

La liaison mathématiques-physique en classe de terminale S : trois exemples d'activités autour des équations différentielles

Rémy Coste^(*), Nicole Pithon & Jean Winther^(**)

À la suite des articles parus dans le numéro 450 du bulletin sur le thème des équations différentielles en terminale S, voici trois exemples d'activités que l'on peut proposer en classe de TS, dans lesquelles la physique et les mathématiques sont constitutives d'une même connaissance scientifique, et dans lesquelles apparaissent les notions de modèles physique et mathématique.

Dans les trois exemples, il s'agit d'un phénomène temporel (thème transversal du programme de physique de TS), pour lequel on se pose la question :

Comment évolue la grandeur physique étudiée en fonction du temps ?

La démarche scientifique se décrit en quatre temps :

- expérience permettant l'acquisition de données expérimentales ;
- recherche d'un modèle physique sous forme d'hypothèses sur les actions en jeu expliquant le déroulement du phénomène, et mise en équation ;
- recherche d'un modèle mathématique sous forme de solutions des équations permettant d'obtenir des valeurs théoriques ;
- confrontation des valeurs théoriques aux données expérimentales.

C'est cette confrontation qui permet ou non de valider le modèle physique. Précisons qu'il ne s'agit pas de s'attaquer de façon approfondie à la question des critères de validation d'un modèle, mais de faire comprendre la démarche scientifique mise en œuvre, et de montrer comment la physique et les mathématiques apportent leur contribution dans cette démarche. D'ailleurs, le plus souvent, on est amené à comparer des modèles et à conclure qu'un modèle est meilleur qu'un autre dans la mesure où les résultats qu'il prédit sont plus conformes à ce que l'on observe, ou qu'il reste pertinent sur une durée plus importante de l'expérience, ou encore qu'il le reste dans un champ de valeurs des paramètres plus large.

Dans cet article, nous donnons trois exemples d'activités :

- la décharge d'un condensateur où l'on met en œuvre la démarche évoquée ;
- la chute libre d'un solide dans l'air où l'on est amené à comparer deux modèles ;
- la désintégration de noyaux radioactifs où l'on vérifie expérimentalement la cohérence entre l'hypothèse d'un phénomène microscopique aléatoire et un comportement macroscopique déterministe.

(*) Professeur de mathématiques.

(**) Professeurs de physique et chimie.

Exemple 1 : la décharge d'un condensateur

1- Expérience

On effectue la charge d'un condensateur à travers un conducteur ohmique à l'aide d'un générateur (schéma 1), puis on enlève le générateur, on ferme le circuit, et on fait des mesures pendant que le condensateur se décharge (schéma 2). Plutôt que la **quantité de charge** q du condensateur (qui n'est pas accessible à la mesure facilement), on recueille en réalité la **tension** u aux bornes du condensateur en fonction du temps. La relation $q = Cu$ permet de connaître q connaissant u (C est une constante). On peut le faire soit manuellement avec un chronomètre (en prenant les constantes R et C de telle sorte que le phénomène soit suffisamment lent), soit en utilisant une interface d'acquisition reliée à un micro-ordinateur ou une calculatrice.

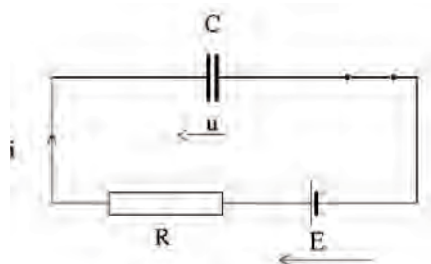


schéma 1

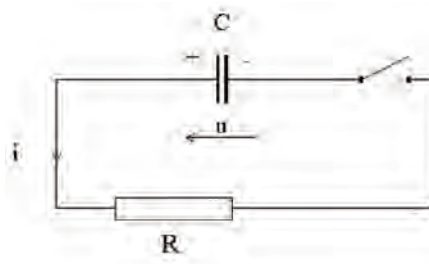
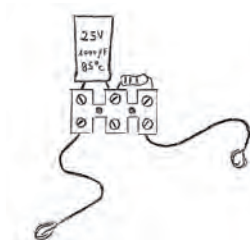


schéma 2

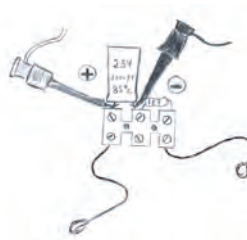
Exemple de réalisation simple de l'expérience :

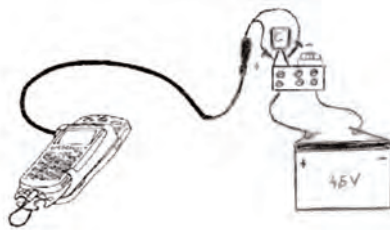
Matériel utilisé

- un condensateur ($C = 1\,000\mu\text{F}$) et un conducteur ohmique ($R = 5,6\text{ k}\Omega$) montés en série sur un domino électrique ; pendant la phase de charge, une pile classique ($E = 4,5\text{V}$) ;
- une calculatrice graphique (ici une TI 83) et une interface d'acquisition compatible (ici le CBL 2 avec un capteur de tension) ; une application chargée dans la calculatrice permet de piloter l'interface et de régler les paramètres

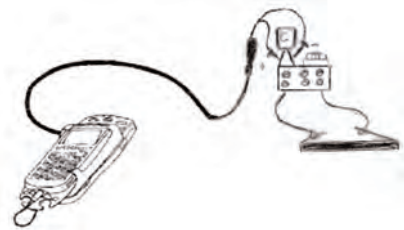


Montage

Branchement du capteur de tension
aux bornes du condensateur



Phase 1 : Charge du condensateur



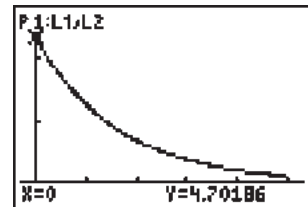
Phase 2 : décharge du condensateur et acquisition des données expérimentales

Les résultats ci-dessous ont été obtenus en mesurant la tension tous les 1/10^e de seconde, pendant 18 s, soit 180 valeurs acquises.

L1	L2	L3	1
0	4.7019	---	
.1	4.6432		
.2	4.5456		
.3	4.4673		
.4	4.3891		
.5	4.3109		
.6	4.2522		

L1(1) = 0

Valeurs acquises



Représentation graphique

On notera que la tension initiale mesurée est de 4,7 V, et non 4,5 V comme indiqué sur la pile.

Première constatation : la décharge du condensateur **n'est pas instantanée**.

Deuxième constatation : au fur et à mesure que le condensateur se décharge, il se décharge de **moins en moins vite**. Autrement dit, la « vitesse de décharge », c'est-à-dire l'intensité du courant dans le circuit, diminue. L'expérience seule ne nous dit rien d'autre. **Le physicien a en charge de proposer un modèle** qui permettrait une description plus approfondie du phénomène étudié.

2- Recherche d'un modèle physique et mise en équation

Lors de la décharge du condensateur : i (intensité), u (tension) et q (charge), diminuent avec le temps t . Ces trois grandeurs sont liées par les relations :

- $q = C u$ (C = capacité du condensateur = constante) ;
- si i est constante, $i = \left| \frac{q}{t} \right|$;
- $u = R i$ (R = résistance = constante).

Au départ : $t = 0$, $q = Q_0$, $u = U_0$, et donc $Q_0 = C U_0$.

Au bout d'une certaine durée t après la fermeture de l'interrupteur :

- q est la charge à l'instant t qui reste dans le condensateur ;
- u est la tension à l'instant t , avec $q = C u$.

Entre les instants t et $t + dt$ (dt très petite durée) :

- il sort du condensateur une charge dq ;
- dt est tellement petit que i est supposée constante, donc :

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Le signe « moins » s'explique par la décroissance de q .

En utilisant $i = \frac{u}{R}$ et $u = \frac{q}{C}$, on obtient :

$$i = \frac{q}{RC} \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on arrive à :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

C'est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $y = q(t)$ et $a = -\frac{1}{RC}$.

Remarques :

- Les lois physiques préalablement établies et ici réinvesties, le raisonnement appliqué (incluant l'approximation i constant pendant la durée dt), enfin le fait que l'on considère qu'il n'y a pas d'autres causes dont il faudrait tenir compte pour modéliser la situation, constituent les hypothèses qui permettent d'établir le modèle.
- L'approximation évoquée ici n'est en fait qu'une formulation de l'approximation affine en une valeur d'une fonction, étudiée dans le cours de mathématiques lors de la dérivation, soit pour construire la notion, soit pour l'appliquer. D'ailleurs, on pourrait proposer une présentation du raisonnement plus proche de celle que l'on utiliserait dans le cours de mathématiques, une fois la dérivée disponible :

On a trois fonctions de t :

$$(1) q(t) = C u(t) \quad (2) u(t) = R i(t) \quad (3) i(t) = -q'(t).$$

$$(1) \text{ nous donne } u(t) = \frac{q(t)}{RC}.$$

$$\text{En remplaçant dans (2), on obtient } \frac{q(t)}{C} = R i(t) \text{ ou bien } i(t) = \frac{q(t)}{RC}.$$

En remplaçant dans (3), on arrive à :

$$q'(t) = -\frac{q(t)}{RC}.$$

- Cette dernière équation différentielle nous montre ce qu'implique ce modèle : **La vitesse avec laquelle le condensateur se décharge est proportionnelle à la charge restante dans le condensateur, et ne dépend que de la charge du condensateur.**

3- Recherche de solutions de l'équation différentielle

Le mathématicien a maintenant à prendre en charge la recherche de solutions à cette équation : existe-t-il des solutions analytiques ? peut-on en définir ? y a-t-il unicité dans le cas de conditions initiales fixées ? peut-on déterminer des solutions approchées par des méthodes numériques ? C'est ce que l'on va faire dans le cours de mathématiques de terminale S.

Pour ce qui est de la méthode de résolution numérique, il s'agit de la méthode d'Euler (voir l'article qui lui est consacré dans le numéro précédent du bulletin). Pour ce qui est de la recherche d'une solution analytique, on démontre que la solution existe et s'écrit :

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

4- Validation du modèle

Les données acquises sont celles de la tension et non celles de la charge. Mais, comme il n'y a qu'un facteur C constant entre les deux, en remplaçant q par u,

l'équation différentielle est inchangée : $u'(t) = -\frac{u(t)}{RC}$.

Avec les valeurs choisies de R et C on a $RC = 5,6$. La valeur initiale de u est $U_0 = 4,7$ V.

Solution par la méthode d'Euler : on a utilisé ici le programme EULER2 donné et commenté dans l'article du Bulletin vert n° 450 cité en introduction. Comme le programme utilise les listes L1 et L2, là où sont mémorisées les données expérimentales, il faut d'abord les sauvegarder dans les listes L3 et L4 pour ne pas les perdre à l'exécution du programme.

```
L1→L3
{0 .1 .2 .3 .4 ...
L2→L4
{4.7 4.61607142...
PrgmEULER2
```

```
Y'=A*Y+B
A=?-1/5.6
B=?0
X INIT :0
Y INIT :4.7
X MAX :18
PAS :0.1
```

Le nuage de points (avec un pas de 0,1 il y en a 180) est le graphique de gauche (voir ci-dessous).

Solution formelle : on saisit la fonction $u(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ dans l'éditeur de courbes, avec $U_0 = 4,7$ V et $RC = 5,6$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 B4.7e^(-1/5.6
X)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=18
Xscl=0
Ymin=-.6
Ymax=5.5
Yscl=0
Xres=1
```

La courbe obtenue est le graphique de droite (voir ci-dessous).

Les résultats théoriques confrontés aux données expérimentales :

Résolution de l'équation différentielle

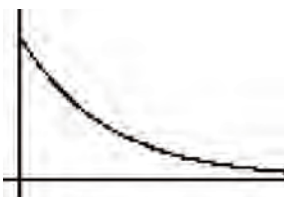
Données expérimentales



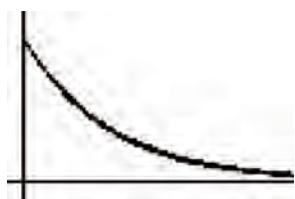
Méthode d'Euler



Solution formelle



En superposant :



Données expérimentales
+ Euler

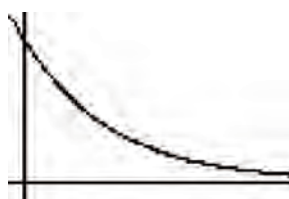


Données expérimentales
+ Solution formelle

Remarque : Une fois le modèle validé, c'est-à-dire une fois que l'on admet qu'une fonction de la forme $t \rightarrow A e^{\lambda t}$ modélise correctement le phénomène, on peut retrouver la valeur des constantes A et λ en faisant une **régression exponentielle** du nuage de points expérimentaux :

```

ExpReg L3, L4, Y2  -1/5,6
                  -.1785714286
ExpReg
y=a*b^x
a=4.604651975
b=.8461280269
  
```



Données expérimentales
+ régression exponentielle

On obtient $U_0 \approx 4,6$ V et $\lambda \approx -0,167$ (au lieu de $-1/5,6 \approx -0,178$).

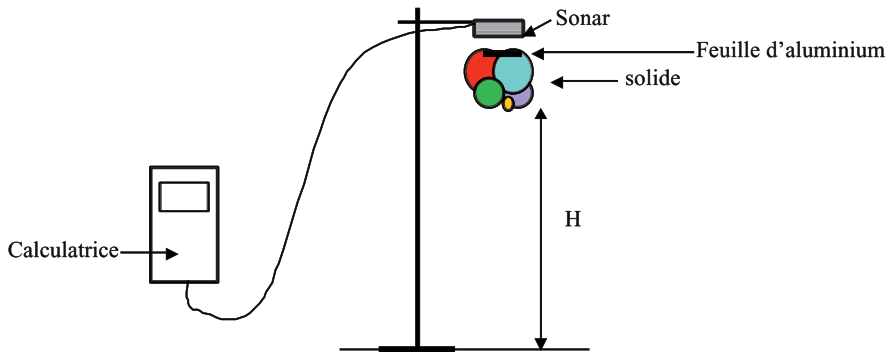
Exemple 2 : La chute d'un solide dans l'air

1- Expérience

L'interface reliée à la calculatrice est un sonar (CBR), fixé à une potence ; elle permet de mesurer et d'enregistrer la distance qui le sépare du solide au cours de sa chute. Entre deux valeurs obtenues, elle permet également de calculer la vitesse du solide. Le solide est un « œuf Kinder » lesté par des petits cailloux. Il est fixé sous quatre ballons de baudruche ronds. Deux des ballons sont plus gonflés (donc plus gros) et

placés au-dessus des deux autres. Diamètre des plus gros : **16 cm** ; diamètre des plus petits : **13 cm**.

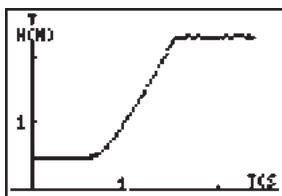
Une feuille de papier aluminium est fixée sur la partie supérieure de l'ensemble, afin de mieux réfléchir les ultra-sons émis par le sonar.



L'ensemble occupe un volume $V = 6,6 \text{ L}$.

La masse totale des ballons, de l'air contenue dans les ballons, de l'œuf, de la feuille d'aluminium et des élastiques de fixation est $m = 25 \text{ g}$.

Une application chargée dans la calculatrice permet de choisir les paramètres de l'acquisition de données. On a choisi ici de faire 120 mesures, une toutes les 0,02 s.

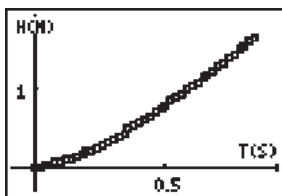


La représentation graphique des points obtenus présente trois phases :

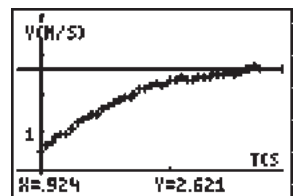
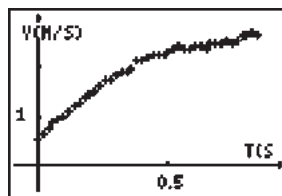
- avant la chute : immobilité par rapport au capteur et au sol
- la chute ;
- après la chute.

Seule la phase de chute étant intéressante, on ne conserve que la partie qui correspond à la chute. Nous retrouvons dans les listes de la calculatrice les valeurs du temps t , de la distance h et de la vitesse v . On peut afficher $h = f(t)$ ou $v = g(t)$.

Distances mesurées



Vitesses calculées



On constate que la vitesse à l'origine de l'enregistrement est de l'ordre de $v_0 = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$, elle augmente puis garde une valeur à peu près constante de l'ordre de $v = 2.6 \text{ m.s}^{-1}$.

Il semble donc que ce solide ait sa chute ralentie dans l'air.

L'air exerce des forces de frottement non négligeables dont il faut déterminer l'expression.

2- Recherche d'un modèle physique, mise en équation, résolution et confrontation aux données expérimentales

Le solide, dans le référentiel lié à la terre (galiléen), est soumis à :

– son poids $\vec{P} = m\vec{g}$,

– la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}$,

– la force de frottement fluide \vec{f} .

La masse du solide est $m = 25$ g, son volume est $V = 6,6$ L, et la masse volumique de l'air est : $r = 1,2$ g.L⁻¹.

La deuxième loi de Newton appliquée à la bille nous donne :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

(où \vec{a} est l'accélération).

En projetant sur un axe vertical, on a :

$$P - \Pi - f = m a,$$

soit :

$$m g - \rho V g - f = m a,$$

puis :

$$g - \frac{\rho V g}{m} - \frac{f}{m} = a.$$

En posant $A = g - \frac{\rho V g}{m}$, on a finalement :

$$A - \frac{f}{m} = a$$

ou encore :

$$a = \frac{dv}{dt} = A - \frac{f}{m}.$$

V , m , g et r sont des données connues ou déterminées expérimentalement. On peut donc calculer A :

$$A = 9,81 - \frac{1,2 \times 6,6 \times 9,8}{25} = 6,7.$$

Première hypothèse sur la force de frottement : elle est proportionnelle à la vitesse

On écrit donc $f = kv$ (où k est un coefficient de frottement).

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{dv}{dt} = A - \frac{kv}{m},$$

soit encore :

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv.$$

C'est une équation de la forme $y' = ay + b$.

La courbe expérimentale de $v(t)$ permet de déterminer la valeur de B : en effet, dans la partie finale de la courbe, l'accélération est nulle (le solide atteint une vitesse limite constante), donc on a, à ce moment là : $0 = A - Bv_{\text{lim}}$ (avec v_{lim} = valeur maximale de la vitesse)

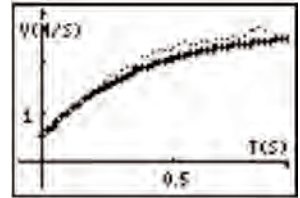
d'où $B = \frac{A}{v_{\text{lim}}}$, avec $v_{\text{lim}} = 2,6 \text{ m.s}^{-1}$ (voir le graphique). Soit $B = \frac{6,7}{2,6} = 2,6$.

L'équation différentielle devient donc :

$$\frac{dv}{dt} = 6,7 - 2,6v,$$

que l'on résout.

La confrontation entre la solution obtenue par la résolution de l'équation différentielle (en gras sur le graphique) et la courbe des valeurs expérimentales (points sur le graphique), montre une légère divergence en fin de chute.



Deuxième hypothèse sur la force de frottement : elle est proportionnelle au carré de la vitesse

On écrit cette fois $f = k'v^2$.

L'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{dv}{dt} = A - \frac{k'v^2}{m},$$

soit encore :

$$\frac{dv}{dt} = A - Cv^2.$$

Notons que cette équation n'est pas de la forme :

$$y' = ay + b,$$

mais de la forme :

$$y' = ay^2 + b.$$

Cette fois, nous aurons recours obligatoirement à la résolution numérique par la méthode d'Euler.

On trouve la valeur de C lorsque $\frac{dv}{dt} = 0 \text{ m.s}^{-2}$, d'où $C = \frac{A}{v_{\text{lim}}^2} = \frac{6,7}{2,6^2} = 1$.

L'équation différentielle est donc :

$$\frac{dv}{dt} = 6,7 - v^2.$$

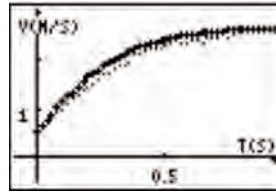
Sous cette hypothèse, la solution obtenue par la résolution de l'équation différentielle et la courbe des valeurs expérimentales coïncident mieux que précédemment.

Tout particulièrement, elle est plus conforme à l'idée de vitesse limite, ce qui ne pouvait pas être le cas avec la solution exponentielle obtenue dans le modèle précédent.

C'est donc ce modèle qui sera préféré.

Il est clair que la présence des ballons a fait jouer un rôle important à la force de frottement. Mais on peut se demander ce qu'il en est lorsque l'on enlève les ballons et que l'on recommence l'expérience avec l'œuf « Kinder » seul dont la forme est aérodynamique.

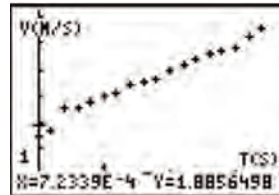
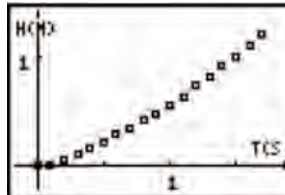
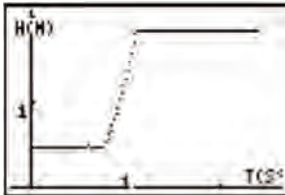
Grâce à l'ajout de petits cailloux, on ajuste sa masse à $m = 25$ g. Son volume est $V = 0,03$ L.



Distance

Distance (intervalle utile)

Vitesse



L'observation de la courbe « vitesse » montre que les points sont à peu près alignés, avec une vitesse initiale de l'ordre de $1,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Hypothèse : la force de frottement est négligeable devant le poids (pour le temps de chute expérimenté)

Sous cette hypothèse, le solide n'est donc soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}$.

Masse du solide $m = 25$ g. Volume $V = 0,03$ L. Masse volumique de l'air $\rho = 1,2 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$.

D'où :

$$\Pi = \rho V g = 1,2 \times 3 \cdot 10^{-5} \times 9,8 = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ N.}$$

Or :

$$P = mg = 0,025 \times 9,8 = 0,25 \text{ N.}$$

Π est aussi négligeable par rapport au poids P .

Finalement, l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{dv}{dt} = g$$

(avec $g \approx 9,8$). La solution est donc :

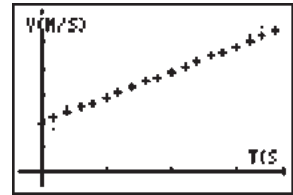
$$v(t) = v_0 + gt,$$

soit :

$$v(t) = 1,9 + 9,8t.$$

Les deux graphes coïncident : le modèle dans lequel la force de frottement est négligeable devant le poids du solide pendant la durée de la chute observée, est validé.

Il faudrait prolonger l'expérience pour savoir si cela reste vrai avec des vitesses du solide plus élevées.



Remarque : une fois le modèle validé, une **régression linéaire** de la vitesse obtenue expérimentalement nous permet de retrouver la valeur de g .

Exemple 3 : Désintégration de noyaux radioactifs

Dans le programme de physique de terminale S, on peut lire : « *Le programme de mathématiques se charge d'opérer le passage du caractère aléatoire de la désintégration d'un noyau individuel au caractère déterministe de l'évolution d'une population de noyaux radioactifs.* »

Dans le cours de mathématiques, cela se place dans le cadre de l'étude des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ et dans celui de l'introduction aux lois de probabilités continues.

De quoi s'agit-il ? Citons un extrait de l'annexe « Radioactivité » du document d'accompagnement des programmes de mathématiques :

« *Le taux de désintégration $N'(t)$ est proportionnel au nombre de noyaux présents : une interprétation est que les désintégrations des noyaux sont indépendantes les unes des autres.*

Le taux de désintégration des noyaux, rapporté au nombre de noyaux présents, soit $N'(t)/N(t)$, est constant au cours du temps. Les noyaux, en quelque sorte, ne "s'usent pas", ne "vieillissent" pas : leurs propriétés demeurent constantes au cours du temps.

On peut alors, pour une substance radioactive donnée, proposer un modèle microscopique de désintégration des noyaux fondé sur les hypothèses suivantes :

- 1 – *La durée de vie d'un noyau est modélisée par une loi de probabilité, la même pour tous les noyaux d'une même substance radioactive.*
- 2 – *La désintégration d'un noyau n'affecte pas la désintégration d'un autre noyau.*
- 3 – *Un noyau se désintègre sans avoir vieilli.*

La durée de vie est une quantité aléatoire, qui peut être modélisée par une loi de probabilité sur l'ensemble des nombres réels positifs. »

On peut reformuler les hypothèses de la façon suivante :

Au niveau macroscopique :

N_0 étant le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon à la date $t_0 = 0$, et N le nombre de noyaux radioactifs non encore désintégrés à la date t , la « vitesse de désintégration » diminue au cours du temps, **ne dépend que de N et est proportionnelle à N** (le coefficient de proportionnalité est constant au cours du temps).

Cela se traduit par l'équation

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

où λ est une constante caractéristique d'un radioélément. Cette équation a pour solution :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Au niveau microscopique :

La désintégration d'un noyau est un phénomène aléatoire. La loi de probabilité de la durée de vie est la même pour tous les noyaux et reste la même au cours du temps : la probabilité pour qu'un noyau, non encore désintégré à l'instant t , meure dans la prochaine unité de temps, **ne dépend pas de t** . C'est un modèle de « mort sans vieillissement ». De plus, la désintégration d'un noyau est indépendante de celle des autres. À partir de ce modèle aléatoire, la loi de probabilité du nombre de noyaux qui se désintègrent entre les instants 0 et t (t fixé) étant une loi binomiale, on peut ainsi retrouver, par le calcul, la loi :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

où $N(t)$ est l'espérance du nombre de noyaux à l'instant $t^{(1)}$.

À l'aide d'une simulation, nous allons vérifier expérimentalement que l'hypothèse aléatoire au niveau microscopique s'accorde bien avec le modèle exponentiel.

Un premier scénario consiste à faire faire cette simulation, par les élèves, avec des dés. À chaque étape (symbolisant un petit intervalle de temps), chaque élève lance un dé. Les élèves qui obtiennent 6 sont éliminés. On note le nombre d'élèves restants et on recommence⁽²⁾. Cela permet une bonne identification de la situation par les élèves. Toutefois, l'effectif en jeu, celui de la classe, est faible (une fois n'est pas coutume !).

Pour travailler sur des effectifs plus importants, nous utiliserons ici un programme sur calculatrice⁽³⁾ :

La taille de la population est choisie au départ. C'est le générateur aléatoire qui se charge d'affecter aléatoirement une valeur entière entre 1 et 10 (10 plutôt que 6 pour ralentir le phénomène). Les noyaux affectés de la valeur 10 sont supprimés, les noyaux restants sont comptés et, tant qu'il reste des noyaux, on recommence.

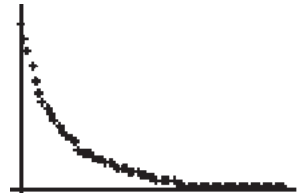
(1) On trouvera ces calculs dans le document d'accompagnement page 78.

(2) Une feuille de calcul vidéo-projetée dans la classe permet d'obtenir la courbe en temps réel.

(3) Si l'on choisit de ne pas faire écrire le programme par les élèves, il est indispensable au moins de le commenter.

RADIOACT	
Efface le contenu des listes	ClrList L3,L4
Saisie de N_0	prompt N
Initialisation de la liste L4 avec N_0	{N} → L4
Tant que $N > 0$:	while N > 0
Liste de N valeurs aléatoires entre 1 et 10	randInt(1,10,N) → L3
Comptage des valeurs $\neq 10$	sum(L3 \neq 10) → N ⁽⁴⁾
Augmentation de la liste L4 de la nouvelle valeur de N	augment(L4,{N}) → L4
Fin de la boucle Tant que	End
Pour obtenir automatiquement le nuage de points, il suffit de rajouter les lignes :	
Création d'une liste d'entiers pour les abscisses des points	Seq(P,P,0,dim(L4) - 1)ÆL3
Choix du type de graphique	Plot2(Scatter,L3,L4,+)
Calcul automatique de la fenêtre d'affichage et tracé	ZoomStat

Résultat d'une simulation avec $N_0 = 200$

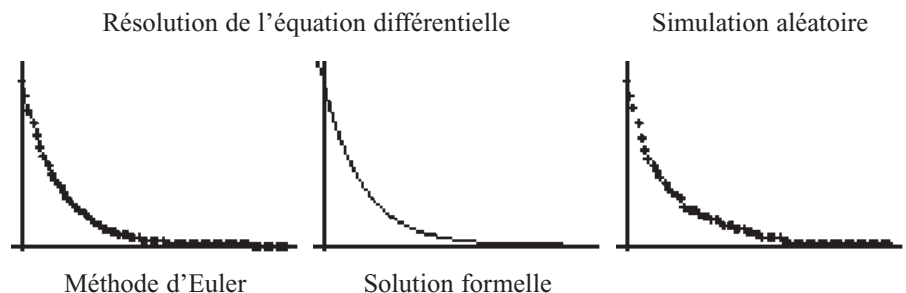


L'équation différentielle qui modélise l'expérience est :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{10}N\left(\lambda - \frac{1}{10}\right).$$

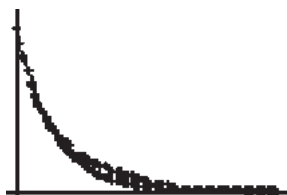
En effet, à chaque étape (durée dt), en moyenne, $\frac{1}{10}$ de l'effectif disparaît.

On résout cette équation (solution numérique ou formelle) et on confronte la solution avec le résultat de la simulation :

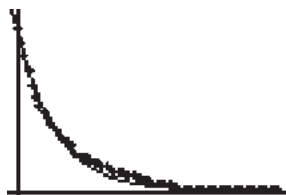


En superposant :

(4) La commande $L3 \neq 10$ teste si chacun des termes de la liste L3 est différent de 10, et renvoie une liste dont chaque terme est 0 (lorsque le test est négatif) ou 1 (lorsque le test est positif). En faisant la somme des termes de cette liste, on obtient le nombre de « noyaux encore en vie ».



Simulation + Euler



Simulation + solution formelle

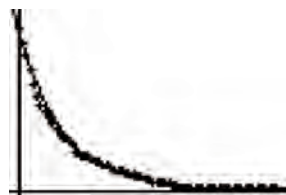
Une fois le modèle exponentiel validé, il est légitime de faire une régression exponentielle de données expérimentales provenant de la désintégration de particules pour estimer la valeur de la constante λ . Ici, avec les données précédentes, on obtient⁽⁵⁾ :

Épilogue : Ces trois exemples montrent comment les mathématiques apportent une contribution décisive à l'élaboration de connaissances scientifiques, et illustrent cette

```
ExpReg
y=a*b^x
a=197.0316149
b=.9167594295
```

```
ln(b)
-.0869101863
```

$$y = 197 e^{-0,087 x}$$



Simulation + régression exponentielle

phrase que l'on trouve dans le programme de physique :

« **Les mathématiques ne sont pas un outil pour la physique, elles en sont constitutives.** »

Il reste concrètement aux enseignants de physique et de mathématiques à se concerter pour savoir qui fait quoi. Mais si cette question de la répartition des tâches est finalement secondaire, il serait symboliquement fort qu'au moins une séance puisse se faire en présence des deux enseignants dans la classe.

(5) Au préalable, il faut supprimer la dernière valeur de la liste L4 (qui est 0) pour éviter un message d'erreur lors de la régression exponentielle : dans les calculs, on passe par le logarithme des valeurs de cette liste.