

Des problèmes vraiment concrets

Christophe Pêtre(*)

*Tous les énoncés reproduits ici sont extraits de la brochure de l'auteur : **Problèmes illustrant un usage des mathématiques de collège et de lycée pour l'étude de phénomènes physiques : énergie, pression, flottabilité, pollution, crues, ...**, parue en juin 2003 à l'IREM de Clermont-Ferrand.*

Quelques compléments à la version d'origine ont toutefois été apportés.

Les problèmes qualifiés de concrets des ouvrages de mathématiques couramment édités pour le collège et le lycée m'apparaissent majoritairement orientés sur des calculs de prix, d'âge, de longueurs, ... et je me suis interrogé sur l'assez faible présence de problèmes relatifs à des phénomènes physiques, demandés pourtant par les instructions officielles.

Les problèmes suivants ont donc été élaborés pour faire travailler les élèves de collège et lycée en mathématiques, avec le souci de donner davantage de sens à ces dernières en les appliquant, conformément aux programmes, à des situations *authentiques* issues des *sciences physiques*.

Des raisonnements physiques très simples à exposer pour un enseignant de formation scientifique permettent de les résoudre. Pour élaborer de tels problèmes, d'autres idées intéressantes pourraient être trouvées simplement dans des ouvrages de sciences physiques.

Par ailleurs, plusieurs de ces problèmes traitent du développement durable, qu'il me semble important d'aborder bien plus au sein de l'École.

Problèmes pour le collège et la seconde

Problème n° 1 : Application du problème d'Archimède à la conception d'un radeau

(Thème : équations ou inéquations ; classes de quatrième, troisième, seconde)

D'après le principe d'Archimède, pour qu'un radeau de masse totale m kilogrammes flotte, il faut que les flotteurs aient un volume d'au moins m litres.

Vous souhaitez construire un radeau pour aller mesurer la profondeur près du centre d'un lac avec des amis (dont des adultes pompiers pour la sécurité). Ce radeau sera constitué d'une plateforme en bois ayant une masse de 350 kg, sous laquelle seront fixés des bidons étanches ayant chacun un volume de 80 L et une masse de 15 kg. Le radeau doit pouvoir supporter 8 personnes, soit une masse totale de 565 kg, ainsi que 70 kg de matériel. Calculer le nombre minimal de bidons qu'il faut installer sous le radeau afin qu'il flotte.

(*) IREM de Clermont-Ferrand et Lycée Emmanuel Chabrier d'Yssingeaux.

Corrigé : Soit n le nombre de bidons. n doit vérifier

$$350 + 15n + 565 + 70 \leq 80n$$

(nombre de kg = nombre de litres),

$$n \geq 15,2$$

d'où

$$n \geq 16.$$

Remarque : Si on ne prend pas en compte la masse des bidons, le nombre de bidons calculé est

$$(350 + 565 + 70) : 80 \approx 12,3$$

et 13 bidons ne permettent pas au radeau de flotter.

Problème n° 2 : Des éoliennes pourraient-elles fournir toute notre électricité ?

(Thème : puissances, racines carrées ; classes de quatrième, de troisième)

La consommation totale d'électricité en France est d'environ 400×10^9 kilowatt-heures par an. 70×10^9 kilowatt-heures par an proviennent des centrales hydro-électriques des grands barrages. Vers 2006, des éoliennes d'une puissance maximale de 6 mégawatts pourront être installées en mer (avec des pales de 65 m de long, soit une hauteur totale d'environ 200 m au dessus de la surface de l'eau). Elles devraient y fonctionner à leur puissance maximale pendant l'équivalent de 3 800 heures par an, fournissant ainsi chacune environ $6\,000 \text{ kW} \times 3\,800 \text{ h} = 22\,800\,000 \text{ kWh}$ par an.

a) Combien de telles éoliennes seraient nécessaires pour fournir 330 milliards de kilowatt-heures par an ?

Remarque : Le potentiel éolien off-shore européen est estimé à 2 800 milliards de kWh_{électriques} par an, en se limitant aux zones situées à moins de 30 km des côtes et où la profondeur n'excède pas 40 m. Le gisement éolien en mer français est estimé à 480 milliards de kWh par an.

La consommation électrique européenne est actuellement de 1 846 milliards de kWh_{électriques} par an, celle de la France est de 400 milliards de kWh_{électriques} par an. (Source: rapport « wind force 12 », 2002, www.ewea.org).

b) Si on plaçait ces éoliennes en 50 rangées distantes chacune d'1 km avec une éolienne tous les 600 m au sein de ces rangées, quelle serait la longueur de ces rangées ? Comparer cette longueur à la longueur de la façade atlantique de la France.

c) Quelle aire (en hectares) aurait la surface totale forée en mer pour toutes ces éoliennes avec des fondations constituées d'un tube de 6 m de diamètre extérieur ?

Remarque : la quantité d'acier pour réaliser tous ces mâts serait voisine de la production annuelle française d'acier

(www.hornsrev.dk)



Corrigé :

- a) environ 14 475.
- b) environ 175 km.
- c) environ 41 hectares (seulement).

Problème n° 3 : Sommes-nous nombreux sur Terre ?

(Thème : racines carrées, puissances de dix, classes de troisième).

- a) Si on considère que la population mondiale est constituée de $6,4 \times 10^9$ personnes, quelle longueur aurait le côté du carré contenant toute l'humanité regroupée en une foule comptant 4 personnes par m^2 ?
- b) Répondre à la même question avec la population française, considérée comme constituée de 64 millions de personnes.
- c) Comparer les deux populations précédentes ainsi que les deux longueurs calculées.

Corrigé :

- a) 40 km
- b) 4 km

Problème n° 4 : Se chauffer au moindre coût

(Thème : fonctions linéaires et affines ; classes de troisième et seconde).

En raison de la hausse du prix du pétrole, vos parents se renseignent sur le prix des différents modes de chauffage. Ils utilisent environ 3 000 litres de fioul par an pour le chauffage, c'est-à-dire environ 30 000 kWh par an (1 kWh = 1 kilowattheure). Les principales sources de chaleur sont les suivantes :

Tous les prix indiqués, pratiqués mi-2004, sont toutes taxes comprises.

Les prix des chaudières à bois (plaquettes et granulés) bénéficient depuis juin 2004 d'un crédit d'impôt de 40 % lorsqu'il s'agit d'une rénovation. Ce crédit a été intégré dans les calculs qui suivent.

Les chaudières à plaquettes bénéficient en plus de subventions régionales : un taux moyen de 30 % de subvention a été adopté ici.

1. Électricité: 0,06 €/kWh. Le chauffage électrique ne nécessite pas de chaudière.
2. Fioul : 0,4 €/L c'est à dire 0,04 €/kWh. Une chaudière au fioul coûte environ 4 000 €.
3. Gaz de ville: 0,04 €/kWh. Une chaudière au gaz coûte environ 1 400 €.
4. Plaquettes de bois (gros copeaux de bois issus du déchetage de sous-produits du bois de scierie) : 10 €/m³ soit 0,01 €/kWh. Une chaudière à alimentation automatique à plaquettes de bois coûte actuellement environ 7 300 €. 30 m³ de plaquettes sont nécessaires par an. (www.itebe.org)
5. Granulés de bois (semblables à ceux de l'alimentation animale, obtenus par compression sans liant de sciure ou bois défibré) : 0,02 €/kWh. Une chaudière à granulés de bois coûte environ 5 200 €. 9 m³ de granulés sont nécessaires par an. (www.pelletclub.org)

1) On désigne par n le nombre d'années. Les coûts suivants comprennent le coût d'achat de la chaudière et le coût des kWh consommés.

Exprimer en fonction de n les coûts de chauffage $C_1(n)$, $C_2(n)$, $C_3(n)$, $C_4(n)$, $C_5(n)$ pour n années avec un chauffage respectivement électrique, au fioul, au gaz de ville, à plaquettes de bois, à granulés de bois.

2) Représenter graphiquement les fonctions C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 dans un même repère orthogonal.

3) N'importe quel type des chaudières considérées ici peut durer environ 25 ans. Classer ces modes de chauffage du plus économique au plus cher.

Corrigé :

$$C_1(n) = 30\,000 \times 0,06 \times n = 1\,800 n$$

$$C_2(n) = 30\,000 \times 0,04 \times n + 4\,000 = 1\,200 n + 4\,000$$

$$C_3(n) = 30\,000 \times 0,04 \times n + 1\,400 = 1\,200 n + 1\,400$$

$$C_4(n) = 30\,000 \times 0,01 \times n + 7\,300 = 300 n + 7\,300$$

$$C_5(n) = 30\,000 \times 0,02 \times n + 5\,200 = 600 n + 5\,200$$

$$C_1(25) = 45\,000 \text{ €} \approx 295\,000 \text{ F}$$

$$C_2(25) = 34\,000 \text{ €} \approx 223\,000 \text{ F}$$

$$C_3(25) = 31\,400 \text{ €} \approx 206\,000 \text{ F}$$

$$C_4(25) = 14\,800 \text{ €} \approx 97\,000 \text{ F}$$

$$C_5(25) = 20\,200 \text{ €} \approx 132\,500 \text{ F}$$

$206\,000 - 97\,000 = 109\,000 \text{ F}$; $295\,000 - 97\,000 = 198\,000 \text{ F}$: les économies réalisables étonnent et intéressent fortement *tous* les élèves.

Remarque : L'investissement initial assez élevé d'une chaudière à plaquettes de bois occulte les fortes économies qu'elle permet par rapport à l'électricité, au fioul et au gaz mais la représentation graphique des C_i montre clairement que le coût d'un chauffage dépend surtout du prix du kWh, et peu du coût de la chaudière.

plaquettes de bois ; granulés de bois ; gaz de ville ; fioul ; électricité
 $\xrightarrow{\hspace{10em}}$
 plus économique moins économique

Problème n° 5 : Installation d'éoliennes en Haute-Loire

(Thème : proportionnalité, conversions d'unités, grandeurs quotient, distance dans le plan et dans l'espace ; classes de collège voire de seconde).

Y aurait-il suffisamment de place pour installer des éoliennes de grande taille (avec des pales montant à environ 120 m au dessus du sol) au voisinage du bourg de Fix Saint-Genès, entre Clermont-Ferrand et Le Puy-en-Velay ?

Notes

– Pour respecter la réglementation sur le bruit, des éoliennes de grande taille devraient être placées à :

- au moins 500 m des habitations situées en zone calme ;
- au moins 150 m des habitations situées près d'un axe routier à fort trafic (la RN 102).

– Dans le secteur considéré, le vent dominant provient du nord-ouest.

- De telles éoliennes peuvent être installées dans les bois (elles dépassent largement au dessus des plus hauts arbres).
- De telles éoliennes sont généralement installées distantes d'au moins 250 m les unes des autres.

Éléments à étudier :

1) *Hauteur d'une éolienne par rapport à un bâtiment connu :*

- a) Combien de niveaux comporte le bâtiment des cours du collège Jean Monnet d'Yssingaux ?
- b) Si on considère que chaque niveau a une hauteur de 3,5 m, quelle est la hauteur de ce bâtiment ?
- c) Combien de fois une éolienne, dont les pales montent à 120 m au dessus du sol, est-elle plus haute que ce bâtiment du collège ? Combien de niveaux devrait avoir ce bâtiment pour être aussi haut qu'une telle éolienne ?
- d) Représenter, sur la photographie distribuée, ce bâtiment (d'environ 38 m de long) et vous, à côté d'une telle éolienne.
- e) Les pales des éoliennes qui vont être installées en mer atteindront 200 m au dessus de la surface de l'eau. Représenter sur le graphique précédent une telle éolienne. Combien de niveaux devrait avoir ce bâtiment pour être aussi haut qu'une telle éolienne ?

2) *Distance entre habitations et éoliennes :*

En zone calme, les éoliennes de grande taille doivent être placées à au moins 500 m des habitations (pour ne pas créer de nuisances sonores). Ces éoliennes doivent en outre être placées à au moins 150 m d'une route nationale (comme la N 102) au cas où une pale viendrait à se rompre.

L'échelle de la carte jointe est 1 : 25 000, c'est-à-dire que les dimensions sur la carte sont fois plus petites que les dimensions dans la réalité.

a) Compléter les phrases suivantes

1 cm sur la carte représente cm dans la réalité (= m dans la réalité).

2 cm sur la carte représentent m dans la réalité.

4 cm sur la carte représentent m dans la réalité (= km dans la réalité).

..... cm (= mm) sur la carte représente 100 m dans la réalité.

..... cm (= mm) sur la carte représente 200 m dans la réalité.

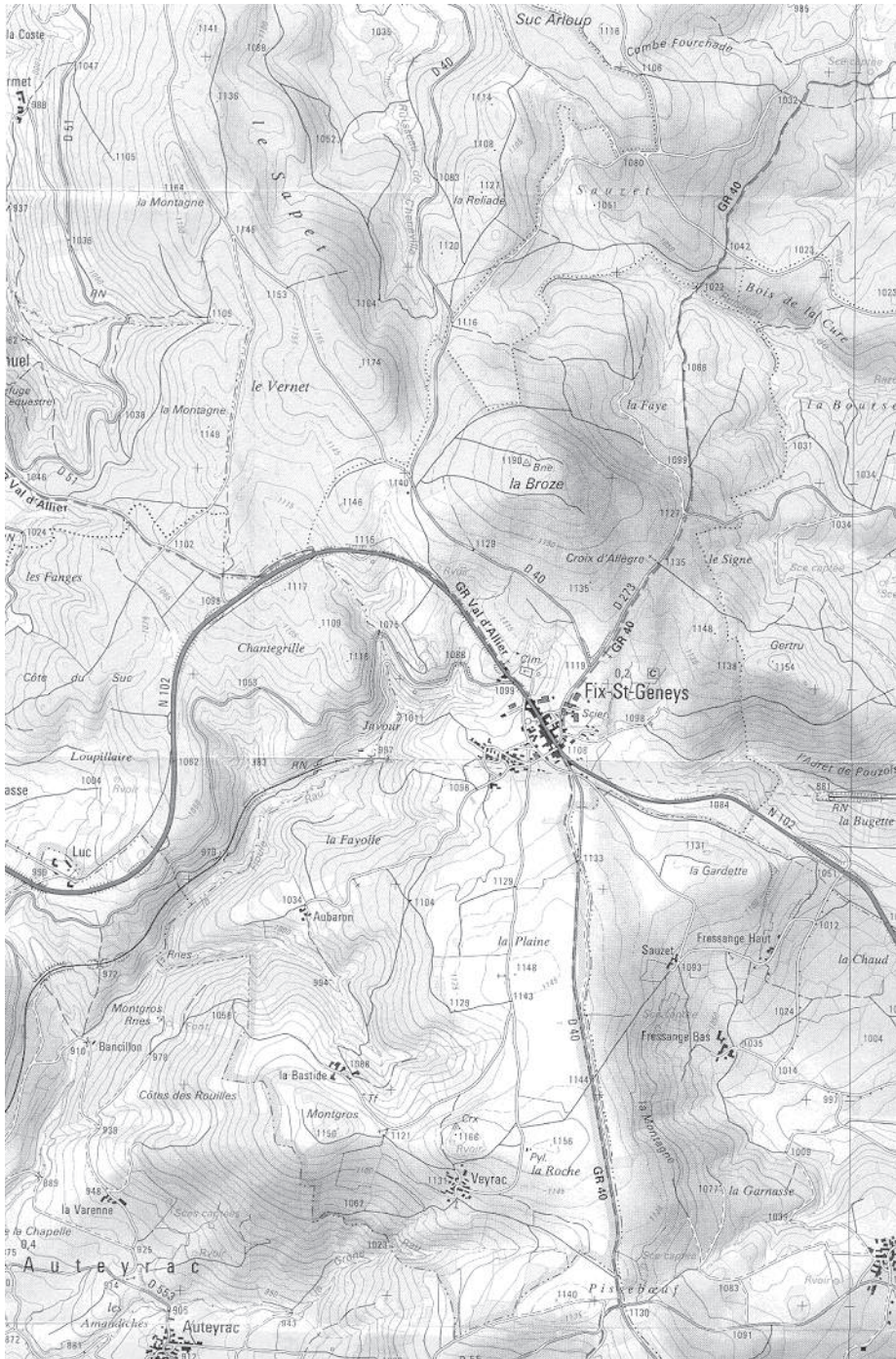
..... mm sur la carte représente 10 m dans la réalité.

b) Tracer sur la carte jointe (au crayon à papier et sans appuyer) les zones sur lesquelles pourraient être installées des éoliennes. Ne considérer que les zones situées à plus de 1 000 m d'altitude.

c) Sachant que les éoliennes sont généralement distantes de 200 m les unes des autres, et que le vent dominant provient du nord-ouest dans ce secteur, implanter une dizaine d'éoliennes.

3) *Intérêt énergétique et environnemental :*

Sachant qu'une éolienne de 120 m de haut a une puissance maximale d'environ 2 MW (ou 2 000 kW) et peut fonctionner en Haute-Loire à cette puissance pendant l'équivalent de 2 400 heures par an, combien de kWh une telle éolienne peut-elle fournir par an ?



Les 60 millions de français consommant 400 milliards de kWh électriques par an, combien de kWh sont nécessaires par français et par an ?

Combien de personnes auraient toute l'électricité qu'ils consomment produite par le parc éolien que vous avez implanté ?

Environ 150 éoliennes de grande taille sont actuellement en projet en Haute-Loire. Combien de personnes auraient toute l'électricité qu'ils consomment produite par ces 150 éoliennes ?

Sachant que la Haute-Loire comprend environ 210 000 habitants, quel pourcentage des habitants de ce département aura toute l'électricité qu'il consomme produite par ces 150 éoliennes ?

4) *Relief au voisinage du site :*

Afin de vous rendre compte si le site est suffisamment élevé par rapport aux environs, réaliser une coupe Nord-Sud et une coupe Est-Ouest passant par un site où est implantée une éolienne. Y dessiner quelques éoliennes à l'échelle. (Rappel mm sur la carte représente 10 m dans la réalité. La courbe de niveau marquée 1 050 est l'ensemble des points situés à 1 050 m d'altitude c'est à dire à 1 050 m au dessus du niveau de la mer).

5) *Impact visuel :*

a) Sachant que le pylône situé à environ 500 m à l'est de Veyrac (au lieu dit La Roche) a une hauteur d'environ 30 m, réaliser un photomontage avec des éoliennes de 120 m de haut. Ce pylône a été utilisé par EDF pour des études sur la foudre.

b) La population locale semble préférer une installation des éoliennes au nord du col sur la RN 102. Des éoliennes implantées sur le site « La Montagne » à 1 164 m d'altitude, situé à 2 km au nord est de Chastenuel, seraient-elles visibles du centre du bourg de Fix Saint-Geney ?

Problème n° 6 : Une situation de crue^(*)

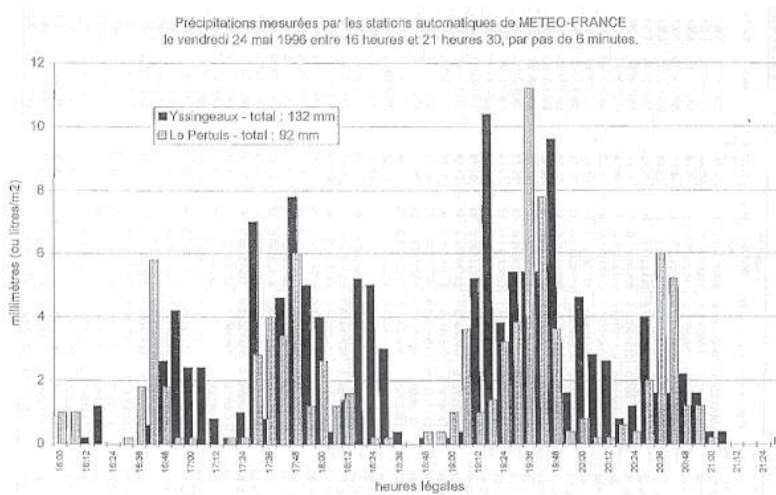
Le vendredi 24 mai 1966, entre 19 h 33 min et 19 h 39 min, 11,2 mm d'eau de pluie (soit 11,2 L/m²) sont tombés sur la station météorologique du Pertuis (bourg situé en Haute Loire, entre Yssingeaux et le Puy en Velay) (cf. diagramme page suivante).

On imagine la situation extrême suivante :

- une telle pluie (11,2 L/m²) s'abat sur la totalité de la partie du bassin versant du Ramel située à l'amont du pont de la Terrasse (entre Yssingeaux et Messinhac), soit sur environ 26,5 km² ;
- la durée pendant laquelle une telle pluie tombe est suffisamment longue pour que l'eau tombée vers la source du Ramel ait le temps d'arriver au pont de la Terrasse pendant cette durée ;
- le sol est saturé d'eau : toute l'eau tombant du ciel s'écoule dans le lit du Ramel sans pouvoir s'infiltrer dans le sol ;

et on se propose de calculer quelle hauteur atteindrait le niveau du Ramel au pont de la Terrasse ?

(*) traitée ici niveau collège, elle le sera niveau lycée dans la suite du Dossier Problèmes à paraître dans un prochain Bulletin.



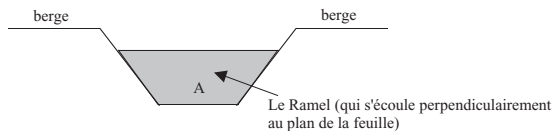
Au cours d'un tel orage, combien de m³ d'eau tomberaient du ciel durant chaque seconde sur la partie du bassin versant du Ramel située à l'amont du pont de la Terrasse ?

Quel serait alors le débit maximum du Ramel au pont de la Terrasse ?

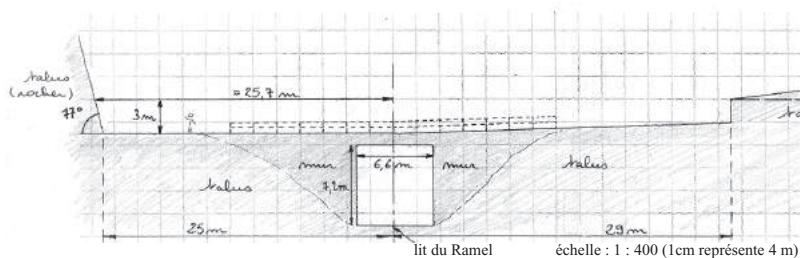
Niveau collège (Thème : équations, aires ; classes de troisième et de seconde).

- 1) Dans une telle situation, on peut évaluer la vitesse moyenne du courant du Ramel au pont de la Terrasse à 4,0 m/s.

Quelle aire A aurait alors la surface occupée par le Ramel dans un plan perpendiculaire à son sens d'écoulement ?



- 2) Le schéma suivant représente le pont de la Terrasse (vue de l'amont) dans un plan perpendiculaire au sens d'écoulement du Ramel :



Remarques : L'axe du pont représente la verticale.

La barrière du pont, du côté de l'aval, est faite de barres d'acier : on pourra considérer qu'elle ne fait pas obstacle à l'eau. La barrière du pont, côté amont, est assez basse et pourra être négligée.

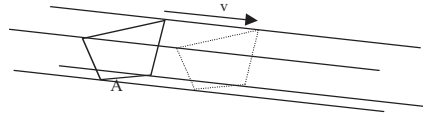
Au pont de la Terrasse,

- a) le Ramel submergerait-il la route ?
- b) le Ramel dépasserait-il la route de plus de 3 m ?
- c) le Ramel dépasserait-il la route de plus de 3,5 m ?

3) Calculer la hauteur maximale (approchée au cm) de l'eau au dessus de la route.

Corrigé : Le débit Q au niveau du pont de la Terrasse peut devenir égal au débit de pluie tombant, soit $0,112 \times 26,5 \times 10^6 : (6 \times 60) \approx 825 \text{ m}^3/\text{s}$.

$Q = v \times A$ avec la vitesse moyenne du courant (en m/s) et A l'aire de la surface qu'occupe l'eau (en m^2) (volume d'un prisme droit) :



Avec $v = 4 \text{ m/s}$, on obtient $A \approx 206,25 \text{ m}^2$.

Soit h la hauteur (en m) atteinte au maximum par l'eau au dessus du niveau du pont et soit $h' = h - 3$.

$$206,25 = 6,5 \times 7 + 0,5 (25 + 25,6) \times 3 + 0,5 (3 + 2) \times 29 + 0,5 (25,6 + 29 + 25,6 + 29 + 0,25 h' + 7,5 h') \times h'$$

d'où $206,25 = 193,9 + 54,6 h' + 3,875 h'^2$,

d'où $3,875 h'^2 + 54,6 h' - 12,35 = 0$.

La résolution (au tableur) donne la racine utile $h' \approx 0,222 \text{ 67 m}$.

D'où la hauteur h maximale atteinte par l'eau au dessus du pont : environ 3,22 m.

