Gammes musicales et Arithmétique : Une approche modulaire pour la spécialité de Terminale S

Odile Sauzet

Musique et arithmétique font bon ménage : on les rencontre fréquemment lorsque l'on parle de gamme pythagoricienne et de fractions (voir [P1]). L'aspect que l'on se propose d'observer ici est tout autre. On utilise le calcul modulaire pour résoudre un problème qui ne semble pas très mathématique : **pourquoi les gammes musicales existent-elles ?** Autrement dit : pourquoi les notes ne sont-elles pas espacées régulièrement dans une gamme musicale ?

Les élèves ayant des connaissances musicales variées (de très avancées à inexistantes), on doit leur donner toutes les explications nécessaires. Mais il ne s'agit pas ici de concepts très compliqués. On n'utilisera ici que des notions musicales élémentaires qui sont des approximations de la réalité physique (voir [P2]) mais qui ont une traduction claire sur le clavier d'un piano par exemple.

Dans la première partie, nous donnerons les informations permettant de comprendre la nature du problème posé. Nous donnerons une modélisation numérique (entière) puis nous montrerons qu'un modèle modulaire pourrait nous permettre de résoudre le problème posé. Dans la troisième partie, on fera des calculs et on observera un phénomène musicalement intéressant. Et enfin dans la quatrième partie, on montrera, en faisant de l'arithmétique, pourquoi ce que l'on a observé fonctionne et on cherchera les généralisations possibles. En appendice on trouvera une fiche à distribuer aux élèves. L'auteur tient à remercier Bernard Parzysz pour ses suggestions très pertinentes.

1. Préliminaires.

Nous allons donner quelques définitions et rappels concernant les termes musicaux utilisés par la suite. Il n'est cependant pas nécessaire de maîtriser des notions musicales difficiles pour comprendre la suite du texte.

Le son est un phénomène périodique lié à la mise en vibration d'un objet. On ne s'intéresse ici qu'à un seul aspect du son musical, sa hauteur (c'est-à-dire sa fréquence f), indépendamment de ses autres caractéristiques (volume, timbre, durée). Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu, plus elle est faible, plus il est grave. Pour plus d'informations, on pourra consulter les articles « Son » et « Harmonie » de [W].

Comme pour tout phénomène périodique, on peut (théorème de Fourier) considérer un son quelconque comme la somme de sons purs (c'est-à-dire sinusoïdaux) de fréquences kf où k est un entier naturel ; le son pur de fréquence f s'appelle le fondamental, le son pur de fréquence kf (avec $k \geq 2$) s'appelle le $(k - 1)$ème harmonique.

En ce qui concerne la perception sensorielle, l'oreille humaine est sensible, non à la différence des sensations perçues, mais à leur rapport ; en particulier, pour les hauteurs de sons, c'est le rapport des fréquences qui sera pertinent. Ce rapport de fréquences sera dans la suite appelé intervalle sonore ou musical.

L'intervalle entre le fondamental et le premier harmonique est appelé octave. Deux sons à l'octave l'un de l'autre sont perçus comme très voisins, voire identiques. Il en sera, plus généralement, de même pour deux sons dont le rapport des fréquences est égal à 2^n, avec n entier naturel. Nous identifierons l'ensemble de ces sons sous le nom de notes. Les sept noms des notes (Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si) sont un produit de l'histoire de la musique.

Pour pouvoir faire de la musique, on utilise seulement un petit nombre de notes, qui constituent une échelle. Si l'on considère les sons correspondant à ces notes qui sont situés dans un intervalle d'octave, on dit qu'on a tempéré l'octave.

Les notes de l'échelle tempérée ne sont pas réparties uniformément dans l'octave. La chanson Do-Ré-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do, Gratte moi la puce … ne comporte pas que des intervalles musicaux identiques. On découpe l'octave en 12 de ce qu'on appelle des demi-tons et on a la distribution suivante :
Do-Ré : 2 demi-tons, Ré-Mi : 2 demi-tons, Mi-Fa : 1 demi-ton, Fa-Sol : 2 demi-tons, Sol-La : 2 demi-tons, La-Si : 2 demi-tons, Si-Do : 1 demi-ton.

Le but du problème proposé est de « découvrir » pourquoi la distribution des intervalles n'est pas régulière.

Dans un premier temps on s'intéresse aux sons dont le rapport entre leur fréquence et celle du son fondamental est une puissance de trois, c'est à dire au 2ème, 8ème, 26ème, … harmoniques. L'intervalle sonore correspondant à un rapport de 3 est appelé une quinte. L'intervalle de quinte joue un rôle fondamental dans l'histoire de la musique (voir [C]).

Dans le tempérament égal, un intervalle de 7 demi-tons correspond à une quinte harmonique un peu réduite : c'est la quinte tempérée. Nous appellerons succession des quintes la succession de notes espacées d'un intervalle de « quinte », c'est-à-dire ici de 7 demi-tons.

Si l'on opère une succession de quinte à partir du Fa, on trouve les sept notes de l'échelle dans l'ordre Fa-Do-Sol-Ré-La-Mi-Si qui sont les sept notes de l'échelle tempérée. En poursuivant le processus, on introduit cinq nouvelles notes (Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#) qui viennent partager les intervalles de deux demi-tons de l'échelle tempérée. Toutes ces notes forment l'échelle chromatique.

Dans la suite nous aurons besoin d'autres intervalles sonores pour illustrer nos découvertes arithmétiques. Les informations nécessaires sont résumées dans le tableau suivant. Dans la première colonne on donne le nombre par lequel on multiplie la fréquence du son de départ, puis la note de fréquence nf, puis on donne l'intervalle obtenu par rapport au son de départ, tout cela dans une échelle tempérée :

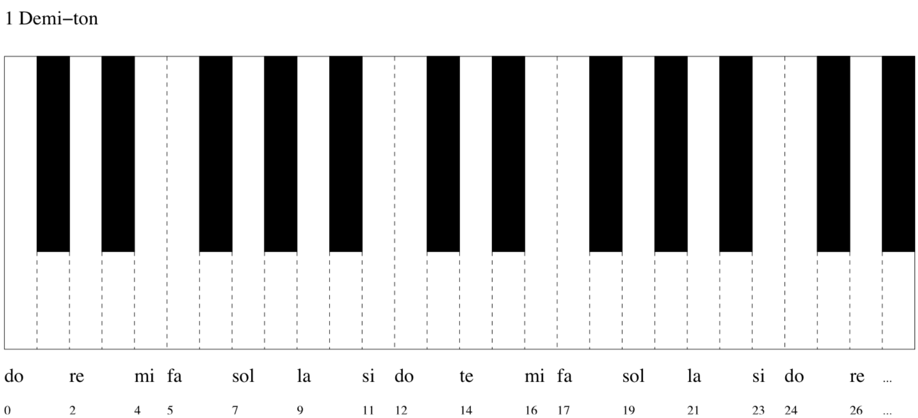
n	Son de fréquence nf	Intervalle entre les sons de fréquence f et nf
2	do'	$do \xrightarrow{\text{Octave}} do'$
3	sol	$do \xrightarrow{\text{Quinte}} sol$
$4 = 2 \times 2$	do''	$do \xrightarrow{\text{Octave}} do' \xrightarrow{\text{Octave}} do''$
5	mi	$do \xrightarrow{\text{Tierce majeure}} mi$

2. Modélisation mathématique des gammes montantes successives.

Le but de cette partie est d'associer à chaque note un nombre entier traduisant le nombre de demi-tons qui la sépare du son de départ. On commence avec un Do auquel l'on associe l'entier 0, la note suivant dans l'échelle est un Mi qui se trouve à deux demi-tons du Do et ainsi de suite pour obtenir la relation :

do	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	…
0	2	4	5	7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	…

Une autre façon de voir les choses : à l'aide d'un clavier. On y trouve une succession de touches blanches et de touches noires. Les touches blanches correspondent aux notes de l'échelle tempérée. Deux touches blanches séparées par une touche noire correspondent à deux notes séparées par un intervalle de deux demi-tons alors que les touches blanches consécutives correspondent à des notes séparées par un intervalle d'un demi-ton. L'ensemble des notes jouées par les touches blanches et les touches noires est l'échelle chromatique.



Le fait qu'en musique on utilise des noms de notes et pas des fréquences et le fait que l'on retrouve le même nom de note tous les intervalles d'octave, invitent à proposer un modèle modulaire, disons un calcul modulo k de la relation entre les notes de l'échelle et un ensemble de nombres. Contrairement à ce que le mot « Octave » sous-entend ce n'est pas « 8 ». En effet, quand un musicien compte les notes dans un intervalle, il commence par 1 et donc dans une octave il n'y a que sept notes différentes.

Ce n'est pas non plus « 7 » qui correspondrait au nombre de notes dans la gamme car ce modèle ne prendrait pas en compte l'irrégularité des intervalles entre deux notes.

Il s'agit de « 12 » qui correspond au modèle numérique donné plus haut et qui correspond à la division de l'octave en douze demi-tons de longueur égale.

En effet, tous les douze demi-tons, on retombe sur « le même son », en tout cas, sur un son qui a le même nom. Deux sons qui portent le même nom sont espacés d'un multiple de douze demi-tons. Une autre façon de voir cela : deux sons ont le même nom si et seulement si les nombres entiers leur correspondant dans le modèle ci-dessus ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

Ce modèle modulaire va nous permettre, avec une grande simplicité, de toujours connaître le nom des notes que l'on obtient quand on monte d'octave en octave selon des intervalles de longueur donnée mais aussi de justifier mathématiquement quelques phénomènes que l'on observera expérimentalement. À propos des congruences modulo 12 et de la gamme chromatique on pourra également lire [S].

3. Les quintes et l'échelle tempérée

Les intervalles de quinte jouent un rôle important en musique au moins depuis Pythagore (voir [P1]) et sans doute depuis plus longtemps encore. Outre des raisons théoriques, l'intervalle de quinte est le seul qu'une oreille non experte puisse entendre parmi les harmoniques produites par une réverbération sonore. Au Moyen Âge seuls les intervalles de quinte étaient considérés comme parfaits d'un point de vue harmonique. Ce qui signifie que le son entendu quand deux personnes chantent simultanément deux notes séparées d'une quinte, est plus « pur » que s'il s'agissait d'un autre intervalle (voir [C]).

Comme indiqué plus haut, une « quinte » est un intervalle de sept demi-tons.

On commence avec le son Do. On se réfère au modèle numérique donné ci-dessus. La note Fa porte le numéro 5. La quinte à partir du Fa est le son portant alors le numéro $7 + 5 = 12$, c'est un Do.

On s'intéresse à ce qui se passe si l'on continue à monter de quinte en quinte (de 7 demi-tons en 7 demi-tons).

Notre premier problème est de donner le nom des notes dans la succession des quintes à partir de Fa.

Une méthode serait de le faire pas à pas, sur un piano par exemple, si celui-ci était suffisamment long. Mais l'outil que l'on s'est donné est aussi performant qu'un piano infini.

On remarque que :
– Quand on monte de quinte en quinte, numériquement on avance de 7 en 7.
– Donc, il suffit de calculer la congruence modulo 12 des multiples successifs de 7.
– Mais d'après les propriétés de la congruence, si $7k \equiv a \bmod 12$ alors $7(k + 1) \equiv a + 7 \bmod 12$.

On peut donc très simplement tout calculer sans machine :

$$
\begin{array}{lll}
5+0\times 7\equiv 5 \bmod 12 & \rightarrow & \textit{fa}\\
5+1\times 7\equiv 7+5 \bmod 12\equiv 0 & \rightarrow & \textit{do}\\
5+2\times 7\equiv 7+0 \bmod 12\equiv 7 \bmod 12 & \rightarrow & \textit{sol}\\
5+3\times 7\equiv 7+7 \bmod 12\equiv 2 \bmod 12 & \rightarrow & \textit{ré}\\
5+4\times 7\equiv 7+2 \bmod 12\equiv 9 \bmod 12 & \rightarrow & \textit{la}\\
5+5\times 7\equiv 7+9 \bmod 12\equiv 4 \bmod 12 & \rightarrow & \textit{mi}\\
5+6\times 7\equiv 7+6 \bmod 12\equiv 11 \bmod 12 & \rightarrow & \textit{si}
\end{array}
$$

Il est légitime de s'arrêter au bout de 6 fois pour regarder ce qui se passe. En effet, l'échelle comporte 7 notes ; on peut donc regarder si, par hasard, on ne les aurait pas toutes obtenues.

La réponse est oui, elles sont toutes toutes là, même si elles sont dans le désordre. On a donc constaté avec peu d'effort que si on commence sur un Fa et que l'on monte de quinte en quinte, c'est dire de 7 demi-tons en 7 demi-tons, on obtient les 7 notes de l'échelle tempérée. Une fois ramenées à l'octave, on retrouve les notes séparées d'un nombre irrégulier de demi-tons. Voilà donc ce qui pourrait être avancé comme une « explication naturelle » de l'irrégularité des intervalles musicaux dans une gamme.

Mais comme nous faisons des mathématiques, nous voulons en savoir plus :

En continuant ce processus est-ce qu'on retombe sur Fa ? Quand ? Est-ce que tous les entiers entre 0 et 11 sont obtenus ? Autrement dit est-ce que par ce procédé on obtient toutes les notes de la gamme chromatique qui va de demi-ton en demi-ton ?

On continue le processus commencé ci-dessus et l'on résume les résultats obtenus dans un tableau :

Multiple de la fréquence du son Fa 3^n	Longueur de l'intervalle $7n$ en 1/2 tons	Congruence $5 + 7n \bmod 12$	Note correspondante
3	7	0	*do*
3^2	2×7	7	*sol*
3^3	3×7	2	*ré*
3^4	4×7	9	*la*
3^5	5×7	4	*mi*
3^6	6×7	11	*si*
3^7	7×7	6	*fa#*
3^8	8×7	1	*do#*
3^9	9×7	8	*sol#*
3^{10}	10×7	3	*ré#*
3^{11}	11×7	10	*la#*
3^{12}	12×7	5	*fa*

On peut faire alors plusieurs remarques :
– À la douzième fois, et pas avant, on retrouve le son de départ (même s'il est beaucoup plus haut).

– On ne retrouve jamais deux fois la même note.
– Toutes les notes de la gamme chromatique ont été rencontrées une fois.

L'équivalent arithmétique de ces remarques est :
– À la douzième fois, et pas avant, on retrouve un multiple de douze.
– Toutes les valeurs modulo 12 (tous les restes dans la division euclidienne par 12) ont été rencontrés une fois et une seule.

La partie suivante sera consacrée aux explications de ce phénomène.

4. Pour aller plus loin.

Ce que l'on vient d'observer est-il vrai uniquement parce qu'on a 12 demi-tons et qu'une quinte en compte 7 ou bien cela marcherait-il avec n'importe quel intervalle musical ? Autrement dit, avec 7 et 12 qu'est-ce qui fait que ça marche ?

Essayons de faire le même exercice que dans la troisième partie avec la tierce majeure qui, dans l'approximation tempérée, est un intervalle de 4 demi-tons correspondant approximativement à la multiplication de la fréquence du son de départ par 5.

On refait le processus ci-dessus avec des tierces majeures successives. On obtient ceci à partir d'un DO (la situation serait analogue à partir d'un Fa)

$$\begin{array}{ll}
0 \times 4 \equiv 0 \text{ mod } 12 & \to \textit{do} \\
1 \times 4 \equiv 4 \text{ mod } 12 & \to \textit{mi} \\
2 \times 4 \equiv 2 \times 4 \text{ mod } 12 \equiv 8 \text{ mod } 12 & \to \textit{sol\#} \\
3 \times 4 \equiv 4 + 8 \text{ mod } 12 \equiv 0 \text{ mod } 12 & \to \textit{do} \\
4 \times 4 \equiv 0 + 4 \text{ mod } 12 \equiv 4 \text{ mod } 12 & \to \textit{mi}
\end{array}$$

Que constate-t-on ? Ça n'a plus l'air de marcher. Au bout de la troisième tierce majeure, on retrouve un Do. On n'a donc pas pu obtenir toutes les notes de l'échelle tempérée (et encore moins chromatique) en prenant des tierces majeures successives.

Pourquoi ? Quand on monte de quinte en quinte et que l'on ne considère que les noms de notes, on calcule $7n$ mod 12 pour des valeurs successives de l'entier naturel n.

Pour comprendre ce qui se passe on se pose un certain nombre de questions :

– À quelle condition sur m et n a-t-on $7n \equiv 7m$ mod 12 ?

$$7n \equiv 7m \text{ mod } 12 \Leftrightarrow 7n - 7m \equiv 0 \text{ mod } 12 \Leftrightarrow 7(m-n) \equiv 0 \text{ mod } 12.$$

La dernière égalité signifie que le nombre $7(m - n)$ est un multiple de 12. Comme 7 et 12 sont premiers entre eux, on en déduit que $7n \equiv 7m$ mod 12 si et seulement si $m - n$ est un multiple de 12 (c'est le théorème de Gauss).

– Peut-on en déduire le nombre de valeurs différentes prises par $7n$ mod 12 quand n parcourt $\mathbf{N}$? Oui. la remarque ci-dessus implique que $7n$ prend 12 valeurs différentes.

– Une autre façon de voir les choses est de calculer successivement $7n$, $n = 1, 2, \ldots$ Quel est le premier n pour lequel on a $7n \equiv 0$ mod 12 ? Comme ci-dessus, cela signifie que $7n$ est un multiple de douze, comme 7 et 12 sont premiers entre eux, l'entier n est un multiple de 12.

Pour bien comprendre l'importance du fait que 7 et 12 sont premiers entre eux, on refait la même chose avec 4 et 12.

$$4n \equiv 4\text{m mod } 12 \Leftrightarrow 4n - 4\text{m} \equiv 0 \text{ mod } 12 \Leftrightarrow 4(m - n) \equiv 0 \text{ mod } 12.$$

Mais ici 4 divise 12. On peut donc conclure uniquement que $4n$ est égal à $4m$ modulo 12 implique que $(n - m)$ est un multiple de 3, par conséquent $4n$ modulo 12 ne prend que trois valeurs différentes comme on l'a vu dans la partie expérimentale.

Maintenant, à l'aide des résultats théoriques obtenus sur la relation entre la longueur d'un intervalle et le nombre de demi-tons dans une gamme, nous pouvons conclure sur ce qui se passe avec d'autres intervalles sans avoir à faire de calcul :
– Tierce mineure : 3 demi-tons
– Quarte : 5 demi-tons

Les nombres 3 et 12 ne sont pas premiers entre eux, on se trouvera donc, avec les tierces mineures, dans la même situation que pour les tierces majeures.

Par contre les nombres 5 et 12 sont premiers entre eux. Donc si on monte de quarte en quarte, au bout de douze fois, on aura rencontré toutes les notes de la gamme chromatique. Mais peut- être aura-t-on déjà remarqué qu'une quarte plus une quinte font ... une octave ! Les intervalles de quintes et de quartes sont inverses l'un de l'autre pour l'addition modulo 12.

Références.

[C] A. Coeurdevey, *Histoire du langage musical occidental*, Que sais-je ?, Éd PUF.
[P1] B. Parzysz, *L'impossible quête de l'échelle parfaite*, Tangente. h.s. n° 11, 2002, Éd. Pôle.
[P2] B. Parzysz, *L'harmonie des Pythagoriciens*, Tangente. h.s. n° 11, 2002, Éd. Pôle.
[S] D. Souder, *De la gamme chromatique aux congruences*, Tangente. h.s. n° 11, Deuxième Partie, 2002, Éd. Pôle.
[W] *Son (Physique) et Harmonique*, dans http://fr.wikipedia.org 6

Spécialité TS – Activité : Calculer modulo « DO »

1. Préliminaires.

a. Le but de ce problème est de découvrir ce qui est avancé comme une explication possible de la répartition inégale des intervalles entre les notes de l'échelle tempérée que nous appelons Do-Ré-Mi-Fa-Sol-La-Si.

b. La musique jouée sur un piano par exemple, se fait sur la base de la séparation de l'octave (intervalle do-do par exemple) en 12 intervalles égaux que l'on appelle « demi-ton ». Donc ici le demi-ton sera notre unité de mesure.

c. Un son pur est défini par une onde de fréquence f. Le son produit par une onde de fréquence le double de f est un son d'une octave plus élevée. Donc si un son appelé Fa a une fréquence f, le son ayant une fréquence de $2f$ est une octave plus haut que le Fa. L'oreille humaine a l'habitude de considérer deux sons séparés d'une octave comme identiques. On a alors donné aux sons séparés d'une octave le même nom, ce qui donne la notion de gamme qui est d'une octave de longueur (quelle que soit la gamme). Dans notre exemple le son de fréquence $2f$ s'appelle aussi Fa.

d. Dans le contexte de notre problème, on choisit comme son de départ un Fa et on lui associe le nombre 0. La note suivante est un Sol et est séparé du Fa par un intervalle de deux demi-tons donc on lui associe le nombre 2. Et ainsi de suite on obtient la relation suivante entre les notes des gammes montantes successives et les entiers naturels. On remarque la présence de deux intervalles de longueur un demi-ton dans la gamme. Les autres sont de longueur 2 demi-tons.

fa	*sol*	*la*	*si*	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*	*ré*	*mi*	…
0	2	4	6	7	9	11	12	14	16	18	19	21	23	…

Question 1. Les remarques b. et c. ci-dessus et le fait qu'en musique on n'utilise que des noms de note et pas de fréquences, invitent à proposer un modèle modulaire, disons un calcul modulo k de la relations entre les notes des gammes successives et un ensemble de nombres. Quelle est la valeur de k ? Justifier.

2. Les quintes et l'échelle tempérée

Comme on a pu le voir plus haut une des échelles utilisées dans la musique européenne est la succession d'intervalles d'un ou deux demi-tons dont un des modèles, celui commençant sur le Fa, est le suivant : 2-2-2-1-2-2-1 (on a écrit le nombre de demi-tons par intervalles).

Dans la partie précédente, on a vu que la note ayant une fréquence égale au double de la fréquence de la note fondamentale était l'octave supérieure. On s'intéresse maintenant à la note ayant une fréquence égale au triple d'une note donnée. Cette note se trouve une « quinte » plus haut que la note de départ. Une « quinte » est un intervalle de sept demi-tons. Au Moyen Âge seuls les intervalles de quintes étaient considérés comme parfaits d'un point de vu harmonique. Ce qui signifie que le son entendu quand deux personnes chantent ensemble deux notes séparées d'une quinte, est plus « pur » que s'il s'agissait d'un autre intervalle.

Si on commence avec un Fa et qu'on regarde le schéma ci-dessus, la quinte à partir du « Fa » donne un « Do » (il porte bien le numéro 7).

On s'intéresse à ce qui se passe si l'on continue à multiplier les nouvelles fréquences obtenues par 3 (c'est-à-dire si on multiplie la fréquence du son de départ par des puissances successives de 3), c'est-à-dire si l'on monte de quinte en quinte (de 7 demi-tons en 7 demi-tons) dans les gammes montantes.

Question 2. Donner le nom de note du son dont la fréquence est 3^2, 3^3, …, 3^6 fois celle du Fa ? (On utilisera évidemment une méthode sans calculs trop longs).
Que constatez-vous ?

Question 3. En continuant ce processus est-ce qu'on retombe sur Fa ? Quand ? Est-ce que tous les entiers entre 0 et 11 sont atteints (autrement dit est-ce que par ce procédé on atteint toutes les notes de la gamme chromatique qui va de demi-ton en demi-ton) ?

3. Pour aller plus loin.

Est-ce que ceci fonctionne uniquement parce qu'on a 12 demi-tons et qu'une quinte en compte 7 ou bien cela marcherait-il avec n'importe quel intervalle musical ?

Essayons avec la tierce majeure qui est un intervalle de 4 demi-tons correspondant à la multiplication de la fréquence du son fondamental par 5.

Question 4. Refaire le processus ci-dessus avec des tierces majeures successives.
Que constate-t-on ?
Pourquoi ? Quand on monte de quinte en quinte et que l'on ne considère que les noms de notes, on calcule $7n \bmod 12$ pour des valeurs successives de l'entier naturel n.

Question 5. À quelle condition sur m et n a-t-on $7n \equiv 7m \bmod 12$? En déduire le nombre de valeurs différentes prises par $7n \bmod 12$ quand n parcourt $\mathbf{N}$.

Une autre façon de voir cela est :

Question 6. Si l'on calcule successivement $7n$, $n = 1, 2, ..$ quel est le premier n pour lequel on a $7n \equiv 0 \bmod 12$?
Pourquoi les questions 5 et 6 sont elles équivalentes ?
Refaire la même chose avec 4 et 12. Conclure.

Question 7. Sans chercher à tout refaire, que dire des intervalles suivants ?
Tierce mineure : 3 demi-tons.
Quarte : 5 demi-tons.

Question 8. Quelle remarque intéressante peut-on faire concernant la quarte ?