	0
4	=1/(A3-ENT(A3))	=ENT(A4)	=B3*C3+C2	=B3*D3+D2

Ce qui donne le tableau (attention, il y a un décalage d'indice : on commence avec

$\frac{P_0}{Q_0}$ qui est à la ligne 3) :

N° ligne :

	Introduire le nombre	Termes	numérateur	dénominateur
2	en A3	successifs	0	1
3	4,15196787	4	1	0
4	6,580338312	6	4	1
5	1,723132833	1	25	6
...
13	1,284878962	1	2213	533
14	3,510262724	3	3060	737
15	1,959774744	1	11393	2744
...
20	6,992290312	6	4417453	1063942
21	1,007769589	1	27139475	6536533
22	128,7069432	128	31556928	7600475

Nous obtenons ainsi de proche en proche toutes les réduites par un simple copier-coller, en particulier celle utilisée par Schwilgué à la ligne 14. Le nombre introduit sur notre exemple : $\frac{31\,556\,928}{7\,600\,475}$, apparaît dans le tableau en écriture décimale

approchée. Il a ici huit chiffres après la virgule, mais le tableur utilisé, en l'occurrence Excel, permet le choix du nombre de décimales.

On aura remarqué que, dans le dernier tableau, il s'est rajouté les quotients 6, 1 et 128, là où en réalité il y a le seul dernier quotient 7. Cela est dû aux approximations qu'induit l'utilisation de la valeur décimale approchée du nombre introduit en A3. Le tableur, s'il est efficace et commode, n'est pas sûr et il faudra toujours utiliser ses résultats de manière très critique. Cela sera d'autant plus vrai pour les approximations rationnelles de nombres irrationnels.

Exercice : justifier la validité des autres rapports choisis par Schwilgué pour les engrenages réalisant le mouvement des planètes autres que Mercure.

Approximations rationnelles d'un nombre irrationnel

Nous avons vu que si le rapport des côtés d'un rectangle est irrationnel les étapes du processus de dallage se poursuivent indéfiniment. Il n'y a pas de dallage possible mais les étapes successives fournissent une valeur approchée rationnelle du rapport irrationnel, au moyen de réduites définies par les mêmes relations de récurrence (2).

Reprenons l'exemple du rectangle R_4 avec le nombre irrationnel : $1 + \sqrt{3}$,

1	2,732050808	2	3	1
2	1,366025404	1	8	3
3	2,732050808	2	11	4
4	1,366025404	1	30	11
5	2,732050808	2	41	15
6	1,366025404	1	112	41
...
11	2,732050807	2	2131	780
12	1,366025405	1	5822	2131
13	2,732050797	2	7953	2911
...
27	1,928959377	1	80198051	29354524
28	1,076473337	1	138907099	50843527
29	13,07645312	13	219105150	80198051
30	13,07991143	13	2987274049	1093418190
31	12,51385432	12	3,9054E+10	14294634521

Nous retrouvons à la ligne 6 l'approximation trouvée plus haut, à savoir $\frac{112}{41}$ mais

on constate là aussi, à partir de la ligne 27, un dérapage du quotient vers des valeurs chaotiques, alors qu'elles devraient être régulières, dans une succession périodique de 2 et 1 ; les valeurs de la réduite correspondante s'en trouvent affectées aussi peu à peu, avec une certaine inertie, comme il y a une certaine inertie dans l'effet de la valeur de $1 + \sqrt{3}$, qui s'altère légèrement dès la 11^e ligne, pour s'amplifier progressivement et devenir tout à fait désordonnée. Si l'on effectue le calcul exactement avec le produit de matrices $[T(1) \cdot T(2)]^n$ la divergence avec les valeurs du tableau apparaissent à partir de $n = 15$. On a en effet

$$[T(1) \cdot T(2)]^{15} = \begin{pmatrix} 299\,303\,201 & 109\,552\,575 \\ 219\,105\,150 & 80\,198\,051 \end{pmatrix}$$

qui donne les réduites $\frac{299\,303\,201}{109\,552\,575}$ et $\frac{219\,105\,150}{80\,198\,051}$ alors que le tableur donne pour

la première : $\frac{2\,987\,274\,049}{1\,093\,418\,190}$.

Bibliographie.

Bénard Dominique, *Nombres et calculs au Collège, instituer une cohérence*, Repères IREM, avril 2000, n° 47, p. 5 – 16.

Friedelmeyer J.-P., De Cointet M., Fritsch C., Pluinage F. et Rousset-Bert S., *Ressources pour l'enseignement mathématique en série littéraire*, publication de l'IREM de Strasbourg, mars 2003.

Pluinage François, *En mettant des segments bout à bout*, Bulletin APMEP n° 446, p. 328-336.

Kern Eric, *Résolution de l'équation diophantienne du second degré*, L'OUVERT, n° 89-90-91, décembre 1997, mars et juin 1998, Journal de l'APMEP d'Alsace, IREM de Strasbourg.

Brezinski Claude, *History of continued fractions and Padé Approximants*, Springer Verlag 1991.

Trignan Jean, *Fractions continues*, Éditions du choix, 1994.

Lang Serge, *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1966.

Lehni Roger, *L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg*, Éditions La Goélette, 1997.

Hardy G.H. and Wright E.M., *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press – Oxford, 1938 ; cinquième édition, 1979.

Perron Oskar, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Stuttgart, Teubner ; troisième édition, 1954.

Stark Harold M., *An introduction to number theory*, MIT Press, 1978.