Pour des fonctions qui fonctionnent

Louis-Marie Bonneval(*)

L'enseignement des mathématiques est en crise. La pénurie d'étudiants scientifiques est un symptôme du malaise qui touche l'ensemble des niveaux d'enseignement. Les observateurs pointent notamment l'absence de sens de cet enseignement pour la majorité des élèves. Citons Yves Chevallard(1) : *L'enseignement actuel ressemble le plus souvent à une visite guidée de monuments mathématiques autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises et reconnues*. Ou Claude Thélot(2) : *Dire que les mathématiques aident à organiser sa pensée ne suffit pas à leur donner du sens pour l'élève*.

Une des causes de cette crise de sens est externe au système éducatif : elle est liée au fantastique développement de l'informatique. Comme le remarque Gérard Kuntz [1], les mathématiques, omniprésentes dans notre société technique, sont en général cachées. Cachées où ? Principalement dans les logiciels qui pilotent la plupart des objets industriels qui nous entourent. Dès lors, en apparence, à part pour les scientifiques qui conçoivent ces objets, plus besoin de mathématiques ! La caissière de supermarché n'a plus à faire d'additions ou de soustractions, la machine lui indique la somme qu'elle doit rendre ! En inventant l'informatique, les mathématiciens ont en quelque sorte scié la branche sur laquelle ils étaient installés !
Cette constatation ne nous dispense pas de réfléchir aux causes internes à notre enseignement. La massification de l'accès au lycée, qui est un incontestable progrès, pose de façon aiguë la question de la diversification des contenus et des méthodes pédagogiques. On ne peut pas extrapoler à 70 % d'une classe d'âge ce qui était destiné à 10 %. En mathématiques comme ailleurs, nous sommes conduits à revoir les schémas qui prévalaient il y a cinquante ans.
Or, de façon dialectique, l'informatique, source de difficultés pour notre enseignement, fournit aussi des outils qui, bien utilisés, peuvent devenir un levier puissant pour les résoudre, en redonnant du sens aux mathématiques.

Quelles mathématiques au lycée pour les non-scientifiques ?

Diversifier l'enseignement des mathématiques suppose de distinguer, sans opposition ni hiérarchisation, les élèves scientifiques des non-scientifiques.
Convenons d'appeler non-scientifiques les élèves qui n'étudieront plus les mathématiques après le baccalauréat (sinon éventuellement les statistiques), autrement dit la grande majorité des élèves de L, de ES, de STG, du lycée professionnel. Les scientifiques quant à eux se trouvent dans les filières S, STI, STL, ES option math. Bien sûr la frontière n'est pas nette : quid de la filière SMS, des élèves de L option math, de la minorité de STG qui préparera une école de commerce, voire des élèves de S qui s'orientent vers les Lettres ou le Droit ?

(*) Professeur au Lycée Victor Hugo de Poitiers.
(1) Colloque Animath de Saint-Flour en 2005.
(2) Rencontre avec l'APMEP en janvier 2004 (BGV n° 115, mars 2004).

Pour les élèves scientifiques, l'absence de sens n'est pas ressentie comme un obstacle : soit ils considèrent les mathématiques comme un jeu de l'esprit, dont ils ont à peu près compris les règles, et alors ils réussissent dans l'institution scolaire, ce qui est fortement valorisé socialement ; soit ils admettent plus ou moins confusément qu'elles leur seront utiles plus tard, et ils acceptent de les subir si c'est le prix à payer pour avoir un métier.
Mais les non-scientifiques ? L'intérêt des mathématiques leur échappe ; comme elles sont pour eux source d'échec, ils les ressentent comme une brimade qu'on leur impose arbitrairement.
Il est de bon ton chez certains collègues de mépriser la question « À quoi servent les mathématiques ? », voire de répondre « à rien ! » à l'élève qui aurait l'impertinence de la poser. Cette attitude m'a toujours choqué : même si l'intérêt d'une formation n'est pas toujours facile à expliquer, et n'apparaît souvent que plus tard, il est légitime qu'un élève s'interroge sur la finalité de ce qu'on lui impose. Ne pas répondre, c'est aggraver son sentiment de brimade. D'autant que s'il pose la même question à ses proches, il peut s'entendre dire : « Moi, en mathématiques j'étais nul, et ça ne m'a pas du tout gêné, ni dans ma vie professionnelle ni dans ma vie personnelle ! ». Et que les médias véhiculent souvent le même discours.
Il est vrai que la réponse n'est pas simple. Parler des sciences physiques n'est pas de nature à convaincre les élèves non-scientifiques ! Mais plutôt qu'un discours, c'est une évolution des pratiques d'enseignement qui peut « rétablir la confiance ». Cette évolution se dessine depuis quelques années, marquée par une ouverture en direction des autres disciplines et une réflexion sur la modélisation (cf. par exemple [5]). Quelques ratés dans les sujets d'examen(3) ne doivent pas remettre en cause cette tendance positive.

Il se trouve que j'ai fait partie entre novembre 2003 et juin 2005 du groupe de travail chargé d'élaborer les programmes de première et terminale STG. En permanence nous avons été confrontés à la question : « Qu'est-ce qui est possible et souhaitable comme formation mathématique pour ces élèves, compte tenu de leurs difficultés vis-à-vis de notre discipline ? ». Il nous a paru de bon sens de cibler prioritairement sur l'information chiffrée, les statistiques et les probabilités. Mais je voudrais ici parler de l'Analyse(4). C'est en effet dans ce domaine que les choix du GEPS ont suscité le plus de débats, alors qu'à mon sens, pour des raisons institutionnelles, nous sommes restés au milieu du gué. Et la question déborde largement la seule série STG.

Pourquoi enseigner les fonctions ?

Au vu des difficultés des élèves en Analyse, on est obligé de se demander : pourquoi enseigne-t-on les fonctions ?
Comme les autres notions mathématiques, les fonctions sont un outil pour résoudre des problèmes.

(3) Cf. le sujet de bac S 2003 en métropole, qui a fait couler beaucoup d'encre ; ou les trop nombreux sujets de bac ES ou STT qui proposent un habillage économique absurde.
(4) Un certain nombre de remarques de cet article sont reprises du document d'accompagnement de STG [8].

Mais soyons clairs : les besoins concernent principalement les sciences « dures » (physique, biologie, informatique, sciences de l’ingénieur, …). Pour les sciences humaines, les besoins en Analyse au niveau du lycée sont très modestes. De plus, en creusant la liaison mathématiques-économie, on est conduit à une certaine circonspection [6].

Quoi qu’il en soit, la valeur formative de l’étude des fonctions dépasse leur aspect immédiatement utilitaire, mais à la condition capitale que les élèves en comprennent le sens : *une fonction exprime la façon dont une grandeur dépend d’une autre*.

Or il me semble que beaucoup d’élèves, même parmi les scientifiques, arrivent au baccalauréat sans avoir vraiment compris cet aspect essentiel.

C’est en Seconde qu’est introduite la notion de fonction dans sa généralité. Habituellement, on part d’une situation « concrète » (ou pseudo-concrète : peu importe qu’elle soit artificielle) pour présenter plusieurs éclairages du concept de fonction : tableau de nombres, courbe, formule. Mais ensuite, trop vite à mon avis, on oublie les situations concrètes pour se focaliser sur des formules ou des courbes données *a priori*.

Dans la pratique de l’enseignement des mathématiques au lycée, j’ai toujours été frappé par la différence d’approche entre les domaines anciens (géométrie, analyse) et les domaines plus récents (statistiques, probabilités, graphes) : les problèmes concernant les seconds sont presque toujours contextualisés, alors que ceux qui concernent les premiers le sont très rarement. Les commentaires des programmes poussent d’ailleurs à cette différenciation : pour les statistiques ou les graphes, on recommande de chercher des situations qui motivent les élèves ; rien de tel en ce qui concerne les fonctions. Plus ou moins consciemment, le professeur de mathématiques délègue ce rôle de contextualisation à son collègue de physique ou d’économie. Or les habitudes de langage, de notation, de pratique sont différentes des nôtres dans ces disciplines, si bien que les transferts se font mal.

Dès lors l’incompréhension subsiste et, pour beaucoup d’élèves, la fonction demeure quelque chose d’étrange, au statut mal défini. Alors ils essaient de se sécuriser en assimilant la fonction soit à une formule, soit à une courbe. Je crois qu’il ne faut pas chercher ailleurs la cause des confusions omniprésentes dans les copies :

- entre f et $f(x)$ (une fonction, c’est une formule avec des x) : « $\dfrac{1}{x}$ est décroissante », « x^2 est positive », … ;
- entre f et C_f (une fonction c’est une courbe) : « la fonction coupe l’axe des x », « la parabole change de signe », « la courbe est croissante », « la droite est linéaire », … ;
- par conséquent entre C_f et $f(x)$: « x^3 passe par O », « la droite $2x + 1$ », « la parabole x^2 », …

Changer de cadre

On sait l’importance des *changements de cadre* pour la compréhension d’un concept [7]. Avec les fonctions, on dispose de trois cadres : numérique-algébrique, fonctionnel, géométrique-graphique. Confronter ces trois cadres ne signifie nullement les confondre.

Par exemple, il me paraît formateur de travailler sur l'équivalence des formulations suivantes (où P désigne la parabole représentant la fonction « carré ») :

- *Cadre numérique-algébrique* : « Un carré est toujours positif ».
- *Cadre fonctionnel* : « La fonction « carré » est positive sur **R** ».
- *Cadre géométrique-graphique* : « P est tout entière au-dessus de l'axe des abscisses ».

Il est bon à cette occasion de demander : pourquoi on n'écrit pas « la fonction carrée » mais « la fonction “ carré ” » (faudrait-il dire « la fonction “ carré de ” » ?) ; comment le mot « toujours » de la première phrase est traduit dans les deux autres phrases ; pourquoi des phrases comme « x^2 est positive sur **R** » ou « la parabole est positive » ou « la fonction “ carré ” est au-dessus de l'axe des abscisses » n'ont pas de sens…

De même, les trois questions ci-dessous sont équivalentes, mais selon mon expérience la deuxième aura un taux de réussite plus faible que la troisième, qui elle-même aura moins de succès que la première :

- *Cadre numérique-algébrique* : « Résoudre l'équation $f(x) = 0$ ».
- *Cadre fonctionnel* : « Chercher les antécédents de 0 par la fonction f ».
- *Cadre géométrique-graphique* : « Chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ».

Le fait de donner un nom aux fonctions de référence (carré, inverse, cube, racine carrée, valeur absolue) est une innovation relativement récente, qui fait parfois sourire les mathématiciens chevronnés. C'est pourtant un progrès au plan didactique parce que cela permet de bien distinguer fonction et image. D'autres fonctions bénéficient d'ailleurs de ce privilège : cos, sin, tan, exp, ln, int. Je me demande même si on ne pourrait pas aller plus loin, en introduisant les notations car, inv, cub, rac, abs (les notations rac et abs sont d'ailleurs utilisées en informatique, et permettraient peut-être de débloquer certains obstacles résistants concernant la racine carrée et la valeur absolue).

De même, le fait de disposer d'un nom pour la courbe (parabole, hyperbole, cubique, demi-parabole, V, …) permet de distinguer fonction et courbe. Toute médaille ayant son revers, cela peut aussi engendrer des malentendus : certains élèves semblent croire que toute parabole représente la fonction « carré », que toute hyperbole représente la fonction « inverse » !

Les jeunes manquent de repères

Cette distinction entre fonction et courbe me paraît capitale, non seulement parce que les deux notions n'ont *a priori* rien à voir, mais surtout parce que leur rapprochement nécessite cet intermédiaire obligé qu'est le *repère*(5). Or il y a beaucoup à faire pour que le rôle du repère soit compris et maîtrisé. Un peu d'histoire des mathématiques serait certainement éclairant pour les élèves : avant Descartes, personne n'avait eu l'idée d'associer une courbe et une équation.

Je voudrais souligner quelques aspects qui méritent qu'on s'y attarde :

(5) Je me limite bien sûr aux repères cartésiens. Mais les autres possibilités (coordonnées polaires, représentations paramétriques) renforcent encore la nécessité de bien distinguer fonction et courbe.

• À toute fonction on peut associer une courbe, alors qu'à une courbe on ne peut pas toujours associer une fonction : un cercle ne peut pas représenter une fonction ; toute fonction affine est représentée par une droite, mais une droite ne représente une fonction que si elle coupe l'axe des ordonnées ; toute fonction trinôme est représentée par une parabole, mais une parabole ne représente une fonction que si son axe est parallèle à l'axe des ordonnées. Banalités ? Posons donc la question à nos élèves…

• Il y a dans nos manuels d'Analyse une tendance abusive à choisir un repère orthonormé(6). Dans les sciences appliquées les repères sont toujours orthogonaux (c'est nettement plus commode), mais très rarement orthonormés : les deux grandeurs représentées (qu'il est d'ailleurs bon d'indiquer explicitement sur chaque axe) n'étant pas en général de même nature, il n'y a aucun lien entre les deux unités. Notons à ce propos que les tableurs choisissent automatiquement la fenêtre la mieux adaptée, alors que pour la calculatrice c'est à l'utilisateur de faire ce choix : il y a là une compétence à développer.

• On sait les difficultés que posent les changements de repère. Il n'est pas question en section non-scientifique d'aborder les changements de direction d'axes (sinon *l'échange des axes*, qui peut être très instructif). Mais on peut travailler sur le *changement d'origine* (qui pour une même fonction modifie l'emplacement de la courbe) et sur les *changements d'unités* (qui pour une même fonction modifient la forme de la courbe). Ces deux démarches sont à rapprocher du *choix de la fenêtre* évoqué ci-dessus. Elles sont l'occasion d'observer qu'une même fonction est représentée dans des repères différents par des courbes différentes, mais que ces courbes ont les mêmes propriétés fondamentales (signe, sens de variation, extremums, …). Ainsi, pour une fonction donnée, deux élèves voisins n'auront peut-être pas la même courbe sur l'écran de leur calculatrice (ce qui étonne les débutants), mais ils y liront les mêmes propriétés.

• La ressemblance en français entre les deux mots *expression* et *équation* engendre des confusions entre *l'expression d'une fonction* et *l'équation d'une courbe*. Combien d'élèves parlent ainsi de « la droite $2x + 1$ » ? Ou écrivent x^2 à côté de la parabole représentant la fonction « carré » (défaut qu'on retrouve malheureusement dans certains logiciels et sur certaines calculatrices) ? Il est utile de travailler sur les écritures équivalentes de l'équation d'une courbe(7) (d'une droite pour commencer) pour souligner que c'est en isolant y (si on peut) qu'on met en évidence l'éventuelle fonction représentée. Pourquoi d'ailleurs ne pas écrire de temps en temps $f(x) = y$ ou $f(x) - y = 0$, au lieu de $y = f(x)$?

• Les copies révèlent que beaucoup d'élèves interprètent l'égalité $y = f(x)$ non pas comme une équation mais comme une identité (il y aurait d'ailleurs beaucoup à dire sur l'habitude de sous-entendre les quantificateurs universels). Pour leur faire sentir

(6) Faut-il dire orthonormal ou orthonormé ? À Byzance on discutait du sexe des anges, alors que les Ottomans assiégeaient la ville…

(7) L'équation ou une équation ? Autre débat byzantin. J'ai envie de dire qu'une même équation peut s'écrire de plusieurs façons équivalentes.

que y n'est pas toujours égal à $f(x)$, il peut être utile de demander où sont les points tels que $y < f(x)$ ou $y > f(x)$. Les systèmes d'inéquations à deux inconnues sont formateurs notamment parce qu'ils montrent que si une équation caractérise une courbe du plan, une inéquation caractérise une zone du plan.

• Les lettres x et y sont universellement choisies pour désigner respectivement l'abscisse et l'ordonnée(8) : par conséquent si la fonction f étudiée exprime d en fonction de t, l'équation de la courbe est bien $y = f(x)$ et non pas $d = f(t)$.

Et les grandeurs ?

Aux trois cadres cités plus haut, je voudrais ajouter un quatrième : les grandeurs [2]. Les mathématiciens du XXe siècle, notamment l'école Bourbaki, ont voulu évacuer les grandeurs du champ des mathématiques. On se rend compte aujourd'hui qu'en éloignant les mathématiques de la réalité physique, cela a créé des difficultés de compréhension au niveau de l'enseignement. C'est pourquoi d'ailleurs les grandeurs reprennent explicitement droit de cité à l'école et au collège.
Répétons-le : ce sont les grandeurs qui donnent du sens à la notion de fonction. Dans certaines sciences appliquées, on désigne parfois par « grandeur explicative » et « grandeur expliquée » ce que nous appelons « variable » et « image » : ce langage peut être éclairant.
Considérons par exemple la fonction f qui exprime le résultat d'exploitation d'une entreprise en fonction de la quantité produite. Son signe a une interprétation simple : selon que f est positive ou négative, l'entreprise fait un bénéfice ou une perte. Son sens de variation a aussi une interprétation simple : selon que f est croissante ou décroissante, une augmentation de la production améliore ou détériore le résultat d'exploitation.
Une compétence à mon avis essentielle est rarement testée : la capacité à nommer une fonction qui n'est pas nommée dans l'énoncé. Prenons l'exemple classique de la boîte : *partant d'une feuille de carton rectangulaire de dimensions* L *et l données numériquement, on replie sur les quatre bords une bande de largeur x ; on cherche x pour que le volume de la boîte (ouverte) ainsi obtenue soit maximal*. Trouver la formule $V = x(L - 2x)(l - 2x)$ témoigne d'un savoir-faire important ; appeler f la fonction qui à x associe V témoigne d'un autre savoir-faire, décisif pour résoudre le problème, et montrant une bonne compréhension de la notion de fonction.
Développer ce savoir-faire est d'autant plus important qu'il est en général méconnu dans les sciences appliquées. Dans l'exemple précédent, l'utilisateur peut dire « le volume de la boîte est fonction de la largeur de la bande », mais n'éprouve pas nécessairement le besoin d'écrire $V = f(x)$. Ainsi, beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que les fonctions sont omniprésentes dans les sciences appliquées, tout simplement parce qu'*ils ne les voient pas écrites* ! De là à penser que ce qu'ils font en mathématiques avec les fonctions ne sert à rien, il n'y a qu'un pas, que beaucoup n'hésitent pas à franchir ! Une pratique courante consiste à écrire $V = V(x)$: certes

(8) C'est l'une des raisons pour laquelle que je trouve désastreuse l'habitude d'écrire les équations différentielles sous la forme $y' = ay$, alors qu'on dispose de l'excellente écriture $f' = af$. Heureusement, les non-scientifiques n'ont pas ce souci au lycée !

c'est plus économique, puisqu'il n'y a pas besoin de la lettre f. Mais cela confond la fonction et l'image, ce qui génère les incompréhensions décrites plus haut. Surtout, cela cantonne la notation f au seul champ mathématique, bloquant ainsi le transfert indispensable d'une discipline à l'autre. C'est pourquoi, plutôt que d'adopter l'écriture $\mathrm{V} = \mathrm{V}(x)$, il me paraît bien préférable que le professeur de mathématiques explicite la fonction en écrivant $\mathrm{V} = f(x)$.
Observons aussi sur cet exemple que le choix de la lettre x pour désigner la largeur de la bande est un coup de pouce pour faciliter la modélisation. Bien des élèves ont beaucoup de mal à reconnaître une fonction quand la variable ne s'appelle pas x : il est indispensable de les y entraîner, en choisissant de temps en temps d'autres lettres.
Si le travail sur les fonctions se fait à partir de problèmes, le nom de la variable s'impose en général : comme en physique, on choisit une lettre évocatrice, souvent l'initiale de la grandeur considérée.

Comprendre le sens de variation

Le sens de variation est incontestablement la notion la plus importante concernant les fonctions. Or la plupart des élèves de Première non-scientifique ont beaucoup de mal à comprendre de quoi il s'agit. Beaucoup confondent sens de variation et signe.
L'interprétation graphique est bien entendu fondamentale. Certains collègues répugnent à dire « la courbe monte ». Cela présente pourtant l'avantage de permettre une formulation dans le cadre graphique, distincte de la formulation dans le cadre fonctionnel (« la fonction est croissante »), comme pour les autres propriétés des fonctions : « la fonction est positive » se traduit par « la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses » ; « la fonction est impaire » se traduit par « la courbe admet l'origine comme centre de symétrie » ; « la fonction est dérivable » se traduit par « la courbe admet une tangente (non verticale) », etc.

Mais l'interprétation graphique ne dit pas en quoi cette notion est importante. Beaucoup d'élèves étudient le sens de variation puisqu'on le leur impose, mais se demandent pourquoi diable on se donne tout ce mal.
Avant de se doter d'outils performants pour étudier le sens de variation, il me semble nécessaire de prendre le temps de mûrir cette notion, en travaillant sur le sens (!) plus que sur la technique : une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante renverse l'ordre. Autrement dit, le sens de variation indique si une augmentation de la variable suscite une augmentation ou une diminution de l'image.
Bien sûr, cette compréhension de base devrait être acquise en fin de Seconde : chacun sait que pour les élèves non-scientifiques, ce n'est pas le cas.
D'ailleurs, même pour les élèves scientifiques j'ai quelques doutes. Une réaction de mes élèves de terminale S il y a quelques années me paraît révélatrice. Après avoir introduit la fonction ln, j'avais proposé en évaluation un exercice sur la magnitude d'une étoile, donnée en fonction de son éclat par la formule $m = k \ln(\mathrm{E}/\mathrm{E}_0)$ où k est une constante négative. J'avais posé la question suivante, qui me semblait facile : montrer que plus l'éclat est grand plus la magnitude est petite. Or non seulement cette question avait été très peu traitée, mais quand à la correction j'avais parlé de fonction décroissante, j'avais déclenché une réaction de stupeur ! Non seulement mes

élèves ne voyaient pas de décroissance, mais beaucoup d'entre eux ne voyaient pas de fonction !
Il faut en Première multiplier les activités mettant en œuvre deux grandeurs : l'impôt est fonction croissante du revenu ; la pression atmosphérique est fonction décroissante de l'altitude ; le coût total de production est fonction croissante de la quantité produite ; l'offre est fonction croissante du prix unitaire, la demande est fonction décroissante du prix unitaire ; la taille d'un enfant est fonction croissante de son âge … Demander aux élèves d'expliquer les phrases précédentes me paraît très formateur.
Voici par exemple quelques énoncés :
1) *On considère un tétraèdre régulier, on appelle x la longueur de son côté en cm, et* $f(x)$ *son volume en* cm^3. *Quel est le sens de variation de la fonction* f *?*
Pour répondre on n'a pas besoin de formule : il est clair que si le côté augmente le volume augmente. Si on en a le temps et le désir, on peut ensuite chercher la formule (qui n'a rien d'immédiat), et prolonger l'étude de f dans les cadres algébrique, fonctionnel, graphique. Mais il serait regrettable d'omettre cette première question.
2) *On verse de l'eau dans un Erlenmeyer (verre conique). On note v le volume d'eau (en* cm^3*), et* $f(v)$ *la hauteur de l'eau (en cm). Quel est le sens de variation de* f *?*
Même commentaire : pas besoin de formule ni de courbe pour répondre.
2bis) *On verse de l'eau dans un Erlenmeyer. On note h la hauteur de l'eau, et* $g(h)$ *le volume d'eau (en* cm^3*). Quel est le sens de variation de* g *?*
En comparant les questions 2 et 2bis, on comprend pourquoi deux fonctions réciproques l'une de l'autre ont le même sens de variation. Si on poursuit l'étude par la recherche des formules, la présentation au tableur sur deux colonnes pourra grandement faciliter cette compréhension. Quant à l'étude graphique, elle montre comment l'échange des deux axes (qui restent identifiés par la grandeur qu'ils représentent) permet de passer d'une courbe à l'autre.

Dans les exemples ci-dessus, comme dans beaucoup de situations pratiques, la variable comme l'image sont positives, et la fonction est monotone : il ne faut pas négliger ces situations sous prétexte qu'elles sont trop simples. Le problème peut être de résoudre une équation de la forme $f(x) = k$. Si l'on ne sait pas résoudre exactement cette équation, on peut la traiter de façon approchée, au tableur ou à la calculatrice, par observation graphique et balayage de plus en plus fin.

Mais, bien sûr, les problèmes d'*optimisation*, comme celui de la boîte évoqué plus haut, sont les plus motivants. Rechercher un maximum ou un minimum par observation de la courbe et/ou tabulation de la fonction permet de faire une conjecture, et motive la recherche d'une démonstration si celle-ci est accessible.

Les difficultés de la dérivation

Venons-en à la dérivation. J'ai le sentiment que beaucoup de professeurs de mathématiques, surentraînés à sa pratique, en sous-estiment la difficulté pour les débutants. Or, pour des élèves peu à l'aise en mathématiques, les multiples obstacles en obscurcissent complètement le sens.

1) La notion de nombre dérivé

Classiquement le nombre dérivé est défini comme limite d’un taux d’accroissement. Or trente-cinq années d’enseignement en lycée m’ont convaincu qu’enseigner en section non-scientifique la notion de limite d’une fonction est une mission impossible. Quelle que soit la définition qu’on tente d’en donner, elle n’est pas comprise au point de permettre des raisonnements. Dès lors le chapitre « limites » est un fastidieux catalogue de recettes où l’élève doit tout apprendre sans comprendre : belle formation à l’esprit scientifique ! Pour faire « passer la pilule », on lui conseille de se fier à son intuition (ce qui n’est pas la consigne habituelle en mathématiques) : hélas, bien souvent ce que lui souffle son intuition est faux !

Historiquement, le calcul différentiel a précédé d’un siècle et demi la formalisation de la notion de limite. Cela suggère que la limite est une notion plus difficile, mais aussi qu’on peut faire des choses intéressantes sans elle.

Si l’objectif est uniquement de définir le nombre dérivé, il est plus satisfaisant de court-circuiter complètement la notion de limite, et de considérer la tangente comme une notion première. Il y a bien d’autres notions fondamentales qu’on ne définit pas dans le secondaire : le nombre, le point, la droite, la fonction, la probabilité, … Cela n’empêche pas de les utiliser, et de raisonner. Le professeur peut d’ailleurs très bien dire « la tangente est la position limite de la sécante », et le montrer sur une animation, sans détailler davantage.

Quel que soit le mode d’introduction, il faut donner aux élèves le temps de comprendre ce qu’est le nombre dérivé (d’autant que, pour beaucoup d’élèves de Première non-scientifique, la notion de coefficient directeur n’est pas acquise). Des activités bien conçues peuvent lui donner du sens (vitesse, coût marginal, petits taux d’évolution, propension à consommer, …), mais cela suppose d’en prendre le temps.

2) La notion de fonction dérivée

Le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée présente au moins deux obstacles, que les élèves même scientifiques ont beaucoup de mal à franchir :

Le passage de $f'(a)$ à $f'(x)$: le x qui était voisin de a dans la phase d’introduction du nombre dérivé, change de statut et se substitue tout-à-coup au a. Le fait de poser $x = a + h$ ne résout pas vraiment cette difficulté : ce h provisoire dont on ne parlera plus jamais reste incongru pour beaucoup d’élèves. Pour compliquer encore, la lettre a évoque irrésistiblement à certains un coefficient directeur ! C’est pour contourner ces difficultés que le programme de STG a proposé d’écrire $f'(x_A)$.

Le passage de $f'(x)$ à f' : les élèves cherchent une courbe (puisque, pour beaucoup d’entre eux, une fonction, c’est une courbe) et ils ne la voient pas. Certains croient que f' est représentée par la tangente !

Ce passage se fait trop vite. C’est pourquoi le programme de STG a voulu laisser un temps de maturation entre l’introduction du nombre dérivé (en Première) et celle de la fonction dérivée (en Terminale).

3) Les problèmes de langage

Je suis très surpris que des collègues, par ailleurs pointilleux voire intégristes quant au langage, confondent couramment fonction et image, particulièrement quand il

s'agit de dérivation. Dire « la dérivée de x^2 est $2x$ » est un abus de langage, bénin si l'interlocuteur est un collègue, catastrophique si c'est un élève de lycée :
• cela confond fonction et image, et à un moment de l'apprentissage où la notion de fonction dérivée est encore obscure. Bien des élèves écrivent ainsi $f(x)'$, ce qui leur fait faire des erreurs ; qui n'a lu dans les copies : $f(2) = 1$ donc $f(2)' = 0$?
• cela contrevient à un principe universel en mathématiques : une lettre muette peut être remplacée par n'importe quel nombre. De la phrase incriminée un élève serait en droit de déduire que « la dérivée de 9 est 6 » !
Certes une formulation correcte est plus lourde : mais c'est à nous enseignants de trouver comment dire les choses de façon simple et juste. Par exemple : « Pour la fonction “ carré ”, le nombre dérivé en x est $2x$ ».
Un autre obstacle : l'habitude regrettable de parler de *dérivée en un point*. En première non-scientifique, certains élèves confondent point et nombre, et ont du mal à comprendre qu'un point du plan a deux coordonnées même s'il est situé sur l'un des axes (certains élèves semblent même croire que le « point d'abscisse » est un objet mathématique, de même que la « droite d'équation » !). Or dans les deux expressions « tangente en un point », « nombre dérivé en un point », le mot *point* n'a pas le même sens : dans la première il désigne un point du plan, dans la deuxième il désigne un nombre, à savoir l'abscisse du précédent. On voudrait pousser l'élève à l'erreur qu'on ne s'y prendrait pas autrement ![9]

4) Les difficultés techniques
Étudier le sens de variation d'une fonction à l'aide de la dérivée suppose au moins trois compétences :

- Connaître les formules de dérivation (formules à apprendre sans comprendre, ce qui n'est guère formateur).
- Les appliquer sans erreur (ce qui pose des difficultés aux élèves peu à l'aise en calcul littéral).
- Étudier le signe de la dérivée (ce qui met en jeu à nouveau des savoir-faire antérieurs mal maîtrisés).

Autant dire que la probabilité d'erreur est proche de 1 !
Devant tant d'obstacles, l'élève moyen perd le fil de ses calculs et oublie le sens de ce qu'il fait.

---

(9) Les élèves scientifiques quant à eux ont une autre difficulté à gérer : la notation de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, universellement utilisée dans les sciences appliquées, mais mal-aimée des professeurs de mathématiques contemporains, alors qu'elle est riche de sens. Curieusement, ces mêmes mathématiciens ne trouvent rien à redire au dx dans la notation des intégrales. Comble d'incohérence, ils pratiquent dans les équations différentielles la notation hybride y' déjà évoquée plus haut, qui est une horreur : elle entretient la confusion entre fonction et image, faisant croire qu'on dérive un nombre et non une fonction, ce qui engendre entre autres des difficultés lors des changements de variable (contrairement à la notation de Leibniz, très commode de ce point de vue).

Faut-il enseigner la dérivation ?

Au vu de ces difficultés, on peut se demander s’il est vraiment nécessaire en section non-scientifique d’enseigner la dérivation.
L’argument principal en faveur de la dérivée est qu’elle fournit l’outil-clé pour étudier le sens de variation d’une fonction.
Cet argument, auquel je souscris pour les élèves scientifiques, me paraît très contestable pour les non-scientifiques. Il suppose en effet deux préalables, dont je doute qu’ils soient réalisés pour la majorité des élèves :

- que les élèves aient compris ce qu’est le sens de variation d’une fonction, qu’ils le distinguent de son signe, et qu’ils voient l’intérêt de l’étudier. Sinon, à quoi bon se doter d’une grosse artillerie pour cela ?
- qu’ils soient plus performants dans le calcul d’une dérivée et l’étude de son signe que dans l’étude directe d’un sens de variation. Pour beaucoup d’entre eux, les difficultés techniques évoquées ci-dessus atténuent singulièrement l’efficacité de l’outil.

De plus, l’usage de la dérivation suppose d’admettre beaucoup de choses : la notion de limite, les formules de dérivation, le théorème associant au signe de la fonction dérivée le sens de variation de la fonction primitive. Si ce dernier théorème peut être expliqué graphiquement, ce n’est pas le cas pour la dérivation d’une somme, d’un produit ou d’un quotient ! Or plus l’élève doit admettre sans comprendre, plus il se construit une image dogmatique des mathématiques, contraire à nos objectifs de formation.

Une approche alternative

Jusque dans les années 1970 on ne disposait pas d’autre outil pour étudier le sens de variation d’une fonction que le signe de sa dérivée (et quelques outils algébriques que j’évoque plus loin). Au terme d’une étude souvent laborieuse, la courbe apparaissait comme la récompense des efforts consentis : c’est elle en effet qui résumait de façon visuelle les propriétés de la fonction. On calculait les quelques images utiles, mais on n’avait pas les moyens de tabuler complètement une fonction sur un intervalle. Les professionnels qui en avaient besoin y consacraient un temps considérable, à grands renfort de tables de logarithmes…
Cette problématique a été complètement renouvelée par l’informatique. Il est aujourd’hui facile, avant toute étude, de tabuler une fonction (avec le pas qu’on veut) et de la représenter graphiquement (dans la fenêtre qu’on veut). On dispose ainsi d’outils puissants pour résoudre les problèmes.
Reprenons l’exemple de la boîte évoqué plus haut. Classiquement on dérive la fonction f pour étudier ses variations, ce qui met en évidence le maximum. Mais une tout autre démarche permet de résoudre le problème : au tableur ou à la calculatrice, on tabule la fonction et on la représente, ce qui met également en évidence le maximum. Certes on l’obtient de façon approchée, mais on peut affiner la précision en changeant le pas de la table : cela satisfait l’utilisateur tout autant qu’une valeur exacte, dont il s’empresserait de chercher une valeur approchée décimale !

À mon avis, l'utilisation du tableur et de la calculatrice pour étudier les fonctions devrait à terme réserver la dérivation aux élèves scientifiques du lycée, pour qui, bien sûr, le calcul différentiel (et intégral) est toujours indispensable, car c'est un outil *théorique* incomparable. Je veux parler des élèves de S, de STI, de spécialité math en ES et L (c'est le cas actuellement en L, mais pas en ES). Et pour les bacheliers STG, STL, SMS qui en ont besoin, cela pourrait être abordé dans l'enseignement supérieur.

Des savoir-faire nouveaux

Dès lors, pour les non-scientifiques, le véritable enjeu de la formation se déplace. On peut lister une première série de compétences :
- sur calculatrice : savoir entrer une fonction, la tabuler, choisir une fenêtre adaptée pour la représenter.
- sur tableur : savoir entrer une formule, la recopier, construire un graphique.

Cela n'a rien d'immédiat et demande par conséquent un apprentissage. Cet apprentissage, long, progressif, méthodique, est trop souvent négligé. Il faut dire qu'il présente pour l'enseignant des difficultés concrètes : pour la calculatrice, la diversité des modèles ; pour le tableur, la difficulté pour accéder régulièrement en demi-classe à une salle d'informatique fiable. Il est néanmoins nécessaire : ceux qui parlent de « presse-bouton » n'ont probablement pas beaucoup pratiqué ces outils !

Une deuxième série de compétences consiste à :
- savoir interpréter les informations de la calculatrice ou du tableur : images, antécédents, signe, sens de variation, extremums.
- savoir passer du cadre graphique au cadre numérique et inversement (comparer une table de valeurs et une courbe, placer des points, lire des images et des antécédents, lire un sens de variation, repérer un extremum, …).

Ces outils permettent d'ailleurs de traiter des problèmes rarement abordés parce que le calcul différentiel y est malaisé :
- les fonctions dont la dérivée est difficile à calculer, ou de signe difficile à déterminer. Par exemple les problèmes de trajet minimal, comme la réfraction de la lumière : *quel est le trajet d'un rayon lumineux qui traverse deux milieux successifs, connaissant la vitesse de la lumière dans chaque milieu et sachant qu'elle minimise la durée du parcours ?* On est conduit à une fonction f de la forme $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$, dont l'étude par la dérivation est assez laborieuse.
- les fonctions de deux variables. Elles sont évoquées en spécialité de Terminale ES via les surfaces, en Terminale STG via la « programmation linéaire », où seules sont envisagées des fonctions linéaires. Le tableur permet de traiter une fonction de deux variables à peu près comme une fonction d'une variable, alors que par le calcul différentiel on a besoin d'outils nouveaux.

Fait-on vraiment des mathématiques ?

Mais, dira-t-on peut-être, si on se contente d'observer, on ne fait pas de mathématiques.
À cela on peut répondre à deux niveaux :

1) Savoir utiliser intelligemment les outils de calcul, c'est faire des mathématiques. On sait le rôle essentiel qu'ont joué dans l'histoire des mathématiques les instruments de calcul : règle et compas, abaques, bâton de Jacob, rapporteur, astrolabe, sextant, tables de logarithmes, différentiateurs, intégrateurs, règle à calcul, … Ces instruments, issus d'une réflexion théorique, ont permis d'engranger des observations et de résoudre des problèmes ; ces avancées ont à leur tour suscité de nouvelles réflexions, qui ont permis d'inventer de nouveaux instruments, etc. L'ordinateur est une superbe illustration de la phase actuelle de ce processus : issu de travaux théoriques difficiles, il offre à la réflexion un champ immense et sans cesse renouvelé, par ses capacités fantastiques d'expérimentation et de vérification. Il permet de faire des mathématiques expérimentales, ce que recommandent d'ailleurs les programmes actuels. Il permet de **résoudre des problèmes**, ce qui est bien la finalité des mathématiques.
Mais, redisons-le, son usage raisonné suppose un apprentissage : il n'a rien d'immédiat, comme en témoigne la difficulté qu'ont à s'y mettre bon nombre de collègues…

2) Mais en mathématiques les observations doivent être validées par le raisonnement. En effet l'un des objectifs fondamentaux de notre enseignement est d'apprendre à **raisonner juste**, ce qui suppose de soumettre à la critique l'impression première, de façon à faire le tri entre les intuitions justes et les intuitions fausses.
Pour en rester au domaine de l'Analyse, on sait bien que, si ce qu'on voit à l'écran (table ou courbe) permet des *conjectures*, cela ne suffit pas à *démontrer* les propriétés de la fonction. Et ceci pour au moins trois raisons, qu'on peut résumer par trois mots : approximation, interpolation, extrapolation.

- *Approximation* : les valeurs calculées sont nécessairement arrondies(10). Ainsi un maximum qui semble égal à 2 peut être en réalité $\frac{31}{16}$, ce qui change tout quant au nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1{,}95$.
- *Interpolation* : la calculatrice utilise un pas de tabulation ; elle ne peut donc rien indiquer de ce qui se passe entre deux valeurs calculées(11). Par exemple l'observation sur [−5 ; 5] de la fonction $x \mapsto x^2 + \dfrac{\sin(10\pi x)}{10}$ suggère un tableau de variation faux.
- *Extrapolation* : une représentation nécessairement bornée ne dit rien de ce qui se passe en dehors de la fenêtre de visualisation. Par exemple l'observation sur

(10) À cet arrondi numérique se superpose pour la courbe un arrondi graphique dû à la discrétisation de l'écran en pixels.
(11) Ici encore la discrétisation de l'écran se superpose à la discrétisation du calcul.

[−5 ; 5] de la fonction $x \mapsto x^2 - \dfrac{x^4}{1000}$ suggère un tableau de variation faux.

C'est pourquoi l'utilisation des outils informatiques suppose des objectifs didactiques clairs : faire des mathématiques, c'est essayer d'expliquer le monde, ce n'est pas fournir des recettes de cuisine d'origine inconnue. Chaque fois qu'on peut expliquer comment fonctionne le logiciel, il faut le faire. Par exemple les tableurs disposent d'une fonction « solve » pour résoudre les équations : notre rôle est d'expliquer le principe des algorithmes de résolution, à savoir le balayage de plus en plus fin, éventuellement en le faisant pratiquer « à la main » sur un exemple, pour combattre l'aspect « boîte noire » qui contrevient à nos objectifs de clarté.
Bien entendu, on ne dispose pas toujours des outils de démonstration qui seraient nécessaires, et il faut parfois admettre que ce que suggère la courbe ou le tableau est bien vrai. Il est alors capital en termes de formation que les élèves sachent distinguer ce qui est démontré et ce qui est admis.
Notons à ce propos que trop de manuels entretiennent le flou sur le statut des affirmations : s'agit-il de *définition*, de *conjecture*, ou de *théorème*(12) ? S'il s'agit d'un théorème, est-il démontré ou admis ? S'il est admis, est-ce parce que sa démonstration est évidente (danger : bien des choses qui semblent évidentes sont fausses !), ou trop difficile, ou sans intérêt (selon quels critères) ? Les réponses diffèrent et évoluent selon le niveau d'enseignement : qu'on pense par exemple à l'équation $f(x) = k$ déjà évoquée. Il y a là de vrais enjeux didactiques.
Le fait d'être obligé d'admettre certains résultats est ennuyeux quant à l'objectif de développer le sens critique. Mais c'est aussi ce qui motive, pour les scientifiques, l'introduction de ces outils théoriques qui en Analyse s'appellent précisément *limites*, *continuité*, *dérivation*, …

D'autres outils que la dérivation

Pour étudier le sens de variation il existe aussi d'autres outils, qui ne demandent pas d'admettre autant de choses que le calcul différentiel :

1) Les définitions
Pour les fonctions de référence, il me paraît essentiel d'établir leur sens de variation par les définitions. C'est en effet une façon de faire vivre ces définitions, de pratiquer les inégalités, de donner un nouvel éclairage (graphique et fonctionnel) à des règles antérieures concernant les inégalités. Se contenter d'observer les courbes serait contre-formateur pour les raisons signalées ci-dessus.
Au-delà des fonctions de référence, le calcul différentiel n'est-il pas un outil disproportionné pour étudier le sens de variation de fonctions comme $x \mapsto \sqrt{x+1}$ ou $x \mapsto \dfrac{3}{x}$? La simple application de la définition permet de conclure.
Pour les fonctions sin, cos, tan, la simple observation du cercle trigonométrique indique leur sens de variation sans qu'il soit besoin de dériver.

(12) D'aucuns dissertent, paraît-il, sur la nuance entre proposition et théorème. Ce doit être encore à Byzance…

Dans le même ordre d'idées, pour trouver le maximum de la fonction $x \mapsto 1-x^2$ ou le minimum de $x \mapsto (x-3)^2+2$, il serait bien maladroit de dériver, alors que l'extremum est en évidence dans l'écriture de la fonction.

2) Les changements d'écriture et les fonctions associées

Le programme de Première ES comporte un chapitre dit « fonctions associées » souvent considéré comme difficile et peu utile.
Si on ne dispose pas de la dérivation, le deuxième argument tombe.
Quant au premier, je pense que si on y passe le temps nécessaire, qui est long, et qu'on choisit des activités « concrètes », on dispose d'un outil performant pour donner du sens aux fonctions.
On peut ainsi, à partir de la fonction « carré », étudier toutes les fonctions trinômes. On a dénoncé à juste titre la « trinomite »(13). Mais il ne faudrait pas jeter le bébé avec l'eau du bain ! Apprendre à écrire de plusieurs façons équivalentes une fonction trinôme, de façon à choisir l'écriture la mieux adaptée au problème posé, me paraît très formateur. De plus cela montre l'intérêt du calcul algébrique, et notamment des identités remarquables. Les fonctions de coût du second degré, par exemple, permettent des activités riches : pour étudier le signe du résultat d'exploitation on peut utiliser l'écriture factorisée, pour maximiser le profit on peut utiliser l'écriture canonique… Le second degré est aussi l'outil de l'ajustement par moindres carrés, dont la problématique me paraît très formatrice (et dont l'étude est grandement facilitée par le tableur).
De même, la forme canonique d'une fonction homographique ramène son étude à celle de la fonction « inverse », et met en évidence toutes les propriétés utiles.

3) Les opérations sur les fonctions, notamment la composition

Il est immédiat de trouver le sens de variation de kf connaissant celui de f, et d'établir que la somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) est croissante (respectivement décroissante). On peut ainsi montrer sans dériver que la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Quant à la composition des fonctions, elle est réputée difficile. Mais pourquoi ? Principalement parce que la notion de fonction n'est pas perçue pour ce qu'elle est : la façon dont une grandeur dépend d'une autre. Si ce point de vue est acquis, il n'est pas difficile de comprendre que si x détermine y et que y détermine z, alors x détermine z. D'autant que le tableur permet de le visualiser, en attribuant une colonne à chacune des trois *grandeurs, ce qui montre l'enchaînement des formules*.
Mieux : si le sens de variation de chaque fonction est connu, le sens de la variation de la composée est connu. Si je sais que quand x augmente y diminue, et que quand y diminue z diminue, j'en déduis que quand x augmente z diminue. On démontre ainsi par exemple que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est décroissante : il suffit de poser $y = 1-x$

(13) N'est-ce pas de la « fonctionnite » de proposer des litanies de fonctions abstraites à étudier hors contexte ?

et $z=\sqrt{y}$, et de faire le petit raisonnement ci-dessus, que le tableur rend limpide.
Cela suppose de varier les exemples, de composition mais aussi de décomposition.
Mais là encore, si on s'appuie sur des situations « concrètes » et qu'on prend le temps nécessaire (on dispose du temps récupéré sur la dérivation) avec les outils adéquats, on y arrive et cela a du sens.

Les moyens de travailler autrement

Ce qui précède suppose bien entendu de pouvoir utiliser largement le tableur. Pour cela il faut pouvoir accéder régulièrement à une salle informatique fiable, ce qui n'est malheureusement pas le cas dans tous les établissements.
Cela suppose aussi de pouvoir travailler en demi-classe. En ce qui concerne la section STG, nous avons à plusieurs reprises interpellé la DESCO à ce sujet, avec l'appui de l'inspection générale, de l'APMEP, des syndicats : nous n'avons pu obtenir de dédoublement. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle le CSE, bien que portant une appréciation positive sur le contenu du programme de Première, a voté contre en juin 2004 (mais son avis n'étant que consultatif, le ministère est passé outre…).

La poursuite des études

Une minorité d'élèves de sections non-scientifiques auront à pratiquer des mathématiques après le baccalauréat. C'est le cas s'ils vont en faculté de sciences économiques, en classe préparatoire tertiaire, en BTS ou IUT d'informatique, … Il faut que ces bacheliers puissent suivre ces études supérieures. C'est pourquoi, si évolution il doit y avoir, elle ne peut pas être brutale ni isolée.
Pour la section STG, le GEPS a voulu privilégier la qualité sur la quantité, partant du principe qu'« une tête bien faite vaut mieux qu'une tête bien pleine » (et tenant compte du volume horaire limité). Pour ce qui est de l'Analyse, il a donc reporté en post-bac les limites et l'intégration(14). Il semblait en effet abusif d'imposer ces notions très difficiles à l'ensemble des élèves, qui n'en feront rien et qui ont besoin de temps pour comprendre et pratiquer le reste du programme.
Mais il faudra que les études supérieures évoluent elles aussi. À court terme, pour s'adapter au niveau des nouveaux bacheliers. À long terme, pour tenir compte des nouvelles approches des fonctions que j'ai évoquées. Est-il vraiment nécessaire d'imposer le calcul différentiel à tant d'étudiants qui n'en auront jamais l'usage ?

On parle aujourd'hui de socle commun : je dirais pour conclure qu'au lycée, les fonctions font partie du socle commun, alors que le calcul différentiel n'en fait pas partie.

(14) Dans le supérieur tertiaire, l'enjeu principal de l'intégration concerne la loi normale, qui ne requiert pas le calcul de primitives.

Bibliographie

[1] KUNTZ G., *De l'utilité d'une formation mathématique pour la vie économique et sociale*, in Repères-IREM nº 18 et Bulletin de l'APMEP nº 452.

[2] *Grandeur, mesure*, Brochure APMEP nº 46, 1982.

[3] COMIN E., *Variables et fonctions, du collège au lycée*, in Petit x nº 67, 2005.

[4] GASQUET S. et CHUZEVILLE R., *Fenêtres sur courbes*, CRDP de Grenoble, 1994.

[5] *Modélisation*, dossier des Bulletins APMEP nºs 456 et 458.

[6] BONNEVAL L-M., *Mathématiques et économie : je t'aime, moi non plus*, in Repères-IREM nº 52. On peut le télécharger sur :
http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/som52.htm.

[7] DOUADY R., *Dialectique outil-objet et jeux de cadres*, in Cahiers de didactique nº 3, 1984.

[8] Document d'accompagnement des programmes de mathématiques de STG, téléchargeable sur http://www.eduscol.education.fr/