

## Études de régularité et logiciel GEOSPACW (suite)<sup>(\*)</sup>

Jean-Pierre Daubelcour et Anne-Marie Marmier<sup>(\*\*)</sup>

### CRISTAUX ISSUS DU SYSTÈME CUBIQUE

Nous avons été inspirés pour la réalisation de ce travail par l'ouvrage « Pavés et bulles, éléments de cristallographie mathématique » de Françoise Pécaut (chapitre IV) publié par l'APMEP en 1977. Citons-la.

*« Un morceau de cristal cristallisé naturellement, ou d'une substance cristallisée en laboratoire, se présente sous la forme d'un polyèdre irrégulier dont les faces sont la frontière naturelle entre le milieu cristallin et le milieu extérieur ; c'est un fait expérimental, connu depuis longtemps, que les angles des faces entre elles, pour tout échantillon d'une même espèce sont les mêmes.*

*C'est dire que si la structure interne du milieu cristallin admet d'être limitée par un plan, défini par cassure, par clivage, ou croissance spontanée, alors les autres faces planes ont des directions déduites de la première par rotation ou rotation-réflexion dont les angles, les axes, les miroirs ne dépendent pas de l'échantillon pour une même composition chimique. On a donc supposé puis vérifié que la structure interne reste invariante par un groupe d'isométries. »*

La notion de groupe s'est dégagée en cristallographie au XIX<sup>e</sup> siècle à travers les travaux de Bravais, qui effectue un travail purement géométrique d'étude des symétries conservant un réseau tridimensionnel avec la pensée de s'en servir ultérieurement pour approfondir le travail de ses prédécesseurs et expliquer les faits physiques fondamentaux de la cristallographie. Il trouve 7 systèmes cristallins, le système auquel appartient un cristal étant défini par le groupe d'isométries de sa structure interne.

Pour un cristal du système cubique (la maille du réseau est un cube), si irrégulier soit-il, les directions des plans des faces appartiennent à l'orbite de l'une d'entre elles par l'un de cinq sous-groupes particuliers du groupe du cube qui sont ceux possédant au moins deux rotations d'axes distincts et qui ne sont pas des demi-tours (ceci est dû à des considérations d'optique physique).

Les formes possibles les plus régulières d'un cristal du système cubique sont obtenues avec des faces équidistantes d'une origine choisie, c'est ce que nous ferons en résolvant l'exercice pratique proposé dans la brochure précitée. On fixera un cube centré en O, origine des coordonnées, et le repère associé O(I, J, K), I, J, K étant des centres de faces du cube, on partira d'un plan arbitraire P, et pour tout groupe H du type précédent on construira les plans  $f(P)$ ,  $f$  décrivant H, on montrera que le solide convexe limité par tous ces plans est un polyèdre à faces égales, forme régulière d'un

(\*) La première partie de cet article est parue dans le n° 461, p. 807-819.

(\*\*) IREM de Lille, Groupe de travail : Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens (E.M.T.A).

crystal du système cubique dont on aura toutes les formes possibles en variant les plans P.

*Geospacw* aura à couper des demi-espaces fermés, ce qu'il ne peut faire ; l'argument théorique qui montre que la forme obtenue est un polyèdre convexe fermé et borné mettra en évidence la boîte cubique dans laquelle on le fera opérer sans crainte de perdre des données. Sa pauvreté en texte nous amènera aussi à entrer la donnée des plans sous forme analytique. Cela évite également d'avoir à considérer géométriquement les isométries du cube ; il suffira de les considérer par leur effet sur le repère. Ce travail qui relève de l'algèbre linéaire se fait très simplement à la main. De la même manière les formes les plus régulières que l'on voit apparaître : cube, octaèdre et dodécaèdre rhomboïdal sont prévisibles grâce à des raisonnements analytiques très simples.

Ce travail sur la machine est préparé par des considérations minimales sur les isométries du tétraèdre et du cube.

On voit les intérêts mathématiques et pédagogiques de cet exemple : aller et retour interactif entre le logiciel et le raisonnement, articulation du raisonnement géométrique avec la représentation analytique et les contraintes de commandes de la machine.

Outre cela, la construction de ces solides, via l'ordinateur, peut nous aider à les voir sous divers angles, en saisir les régularités et la beauté.

## CONSTRUCTION DES CINQ FORMES RÉGULIÈRES LES PLUS GÉNÉRALES DU SYSTÈME CUBIQUE

Les dessins sont tous réalisés avec le logiciel *geospacw*.

### I. Représentation du cube et des deux tétraèdres réguliers associés – Notations.

Soit le cube solide C de côté 2 et  $\mathcal{R}(O, I, J, K)$  le repère orthonormé lié au cube (Fig. 1).

O est le centre du cube, les points I, J et K sont les centres de trois faces adjacentes du cube tels que (O, I, J, K) soit de sens direct selon l'orientation de l'espace E que nous avons choisie. Pour tout point M de l'espace E :

$$M(x, y, z) \in C$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1.$$

Les notations sont fixées dans la représentation ci-dessous.

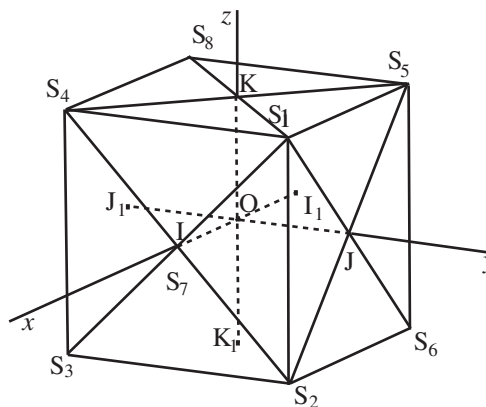


Fig. 1

Le cube contient deux tétraèdres réguliers inscrits  $t$  et  $t'$  et **deux seulement** dont les sommets sont communs avec ceux du cube. En effet les arêtes joignant deux

sommets du cube sont nécessairement choisies parmi les diagonales des faces de longueur  $2\sqrt{2}$ , sinon le tétraèdre construit ne sera pas régulier. Partons de  $S_1$  : seuls trois sommets du cube  $S_3, S_8$  et  $S_6$  conviennent pour le premier  $t$ . La sphère  $S$  est également circonscrite au tétraèdre  $t$ . Les quatre autres sommets sont donc nécessairement  $(S_7, S_2, S_4, S_5)$  ; il forment en effet un tétraèdre régulier  $t'$ . Le tétraèdre  $t'$  est le symétrique de  $t$  par rapport au centre  $O$  du cube.

**Inversement de tout tétraèdre régulier  $t$ , on peut déduire un cube et un seul avec lequel le tétraèdre ait tous ses sommets communs** : en effet si  $S$  est la sphère de centre  $O$  (Fig. 1) et de rayon  $OS_1$ , les autres sommets du cube seront ceux du tétraèdre  $t'$  symétrique de  $t$  par rapport au centre de la sphère  $S$ .

Sur les Figures 2 et 3 sont dessinés les deux tétraèdres inscrits dans le cube :  $t(S_1S_3S_6S_8)$  et  $t'(S_7S_2S_4S_5)$ . Les droites  $S_1S_7$  et  $S_7S_1$  sont les axes des triangles équilatéraux  $S_3S_6S_8$  et  $S_2S_4S_5$  ; ces triangles sont les faces de  $t$  et  $t'$  opposées respectivement à  $S_1$  et  $S_7$ .

Chaque diagonale du cube est une médiane-hauteur des deux tétraèdres, les centres de gravité des tétraèdres sont confondus avec  $O$  le centre du cube. Soit une diagonale du cube telle  $(S_1S_7)$  et les points  $O, O_1$  et  $O_2$  respectivement isobarycentres du cube, et des triangles équilatéraux  $S_3S_6S_8$  et  $S_2S_4S_5$ . Ces points sont tels que :

$$S_7O_1 = O_1O_2 = O_2S_1 = \frac{S_1S_7}{3}.$$

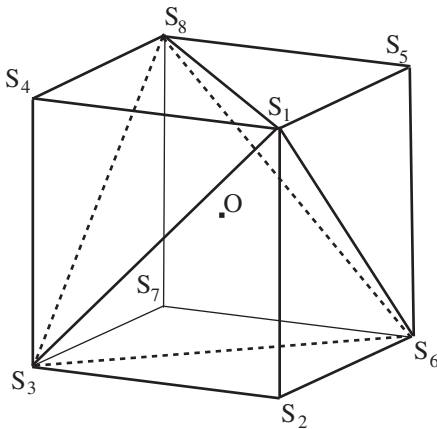


Fig. 2

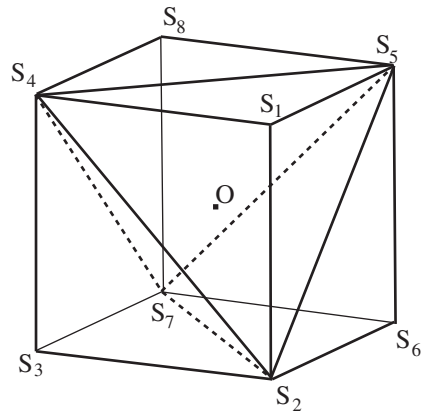


Fig. 3

## II. Rappels sur le groupe $G$ des 48 isométries du cube

Nous considérons le cube comme un solide (intersection de six demi-espaces fermés contenant  $O$ ). Une isométrie du cube conserve globalement les diagonales, telle  $[S_1S_7]$  de longueur  $2\sqrt{2}$ , les arêtes, les faces du cube, les sommets et le centre  $O$  du cube  $C$ . Inversement, une isométrie de point fixe  $O$  conservant les sommets du cube conserve l'ensemble des arêtes, l'ensemble des faces et finalement le cube. On en

déduit que, pour que le cube  $C$  soit invariant par une isométrie  $f$  de l'espace, il faut et il suffit que ses huit sommets soient globalement invariants par  $f$ .

Pour caractériser les isométries conservant le cube, il suffit donc de caractériser les isométries conservant l'ensemble des 8 sommets, et le groupe  $G$  du cube est donc fini.

Puisque la symétrie  $s$  de centre  $O$ , qui est un anti-déplacement, conserve  $C$ , tout anti-déplacement conservant  $C$  s'écrira  $s \circ f$ , où  $f$  est un déplacement (donc une rotation d'axe passant par  $O$  et conservant  $C$ ). L'ordre de  $G$  est donc le double de l'ordre de  $G^+$ , groupe des rotations conservant  $C$ .

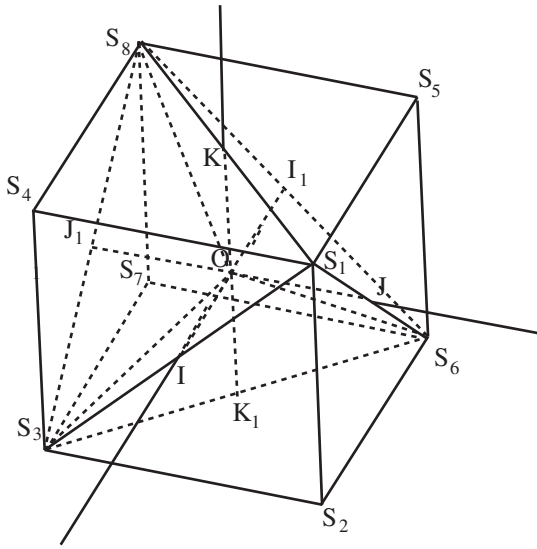


Fig. 4

### 1. En considérant le repère associé au cube

Sachant qu'une isométrie est caractérisée de façon unique par l'image  $\mathfrak{R}'$  d'un repère orthonormal, si  $f$  est une isométrie du cube, elle sera déterminée par l'image du repère orthonormal direct  $\mathfrak{R}(O, \overline{OI}, \overline{OJ}, \overline{OK})$  associé au cube (Fig. 1). De plus,  $O$  étant invariant par  $f$  et les centres des faces étant globalement invariants, le repère orthonormé image  $\mathfrak{R}'(O, \overline{OU}, \overline{OV}, \overline{OW})$  où  $U, V$  et  $W$  sont centres de faces du cube, est tel que les vecteurs  $\overline{OU}, \overline{OV}$  et  $\overline{OW}$  sont choisis dans l'ensemble  $\{\pm\overline{OI}, \pm\overline{OJ}, \pm\overline{OK}\}$ .

Il y a  $3! = 6$  permutations des trois vecteurs  $(\overline{OU}, \overline{OV}, \overline{OW})$ . Une permutation étant choisie, l'attribution d'un signe à chacun des vecteurs est une application de  $\{1, 2, 3\}$

sur  $\{+1, -1\}$ . Il y a  $2^3 = 8$  telles applications, donc  $6 \times 8 = 48$  isométries conservant le cube.  $G$  compte donc 48 éléments et le sous-groupe des rotations en compte 24.

## 2. En considérant les deux tétraèdres inscrits dans le cube

### *Isométries des deux tétraèdres inscrits dans le cube C*

Soit  $T$  le groupe des isométries du tétraèdre,  $f$  une isométrie qui conserve  $t : f(t) = t$  et  $s$  la symétrie centrale par rapport à  $O : t' = s(t)$ . Or  $s$ , homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-1$ , commute avec toutes les isométries dont  $O$  est un point fixe :  $f \circ s = s \circ f$  et  $f(t') = s(t) = t'$ .

**Ainsi toute isométrie qui conserve  $t$  conserve aussi  $t'$ . Par suite une telle isométrie conservant  $t$  et  $t'$  conserve le cube  $C$ .**

Inversement, une isométrie du cube, si elle ne conserve pas  $t$ , l'envoie sur un tétraèdre régulier distinct de  $t$  et inscrit dans le cube donc nécessairement sur  $t'$  ; **l'ensemble de telles isométries est  $sT$  et l'ordre de  $G$  est le double de celui de  $T$ .** Nous distinguerons désormais parmi les isométries du cube celles de  $T$  qui laissent invariant les tétraèdres  $t$  et  $t'$  et les autres de  $G - T$ . Les isométries de  $G - T$  ne peuvent donc qu'échanger  $t$  et  $t'$ .

### *Précisons les caractéristiques géométriques des rotations de $G^+$ du cube C*

D'après le paragraphe précédent, le groupe  $T$  des isométries conservant  $t$  et  $t'$  est d'ordre 24. L'existence d'une réflexion conservant  $t$  est assurée, donc le sous-groupe  $T^+$  des rotations de  $t$  est d'ordre 12. Il est aisé d'énumérer 12 rotations dans  $T$ . En effet tout d'abord les 8 d'ordre 3 : chacun des 4 sommets de  $t$  génère deux rotations d'axe une médiane-hauteur de ce tétraèdre  $t$  (diagonale du cube) et d'angle un tiers de tour dans un sens, puis dans l'autre. Ajoutons les trois demi-tours joignant les milieux des arêtes opposées de  $t$  et qui sont en fait les demi-tours dont l'axe est porté par les axes du cube  $II_1$ ,  $JJ_1$  et  $KK_1$  (Fig. 4). Enfin l'identité. Ainsi le groupe  $T^+$  est d'ordre 12. Pour définir  $G^+$  il suffit d'adjoindre à  $T^+$  les rotations qui échangent  $t$  et  $t'$  ; notons leur ensemble  $T^*$ , on a  $T^* = rT^+$ ,  $r$  étant une rotation de  $G$  envoyant  $t$  sur  $t'$ , par exemple le quart de tour d'axe  $OI$  qui envoie  $S_1$  sur  $S_2$ . Mais  $T^+ \cup T^*$  est un ensemble de rotations de  $G^+$  à 24 éléments, c'est donc  $G^+$ . Si  $s$  est la symétrie de centre  $O$ , alors  $G = G^+ \cup sG^+$ .

On peut reconnaître aussi géométriquement les 24 rotations de  $G$ . On énumère en effet facilement : l'identité, autour de chacune des quatre diagonales deux rotations d'ordre 3, autour de chacun des trois axes deux rotations d'ordre 4 et une rotation d'ordre 2, autour de chacune des six médianes une rotation d'ordre 2, ce qui fait  $1 + 9 + 8 + 6 = 24$  rotations, c'est-à-dire toutes.

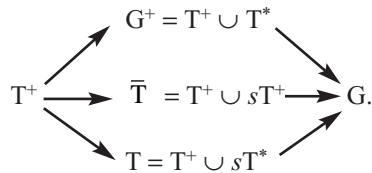
## III. Les cinq sous-groupes associés au système cubique

Nous aurons à considérer les sous-groupes  $H$  de  $G^+$  contenant deux rotations d'axes distincts et d'ordres différents de 2 ; un raisonnement cas par cas, consistant à composer des transformations de  $H$ , permet de montrer qu'alors  $H$  contient  $T^+$ .

- Si  $H$  contient deux rotations d'ordre 3 d'axes distincts, par composition on trouve d'abord que  $H$  contient les rotations d'ordre 2 de  $T^+$ , puis  $T^+$ .
- Si  $H$  contient deux rotations d'ordre 4 d'axes distincts, par composition il contient deux rotations d'ordre 3 d'axes distincts.
- Si  $H$  contient une rotation d'ordre 3 et une rotation d'ordre 4 d'axes distincts, par composition, on se ramène au cas précédent.

Cherchons donc les sous-groupes de  $G$  contenant  $T^+$  (ceux qui sont distincts de  $T^+$  et  $G$  ne peuvent avoir qu'un ordre égal à 24, ce que l'on va vérifier sans idée a priori).

- Si un tel sous-groupe distinct de  $T^+$  ne contient que des rotations, il en contient une qui envoie  $t$  sur  $t'$ , donc il contient  $T^* = rT^+$ , c'est donc  $G^+$ .
- Si un tel sous-groupe contient un anti-déplacement conservant  $t$ , il les contient tous et c'est  $T = T^+ \cup sT^*$ .
- Si un tel sous-groupe contient un anti-déplacement envoyant  $t$  sur  $t'$ , il les contient tous et c'est  $\bar{T} = T^+ \cup sT^+$ .



**Nous allons montrer que ces cinq groupes  $T^+$ ,  $G^+ = T^+ \cup T^*$ ,  $\bar{T} = T^+ \cup sT^+$ ,  $T = T^+ \cup sT^*$  et  $G$ , en opérant sur un plan sont « représentés » par des polyèdres convexes et compacts de l'espace appelés « cristaux » du système cubique. Notre objectif est de construire, à l'aide du logiciel *geospacw*, certaines des CINQ formes régulières du système cubique.**

#### IV. Préparation à la construction de formes cristallines du système cubique

Appelons de manière générale  $H$  l'un des sous-groupes précédemment cités. Soit  $\delta$  son ordre ( $\delta = 12, 24$  ou  $48$ ) et soit  $P_0$  un plan ne passant pas par  $O$  ; ce plan limite un demi-espace fermé contenant  $O$  :  $E_0$ , dont on va considérer les images par  $H$ . L'intersection de ces images sera un solide fermé, convexe et compact, forme cristalline du système cubique.

Nous allons rendre compte de ces formes à l'aide de *geospacw*, en nous plaçant, comme les limites du logiciel nous le commandent, d'un point de vue analytique.

##### 1. Équations des images d'un plan par une isométrie du cube.

Un vecteur  $\vec{V} = a\overline{OI} + b\overline{OJ} + c\overline{OK}$  a pour image par une isométrie  $f$  du cube le vecteur  $\vec{V}' = a'\overline{OI} + b'\overline{OJ} + c'\overline{OK}$  où  $(a', b', c')$  est obtenu par une permutation de  $(a, b, c)$ , chaque lettre étant ensuite affectée du signe  $+$  ou  $-$ . Ainsi un plan  $P$  normal

à  $\vec{V}$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  a pour image un plan  $P'$  d'équation  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ . Si  $M$  est un point de  $P$  et  $M'$  son image par  $f$  un point de  $P'$  on a :  $\overline{OM} \cdot \vec{V} + d = 0$  et  $\overline{OM'} \cdot \vec{V} + d' = 0$ . L'isométrie conservant le produit scalaire, il vient donc  $d = d'$ .

Par exemple si  $r_1$  est la rotation d'ordre 2 d'axe  $OI$ , elle envoie le repère initial sur  $(O, I, J', K')$  donc  $\vec{V}' = a\overline{OI} - b\overline{OJ} - c\overline{OK}$ . Ainsi le plan  $P_0$  d'équation  $3x + 2y + z - 6 = 0$  et passant par le sommet  $S_1$  du cube  $C$  a pour vecteur normal  $(3, 2, 1)$  ; son image par la rotation  $r_1$  aura donc pour équation  $3x - 2y - z - 6 = 0$ .

### Le choix de $P_0$

Ce plan  $P_0$  est choisi ici de façon que la seule isométrie du cube qui le conserve soit l'identité ; son orbite par  $H$  sera donc composé de  $\delta$  plans deux à deux distincts. Montrons cela. Le plan  $P$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est laissé invariant par une rotation du cube si et seulement si  $\vec{V}$  de composantes  $(a, b, c)$  dirige un axe de rotation ; il est laissé invariant par un anti-déplacement (qui ne peut être qu'une réflexion) si et seulement si il est orthogonal à un axe de demi-tour. On examine ces différents cas.

- $\vec{V}$  dirige un axe de rotation d'ordre 3, alors  $\vec{V}$  est colinéaire à un vecteur de composantes  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  et les trois nombres réels  $a, b, c$  sont égaux en valeur absolue.
- $\vec{V}$  dirige un axe de rotation d'ordre 4, il est alors colinéaire à un vecteur de base et deux des trois nombres  $a, b, c$  sont nuls.
- $\vec{V}$  dirige un axe de rotation d'ordre 2 et  $\vec{V}$  est colinéaire à une bissectrice des axes du repère, deux des nombres sont égaux en valeur absolue et le troisième est nul.
- $\vec{V}$  est orthogonal à un axe de rotation d'ordre 2 et la condition s'exprime sur  $a, b, c$  comme dans le cas précédent.

## 2. Propriété du solide engendré par l'orbite de $P_0$ par le groupe $H$

L'orbite de  $P_0$  va donner  $\delta$  autres plans passant par un sommet du cube puisque les éléments de  $H$  conservent le cube, donc en particulier ses sommets ; notons  $\text{Orb}(P) = \{P_0, P_1, \dots, P_{\delta-1}\}$ .

Soit  $O'$  la projection orthogonale de  $O$  sur le plan  $P_0$  : l'équation de  $P_0$  permet le

calcul de la distance  $e = OO' = \frac{6}{\sqrt{14}}$ . Les plans images de  $P_0$  seront tous à la

distance  $e$  de  $O$  par conservation de la distance par isométrie. Ces  $\delta$  plans sont donc tangents à la sphère de centre  $O$  et de rayon  $e$ . Le centre  $O$  est invariant par toute isométrie de ce groupe. Les rotations de  $H$  transforment  $P_0$  en  $P_j$  ( $1 \leq j \leq \delta - 1$ ) : donc le demi-espace fermé  $E_0$  contenant  $O$  de frontière  $P_0$  aura pour image le demi-espace

fermé  $E_j$  contenant  $O$  et de frontière  $P_j$ . L'intersection  $\Sigma$  de ces demi-espaces fermés convexes est donc un fermé convexe de l'espace euclidien  $E$ .

- a)  **$\Sigma$  est donc un polyèdre convexe et fermé de  $E$ .** Sa frontière dans  $E$  est constituée de parties contenues dans les plans images  $P_j$ ,  $j$  variant de  $0$  à  $\delta$ ; on appellera ces parties les faces de  $\Sigma$ .
- b) **Comment sont organisées les faces de ce polyèdre  $\Sigma$  ?**

Soit  $p$  la face du polyèdre située dans le plan  $P_0$ ; c'est l'intersection de  $\Sigma$  avec

$$P_0. \text{ On peut écrire : } p = \left( \bigcap_{0 \leq j \leq \delta-1} E_j \right) \cap P_0 = \bigcap_{0 \leq j \leq \delta-1} (E_j \cap P_0).$$

$P_0 \cap E_j$  est un demi-plan fermé de frontière la droite  $D_j$ . Donc la face  $p$  est un polygone convexe et fermé comme intersection finie de demi-plans convexes et fermés.

Montrons que la projection orthogonale de  $O$  sur  $P_0$  est nécessairement incluse dans la face  $p$ .

Sur la Figure 5, soit  $O'$  et  $O_j$  les projections orthogonales de  $O$  respectivement sur les plans  $P_0$  et  $P_j$ . Alors  $OO' = OO_j$ .

Supposons que  $O$  et  $O'$  soient de part et d'autre du plan  $P_j$ ; alors le segment  $[OO']$  recouperait le plan  $P_j$  en un point autre que  $O_j$  et alors la distance  $OO'$  serait strictement supérieure à  $OO_j$ . Or elle est lui est égale.

$O'$  est donc dans  $E_j$  pour tout  $j \geq 1$ .  
Donc  $O'$  est dans la face  $p$ .

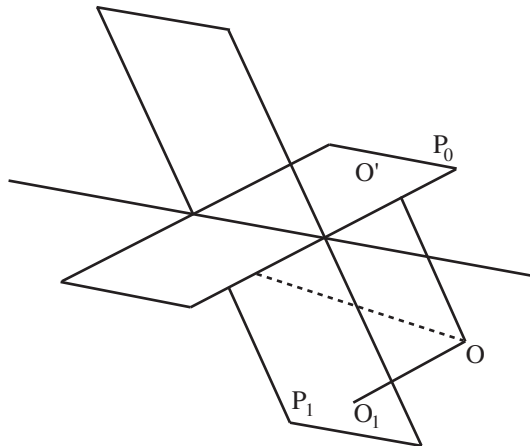


Fig. 5

Soit  $r$  la rotation envoyant  $P_0$  sur  $P_k$ .  $r$  est bijective, donc l'image de la face  $p$  vérifie :

$$r(p) = \left( \bigcap_{0 \leq j \leq \delta-1} r(E_j) \right) \cap r(P_0).$$

Or l'ensemble  $r(E_j)$  est encore l'ensemble des  $E_j$ . Il vient donc :

$$r(p) = \left( \bigcap_{0 \leq j \leq \delta-1} E_j \right) \cap P_k = \Sigma \cap P_k = p_k.$$

Ainsi les faces de  $\Sigma$  se déduisent de  $p$  par les rotations du groupe opérant : les faces du polyèdre  $\Sigma$  sont donc toutes égales entre elles.



c) **le polyèdre est-il compact ?**

H, quel qu'il soit, contient les trois demi-tours d'axes respectifs OI, OJ et OK. On pourra écrire l'équation d'un plan  $p$  en position générale sous la forme  $ax + by + cz = d$  avec  $d > 0$  et  $abc$  non nul. Le demi-espace contenant O a pour inéquation  $d \geq ax + by + cz$  et les images respectives par les trois demi-tours précités sont  $d \geq ax - by - cz$ ,  $d \geq -ax + by - cz$ ,  $d \geq -ax - by + cz$ , leur intersection est donc contenue dans le pavé  $|ax| \leq d$ ,  $|by| \leq d$ ,  $|cz| \leq d$ . Donc dans tous les cas, la forme obtenue sera un polyèdre fermé, convexe et compact.

Cette remarque montre que dans l'exemple du plan  $P_0$ , la forme est contenue dans le cube  $C' : |x| \leq 6$ ,  $|y| \leq 6$ ,  $|z| \leq 6$ .

**V. Construction des formes cristallines du système cubique.**

Le logiciel ne permet pas, sans modification de la programmation, de construire la forme du solide comme intersection de demi-espaces. Pour contourner cette difficulté, il suffit de travailler dans le cube  $C'$  dont on sait qu'il contient le polyèdre final. Les intersections faites par la machine seront celles des polyèdres du type  $C' \cap E_j$ .

**1. Action du groupe  $T^+$  sur  $P_0$  : le dodécaèdre pentagonal tétraédrique**

On exécute systématiquement le calcul présenté en IV.1.

Notons pour être précis les équations des 11 plans transformés de  $P_0$  et les propriétés de la forme obtenue.

$r_1$ , rotation d'ordre 2 et d'axe OI envoie (I, J, K) sur (I,  $J_1$ ,  $K_1$ ), donc  $P_1 : 3x - 2y - z - 6 = 0$ .

$r_2$ , rotation d'ordre 2 et d'axe OJ envoie (I, J, K) sur ( $I_1$ , J,  $K_1$ ), donc  $P_2 : -3x + 2y - z - 6 = 0$ .

$r_3$ , rotation d'ordre 2 et d'axe OK envoie (I, J, K) sur ( $I_1$ ,  $J_1$ , K), donc  $P_3 : -3x - 2y + z - 6 = 0$ .

$r_4$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_1$  envoie (I, J, K) sur (K, I, J), donc  $P_4 : x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

$r_5$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_1$  envoie (I, J, K) sur (J, K, I), donc  $P_5 : 2x + y + 3z - 6 = 0$ .

$r_6$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_3$  envoie (I, J, K) sur ( $J_1$ , K,  $I_1$ ), donc  $P_6 : -2x + y - 3z - 6 = 0$ .

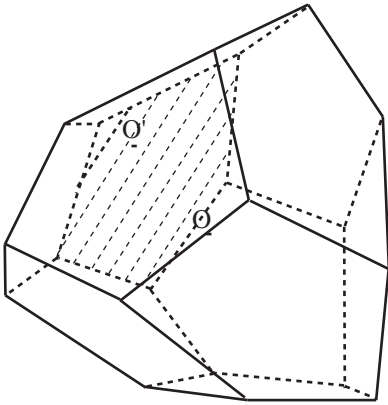
$r_7$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_3$  envoie (I, J, K) sur ( $K_1$ ,  $I_1$ , J), donc  $P_7 : -x - 3y + 2z - 6 = 0$ .

$r_8$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_6$  envoie (I, J, K) sur (J,  $K_1$ ,  $I_1$ ), donc  $P_8 : 2x - y - 3z - 6 = 0$ .

$r_9$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_6$  envoie (I, J, K) sur (K,  $I_1$ ,  $J_1$ ), donc  $P_9 : x - 3y - 2z - 6 = 0$ .

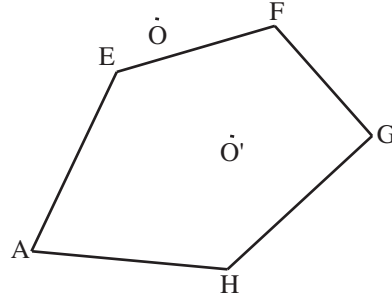
$r_{10}$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_8$  envoie (I, J, K) sur (J,  $K_1$ ,  $I_1$ ), donc  $P_{10} : 2x - y - 3z - 6 = 0$ .

$r_{11}$ , rotation d'ordre 3 et d'axe  $OS_8$  envoie (I, J, K) sur ( $K_1$ , I,  $J_1$ ), donc  $P_{11} : -x + 2y - 3z - 6 = 0$ .



**Fig. 6 :** le dodécaèdre  
pentagonal tétraédrique.

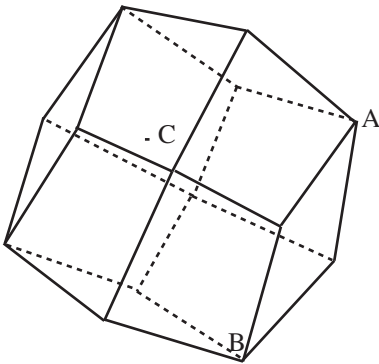
L'intersection des douze demi-espaces  
fermés donne par *geospacw*  
le solide  $\Sigma$  ci-dessus.



**Fig. 6 bis**

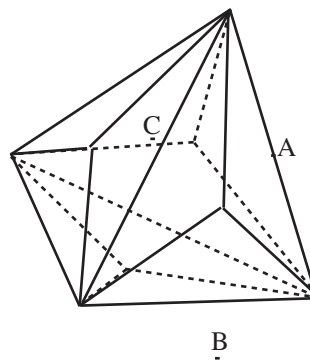
La face  $p(AEFGH)$  ci-dessus est un  
*pentagone non régulier* : le logiciel permet  
de calculer les côtés de  $p$  :  $EF = FG =$   
 $0,866$  ;  $GH = 1,039$  ;  $AH = AE = 1,072$ .

REMARQUE : Changeons le plan initial  $P_0$ , en évitant pour l'instant, dans les deux cas suivants (Figures 7 et 7 bis), les plans invariants par un sous-groupe de  $T$  qui ne donne pas un polyèdre à douze faces. Par exemple, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les intersections de  $P_0$  avec les axes de coordonnées, on peut faire varier les points  $A$  ou  $B$  ou  $C$  sur la figure *geospacw* de façon, que la « forme » des faces changent. Le nouveau plan  $P_0$  ne passe plus par  $S_1$ .



**Fig. 7**

Le plan  $P_0$  initial a pour équation :  
 $0,685x - 0,687y - 0,241z - 2,781 = 0$ .  
Les 12 faces sont des quadrilatères.



**Fig. 7 bis**

Le plan  $P_0$  initial a pour équation :  
 $0,728x - 0,484y - 0,486z - 1,454 = 0$ .  
Les 12 faces sont triangulaires.

**2. Action du groupe  $G^+ = T^+ \cup T^*$  sur  $P$  : le gyroèdre**

Il n'est pas utile d'entrer dans le détail de la nature géométrique des éléments de  $G^+$ , il suffit de noter les effets de  $T^* = rT^+$  (cf III) sur  $I, J, K$  ; on l'a fait pour  $T^+$  et on sait que  $r$  envoie  $I, J, K$  respectivement sur  $I, J_1, K_1$ . On doit obtenir un solide à 24 faces dont 12 sont contenues dans les faces du solide précédent. En agissant comme au paragraphe précédent, on obtient :

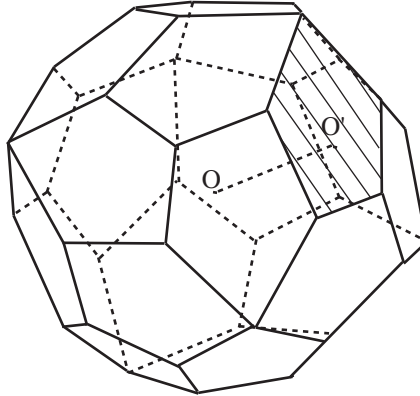


Fig. 8 : Le gyroèdre à 24 faces (des pentagones non réguliers).

**3. Action du groupe  $T = T^+ \cup sT^+$  sur le plan  $P$  : le diploèdre**

Il suffit là encore de noter les effets de  $sT^+$  sur  $I, J, K$ , sachant que  $s$  envoie ces trois points respectivement sur  $I_1, J_1, K_1$ . On obtient un polyèdre à 24 faces, le diploèdre. L'intersection des 24 demi-espaces  $(P_j, O)$  donne le polyèdre  $\Sigma$ . La face du solide est ici un quadrilatère  $q_0$  intersection de  $\Sigma$  avec le plan  $P_0$ .

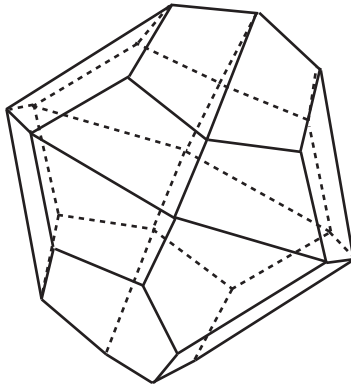


Fig. 9 : Le Diploèdre. Les douze faces à l'avant sont en trait épais et les douze faces à l'arrière en pointillé.

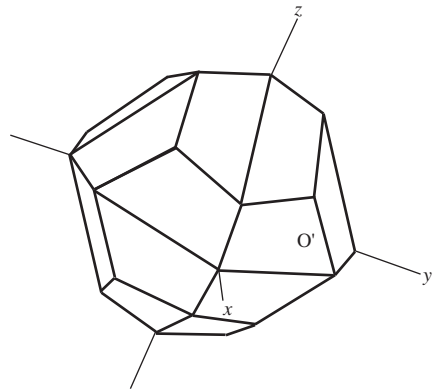
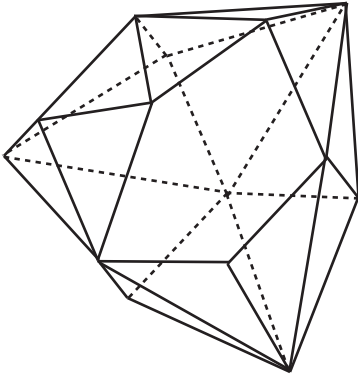


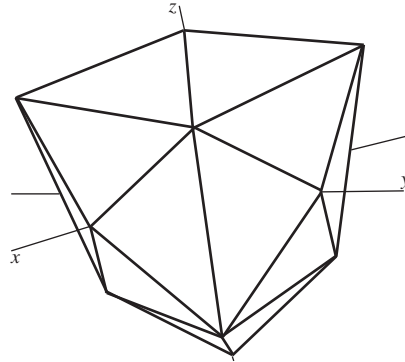
Fig. 9 bis : Le Diploèdre.

#### 4. Action du groupe $T$ sur le plan $P_0$ : l'hexatétraèdre

L'ensemble des anti-déplacements de  $T$  est  $fT$  où  $f$  est une réflexion conservant  $T$ , par exemple celle de miroir le plan  $(OS_1S_6)$ , qui envoie respectivement  $I, J, K$  sur  $K, J, I$ . On applique toujours la même technique.



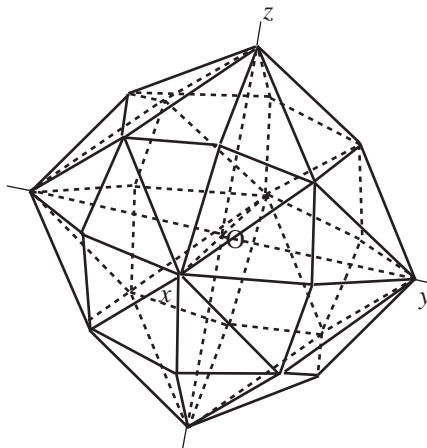
**Fig. 10 : L'hexatétraèdre.** Les 24 faces sont des triangles égaux. Les faces à l'avant sont en traits épais, les faces à l'arrière sont en pointillés.



**Fig. 10 bis : L'hexatétraèdre.**

#### 5. Action du groupe $G$ sur le plan $P_0$

Comme  $G = G^+ \cup G^-$ , il suffit de reprendre les intersections des demi-espaces en utilisant les résultats des paragraphes 3 et 4 ci-dessus ; on obtient un solide à 48 faces.



**Fig. 11 : L'hexooctaèdre**

Les 48 faces du solide sont triangulaires, les faces « cachées » sont en pointillé.

## VI. Cas particulier : le plan P est invariant par une rotation du sous groupe $G^+$ .

1. Recherchons les plans P en suivant la caractérisation donnée en IV, le vecteur  $\vec{V}$  désignant le vecteur normal à P. Trois cas sont possibles :

- i)  $\vec{V}$  dirige l'axe d'une rotation d'ordre 4, par exemple de composantes  $(1, 0, 0)$ .
- ii)  $\vec{V}$  dirige l'axe d'une rotation d'ordre 2, par exemple de composantes  $(0, 1, -1)$ .
- iii)  $\vec{V}$  dirige l'axe d'une rotation d'ordre 3, par exemple de composantes  $(1, 1, 1)$ .

Les plans P correspondants sont :

- un plan  $P_1$  du type i) et passant par  $S_1$  : son équation est  $x - 1 = 0$ ,
- un plan  $P_2$  du type ii) et passant par  $S_2$  : son équation est  $y - z = 2$ ,
- un plan  $P_3$  du type iii) et passant par  $S_1$  : son équation est  $x + y + z - 3 = 0$ .

On peut voir le nombre de faces du polyèdre soit en identifiant le stabilisateur de P, soit en écrivant les équations des plans de l'orbite, ce qui est plus simple.

### 2. Premier cas : $P_1$ d'équation $x = 1$

Les équations des images sont  $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ , on obtient donc le cube initial C.

### 3. Deuxième cas : $P_2$ d'équation $y - z = 2$

Les équations des images sont  $y \pm z = \pm 2, x \pm z = \pm 2, x \pm y = \pm 2$ , le polyèdre aura donc 12 faces. La face contenue dans  $P_2$  contient en son intérieur (cf : IV, 2) la projection de O, de coordonnées  $(0, 1, -1)$ . La projection de cette face sur le plan  $xOy$  contiendra donc le point  $(0, 1)$  en son intérieur. On calcule facilement que cette projection est le carré de sommets :  $(0, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 1)$ . Cette face est donc un parallélogramme dont on vérifie sans peine l'égalité des côtés ; donc c'est un losange (il suffit de calculer les coordonnées de ce losange !).

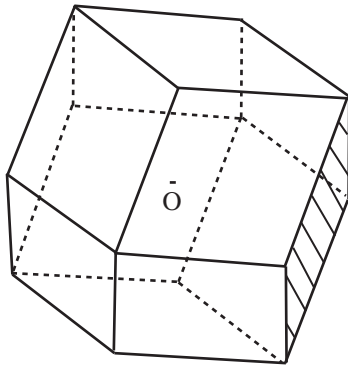


Fig. 12 : Les faces losanges « avant » du dodécaèdre rhomboïdal sont en trait épais

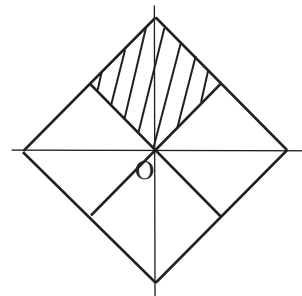


Fig. 12 bis : La projection orthogonale sur le plan  $xOy$  du dodécaèdre rhomboïdal est formée de carrés, projections des faces, ici des losanges

Le polyèdre est le **dodécaèdre rhomboïdal**.

#### 4. Troisième cas : $P_3$ d'équation $x + y + z = 3$ .

Les équations des images sont :  $x + y + z = \pm 3$ ,  $-x + y + z = \pm 3$ ,  $x - y + z = \pm 3$ ,  $x + y - z = \pm 3$ , le polyèdre aura donc 8 faces (Fig. 13). La face contenue dans le plan  $P_3$  contient en son intérieur la projection de  $O$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$ , la projection de cette face sur le plan  $xOy$  contiendra donc le point  $(1, 1)$ . On calcule facilement que c'est le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$  projection orthogonale du triangle équilatéral de sommets  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 3, 0)$ ,  $(3, 0, 0)$ . Le polyèdre est donc un octaèdre régulier (Fig. 13 et 13 bis ci-dessous).

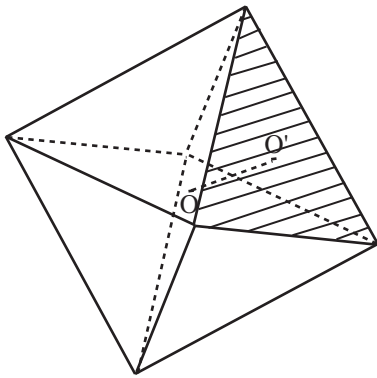


Fig. 13

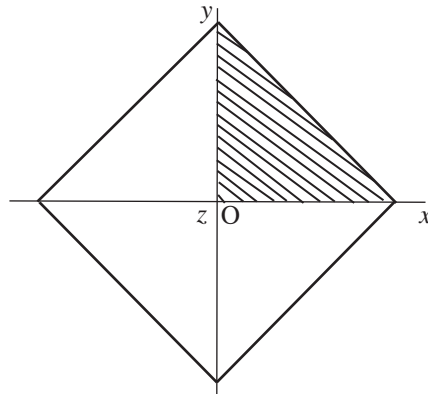


Fig. 13 bis

### Bibliographie

EUCLIDE. *Les éléments* (Livres I à V, X, XI, XIII), traduction et commentaires par B. Vitrac. PUF, 1990.

*Les éléments d'Euclide*, livre XIII, Groupe d'histoire des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand, Juin 2001.

A.M. LEGENDRE. *Éléments de géométrie* (12ème édition). Firmin Didot, 1836.

E. ROUCHE et C. DE COMBEROUSSE. *Éléments de géométrie* (7ème édition). Gauthier Villars, 1904.

J. HADAMARD. *Leçons de géométrie élémentaire* (7ème édition). Armand Colin, 1932.

M. BERGER. *Géométrie*, tome II, chap 12. Nathan, 1990.

M. AUDIN. *Géométrie*. Belin, 1998.

J. FRESNEL. *Méthodes modernes en géométrie*. Hermann, 1996.

P.B. YALE. *Geometry and symmetry*. Dover.

F. PECAUT. *Pavés et Bulles, éléments de cristallographie mathématique*. Publication de l'APMEP, 1977.

R. BKOUCHE. *De la géométrie et des transformations*. Revue REPÈRES IREM n° 4, juillet 1991.

R. BKOUCHE. *Appendice historique* dans D. LEHMANN et R. BKOUCHE. *Initiation à la géométrie*. PUF, 1988.