Les trois portes et le gros lot

Boris Véron(*)

Quelle est la meilleure stratégie dans un jeu ? Lorsque les idées s'opposent et que les arguments ne convainquent pas, on tient une bonne occasion de faire des statistiques puis des probabilités.

L'activité présentée ici peut être adaptée à tous les niveaux du lycée. En Seconde, il suffira, par exemple, de s'arrêter à la simulation et aux statistiques. Elle présente plusieurs avantages :

- Elle est simple à comprendre et proche du vécu des lycéens.
- Elle pose une vraie question : la réponse n'est pas évidente.
- Elle donne du sens aux outils que l'on doit enseigner.

1. Le jeu

Une chaîne de télévision grand public propose le jeu suivant (si, c'est possible) : Sur le plateau : trois portes. Derrière l'une des portes : le gros lot. Si le candidat choisit la bonne porte, il gagne le gros lot. (C'est effectivement d'un niveau comparable à bien des jeux télévisés actuels). Le jeu se déroule toujours de la façon suivante.

- Le présentateur cache le gros lot derrière une porte avant l'émission.
- Le candidat désigne l'une des trois portes et va se placer devant.
- Le présentateur ouvre alors une des deux portes restantes pour montrer qu'elle ne cache pas le gros lot.
- Il propose enfin au candidat de reconsidérer son choix.

Quel est l'intérêt du candidat ?

Voilà qui demande réflexion. Cette question partage la classe en plusieurs groupes : ceux qui maintiennent leur choix initial, ceux qui pensent qu'il vaut mieux changer de porte, ceux pour lesquels les deux portes ont alors la même probabilité de cacher le gros lot et enfin ceux qui n'ont pas d'idée. Pas une fois je n'ai eu la bonne réponse avec un argument convaincant pour la classe. J'en viens donc à proposer de faire une étude statistique sur les résultats de nombreux candidats. D'où…

2. Expérimentation

Chaque élève revient la fois suivante après avoir joué quelques parties à ce jeu. Les élèves jouent chez eux avec leur famille ou entre amis. On obtient quelques dizaines de cas, dont on tire une impression mais pas de conclusion définitive. Comme je demande peu de cas à chacun, j'obtiens de grandes fluctuations entre les élèves et des avis encore divergents.

Il faudrait beaucoup plus de données, d'où :

(*) Lycée Pierre-Paul Riquet, Saint-Orens de Gameville. e-mail : boris.veron@free.fr

3. Simulation et remarques

Avant de constater l'inutilité de tout simuler (peu importe le nom de la porte derrière laquelle est caché le gros lot, il n'est pas toujours nécessaire de simuler le choix, ou plutôt le non-choix du présentateur), je propose de simuler les quatre phases du jeu avec la touche « random » de la calculatrice. D'autres méthodes de simulation sont possibles, celle-ci est clairement préconisée par les instructions officielles.

Première étape : On cache le gros lot
On utilise le premier chiffre *non nul* après la virgule.
Pour 1, 2 ou 3 on cache le gros lot derrière la porte A.
Pour 4, 5 ou 6 on cache le gros lot derrière la porte B.
Pour 7, 8 ou 9 on cache le gros lot derrière la porte C.

Deuxième étape : Choix initial du candidat
Même utilisation du nombre aléatoire.
Il se peut que certains élèves imaginent : de 0 à 4, la bonne porte, de 5 à 9 une mauvaise. Il faut préparer une réponse.

Troisième étape : Aide du présentateur
On utilise le premier chiffre après la virgule.
De 0 à 4, le présentateur désigne la première porte qui reste dans l'ordre alphabétique (s'il a le choix !).
De 5 à 9, le présentateur désigne la seconde (toujours s'il a le choix !)

Quatrième étape : Choix final du candidat
De 0 à 4, le candidat maintient son choix
De 5 à 9, il le modifie.

Il faut présenter les données obtenues de façon exploitable :

Choix maintenu et gain	Choix maintenu et perte	Choix modifié et gain	Choix modifié et perte

Il semble que l'on gagne plus souvent qu'on ne perd si l'on change de porte et que l'on perd plus souvent qu'on ne gagne si on maintient son choix.

Je demande à chaque élève de n'effectuer que quelques simulations (une vingtaine) de sorte que l'on observe des fluctuations, ce qui donnera plus d'intérêt au …

4. Questionnement

Êtes vous convaincus de la meilleure stratégie pour le candidat ? En êtes vous certains ? Les fluctuations obtenues précédemment servent à installer un doute scientifique.

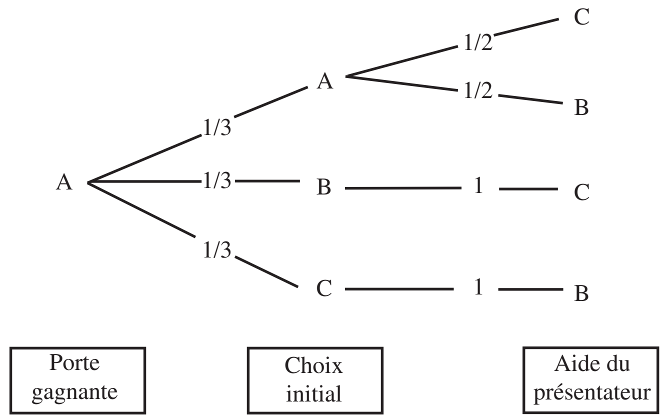
À partir de combien de simulations peut-on conclure avec certitude quant à la meilleure stratégie ? Y a-t-il un nombre minimum et si oui comment le déterminer ? En demandant alors à chacun d'effectuer un grand nombre de simulations, on va obtenir des données moins fluctuantes. Cela permettra un débat à propos des critères de confiance (sondages).

Y a-t-il un moyen de calculer les valeurs exactes des probabilités de gagner ou de perdre dans les deux options du candidat ?

Toutes ces questions peuvent être proposées, mais le mieux serait qu'elles proviennent des élèves.

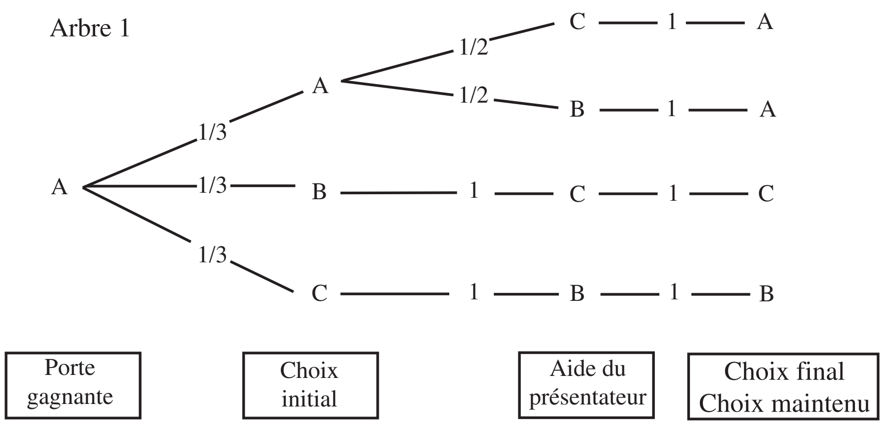
5. Le calcul des probabilités

En nommant A la porte derrière laquelle est le gros lot, on obtient l'arbre de probabilités :

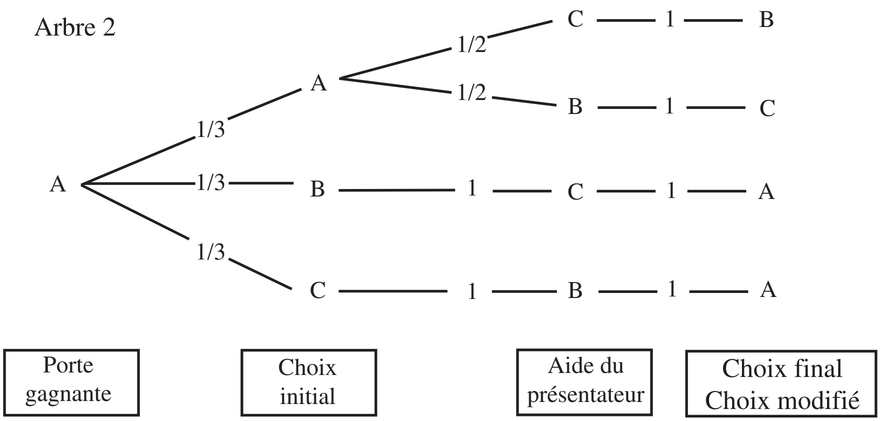


On le complète par les deux arbres ci-dessous, l'un (arbre 1) présentant l'option « le candidat maintient son choix », l'autre (arbre 2) présentant l'option « le candidat modifie systématiquement son choix », la probabilité de gagner selon l'option choisie étant alors facile à calculer.

Arbre 1



Arbre 2



On en déduit que la probabilité de gagner en maintenant le choix est de 1/3, alors qu'elle est de 2/3 en le modifiant. On retrouve (le plus souvent) les résultats obtenus par la simulation. Comment peut-on interroger la situation de manière à comprendre ce résultat ?

6. Analyse du résultat

Ce partage 1/3 - 2/3 des probabilités étonne, à tel point que nombre d'élèves sont davantage convaincus par les simulations que par le calcul (cela donne à réfléchir sur le statut de la démonstration).

Il y a plusieurs manières de l'argumenter, les deux suivantes sont celles qui m'ont convaincu :

- Un candidat décide de ne pas prendre en compte l'aide du présentateur. C'est comme si ce dernier ne montrait pas de porte. La probabilité de choisir la bonne porte du premier coup est donc de 1/3.
- 2 fois sur 3 le candidat se trompe au premier choix, donc 2 fois sur 3, le présentateur n'a pas le choix de la porte qu'il ouvre (c'est là le point essentiel). Ainsi 2 fois sur 3, le gros lot est derrière la porte restante.

7. Anecdotes

Depuis le temps que je connais ce problème (paru dans Jeux & Stratégie au début des années 80), la situation est évidente pour moi. Je raconte l'anecdote de ce professeur d'université (je la raconte avec Hardy) qui à la fin d'un énoncé dit à ses étudiants que c'est évident. Puis qui regarde son énoncé, réfléchit et … part. Il revient au bout de deux heures et reprend son cours en disant : « oui oui, c'est évident ».

J'explique à mes élèves qu'en fait, il avait mis en scène son cours et qu'il n'était parti deux heures que pour laisser le temps que cela devienne évident pour ses étudiants. J'ajoute immédiatement que je ne ferai pas la même chose…

La seconde anecdote est la suivante : aux États-unis, ce jeu a été l'objet de l'émission de télévision « Marilyn knows » dans laquelle Marilyn a expliqué la meilleure stratégie dans cette situation. Cette émission lui a valu un courrier monumental, certains mettant en avant des diplômes et des titres prestigieux pour lui demander de ne plus raconter autant d'âneries.

Dois-je vous suggérer de retenir vos stylos… ?

8. Et la concurrence …

Devant un tel succès, la concurrence n'est pas restée immobile et a contre-attaqué en proposant le jeu presque similaire : « Le gros lot et les trois coffres ».

Trois coffres et un gros lot … mais le présentateur ne s'interdit pas d'indiquer au candidat que son premier choix est mauvais, sans pour autant le faire systématiquement (il décide avant l'émission le coffre qu'il exclura).

Sur quelle chaîne allez-vous jouer ?

9. Bilan

Le bilan est positif pour les avantages escomptés dans l'Introduction.

NDLR

La simulation proposée (sur calculatrice) n'est pas la seule envisageable : par exemple, un dé sur lequel on regroupe les faces deux à deux peut tout aussi bien faire l'affaire.

La revue « Repères », des Irem, a publié dans son numéro 13 (octobre 1993), sous les signatures conjointes de Michel Henry et Henri Lombardi, une étude de ce jeu à la fois plus théâtralisée (entre candidat et présentateur, entre commentateurs) et plus théorisée (sans arbres et plus encore riche en paradoxes) en calcul des probabilités.