

## Quelques remarques sur les « répuns »

Richard Choulet(\*)

Je lis dans l'accompagnement des programmes de  $S^{(1)}$  en préambule à un exercice : « Les nombres 1, 11, 111, 1 111, etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens ». Ensuite on fait trouver quelques résultats plus ou moins évidents (jamais pour l'élève) en quatre questions.

Ce néologisme de rep-unit copié de l'anglais où d'ailleurs le trait d'union n'est pas écrit, n'a pas de raison d'être en français.

J'ai trouvé dans un livre le mot de « repunité » ; je ne trouve pas cela non plus des plus heureux vu la prononciation de « re » qui n'est pas « ré ». À la rigueur repunité aurait pu faire l'affaire mais en toute impunité, ce n'est pas facile à digérer.

Je propose de reprendre les choses à la base c'est-à-dire répétition du « un » en dénommant repun un tel nombre (les esprits chagrins refuseront leur repun quotidien).

Ainsi le repun d'ordre  $n$  est le nombre  $R_n = \underbrace{1 \cdots 1}_n$ .

Déjà à voir le nombre de sites de l'internet qui les abordent, on se doute que ces nombres ne doivent pas être si ridicules. Par ailleurs certaines propriétés (dont l'une figure – dans un cas simple – dans les commentaires évoqués) sont loin d'être évidentes en général.

### Y a-t-il des répuns puissances d'entiers ?

• La première constatation immédiate est :  $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$  où  $n \in \mathbf{N}^*$ .

•  $R_n$  est un carré si et seulement si existe un entier  $c$  tel que :  $9c^2 + 1 = 10^n$  ou encore  $10^n - (3c)^2 = 1$ . C'est bien sûr le cas de  $R_1 = 1^2$ .

En examinant l'égalité modulo 8, il est clair qu'il ne peut y avoir de solution où  $n > 2$  puisque  $10^n \equiv 0 [8]$  alors que  $(3c)^2$  est 0, 1 ou 4. Le cas  $n = 2$  n'offre pas de solution et  $n = 1$  a été vu.

• Plus généralement, le problème est de démontrer que l'équation  $9c^m + 1 = 10^n$  de triplet inconnu d'entiers  $(c ; m ; n)$  n'a pour seule solution que celle donnée par  $m = 1$ ,  
(\*) Lycée Fresnel Caen. richardchoulet@wanadoo.fr

(1) Collection Lycée – Série Accompagnement des programmes – Mathématiques baccalauréat séries S et ES – Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche – Direction de l'enseignement scolaire – Session 2004 – Centre national de documentation pédagogique.

$n = 1$  et  $c = 1$ . Dans les cas simples  $n = 2$  ou même  $n = 3$  ou  $4$ , le fait qu'il n'y ait pas de solution apparaît assez rapidement. Le cas général a été démontré en 1999 par Bugeaud et Mignotte. Je ne sais quel est le principe de leur démonstration mais on peut observer ceci.

Prenons  $m \geq 2$ . Remarquons, raisonnant modulo 4, que  $9c^m + 1$  n'est nul que lorsque  $c$  est du type  $c = 4K + 3$  avec  $m$  impair. Comme évidemment  $10^n$  est nul dès que  $n \geq 2$ , nous cherchons dorénavant les solutions pour lesquelles  $c = 4K + 3$  et  $m = 2k + 1$ .

Autrement dit les solutions autres que celle trouvée sont données en résolvant maintenant :

$$9(4K + 3)^{2k+1} = 10^n.$$

En raisonnant alors modulo 8,  $K$  ne peut être pair puisque la seule possibilité serait avec  $n = 2$  qui ne fournit rien.  $K$  est désormais impair. On arrive à :

$$9(8K_1 + 7)^{2k+1} + 1 = 10^n.$$

Maintenant si l'on examine le chiffre des unités des puissances impaires de  $8K_1 + 7$ , il y a périodicité de 5 sur le  $K_1$  et seul  $K_1 = 3$  donne  $R_1$  pour chiffres des unités. Ainsi  $K_1 = 5K_2 + 3$  qui conduit à l'équation :

$$9(40K_2 + 31)^{2k+1} + 1 = 10^n.$$

Regardons modulo 100 : pour avoir une solution le nombre doit se terminer par  $R_2$ . Il y a périodicité de 5 sur  $K_2$  et l'on ne trouve que 11 pour finale modulo 100 que dans les cas  $K_2 = 5K_3 + r$  avec  $r = 0$  et  $m = 10k + 7$ ,  $r = 1$  avec  $m = 10k + 3$ ,  $r = 2$  avec  $m = 10k + 1$  et enfin  $r = 4$  avec  $m = 10k + 9$ . L'équation s'écrit donc :

$$9(200K_3 + 40r + 31)^{10k+m'} + 1 = 10^n.$$

L'exploration, par exemple, de la branche issue de 111 ( $r = 2$ ) conduit aux équations :

$$9(1000K_4 + 111)^{50k+51} + 1 = 10^n,$$

$$9(1000K_4 + 311)^{50k+31} + 1 = 10^n,$$

$$9(1000K_4 + 511)^{50k+11} + 1 = 10^n,$$

$$9(1000K_4 + 711)^{50k+41} + 1 = 10^n,$$

$$9(1000K_4 + 911)^{50k+21} + 1 = 10^n.$$

Ainsi nous constituons une suite double d'équations de la forme :

$$9(a_p K + b_p)^{c_p k + d_p} + 1 = 10^n$$

d'inconnues  $K$ ,  $k$  et  $n$ , où  $(a_p)$  et  $(b_p)$  sont strictement croissantes,  $c_p$  et  $(d_p)$  sont croissantes. Ceci suggère qu'il ne peut y avoir de solution puisque, pour un exposant  $n$  donné, existe un entier  $p$  tel que  $b_p^{d_p} > 10^n$ . C'est très rapide : pour  $n = 4$ , les valeurs planchers à tester ( $K = k = 0$ ) pour avoir déjà un nombre terminé par trois zéros sont 317, 7 113, 11 111 et 1 919 qui sont largement plus grands que  $10^4$ .

Aucun répun n'est une puissance d'entier avec un exposant plus grand que un.

### Quelques constatations sur la décomposition en nombres premiers

- J'ai testé que  $R_2$ ,  $R_{19}$  et  $R_{23}$  sont premiers mais la littérature donne également  $R_{317}$ ,  $R_{1031}$ ,  $R_{49081}$  et  $R_{86453}$  pour les plus récents !
- Par ailleurs au cours des décompositions apparaissent les nombres premiers suivants : 9 091, 9 901, 909 091, 99 990 001, 999 999 000 001,  $(90)_8 91$  (l'indice indique le nombre de répétitions),  $9_8 0_7 1$ ,  $(900)_4 (990)_3 991$  (du moins jusqu'à  $R_{50}$ ) ce qui suggère l'obtention, avec ces répuns, d'une mine de nombres premiers de structure très typée.
- Jusqu'à  $R_{50}$ , seuls les cas 3, 4, 5, 7, 11, 17 et 47 donnent une décomposition en deux nombres premiers.
- En ce qui concerne des relations entre répuns (des précisions sont apportées plus loin) autres que celles faisant apparaître le systématique  $R_2$  tous les indices pairs et  $R_4$  tous les indices multiples de 4, nous avons par exemple :

$$R_{22} = R_2^2 \times 23 \times 4\,093 \times 8\,779 \times 21\,649 \times 513\,239,$$

$$R_{38} = R_2 R_{19} \times (90)_8 91,$$

$$R_{46} = R_2 R_{23} \times 47 \times 139 \times 2\,531 \times 549\,797\,184\,491\,917.$$

Le tableau ci-dessous fournit les décompositions en nombres premiers des répuns jusqu'à l'ordre 23. Les calculs ont été faits jusqu'à 53 (avec MAPLE®) mais l'internet en offre des tonnes !

Répun d'ordre	Décomposition en nombres premiers
2	11
3	$3 \times 37$
4	$11 \times 101$
5	$41 \times 271$
6	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
7	$239 \times 4\,649$
8	$11 \times 73 \times 101 \times 137$
9	$3^2 \times 37 \times 333\,667$
10	$11 \times 41 \times 271 \times 9\,091$
11	$21\,649 \times 513\,239$
12	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9\,901$
13	$53 \times 79 \times 265\,371\,653$
14	$11 \times 239 \times 4\,649 \times 909\,091$
15	$3 \times 31 \times 37 \times 41 \times 271 \times 2\,906\,161$
16	$11 \times 17 \times 73 \times 101 \times 137 \times 5\,882\,353$
17	$2\,071\,723 \times 5\,363\,222\,357$

18	$3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times 52\,579 \times 333\,667$
19	1 111 111 111 111 111 111
20	$11 \times 41 \times 101 \times 271 \times 3\,541 \times 9\,091 \times 27\,961$
21	$3 \times 37 \times 43 \times 239 \times 1\,933 \times 4\,649 \times 10\,838\,689$
22	$11^2 \times 23 \times 4\,093 \times 8\,779 \times 21\,649 \times 513\,239$
23	11 111 111 111 111 111 111 111

### Quelques relations entre répons

• Remarquons qu'on a toujours la relation :

$$R_{m+n} = 10^m R_n + R_m = 9R_m R_n + R_m + R_n.$$

• Un résultat sympathique sur le PGCD :  $R_m \wedge R_n = R_{m \wedge n}$ , mais en général  $R_m \vee R_n \neq R_{m \vee n}$  (mieux : toujours dès que  $m$  ou  $n$  n'est pas un).

En effet, on sait que  $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1$  pour tout entier  $a \geq 2$  (c'est vrai d'ailleurs avec  $a = X$  et les polynômes de  $\mathbf{R}[X]$  correspondants).

• Dès que  $m \wedge n = 1$ ,  $R_{mn}$  est multiple de  $R_m \times R_n$  et plus généralement  $R_{mn}$  est multiple de  $R_{m \vee n}$ .

C'est évident. Par

$$R_{mn} = \frac{10^{mn} - 1}{9} = \frac{(10^m)^n - 1}{10^m - 1} \times \frac{10^m - 1}{9} = \frac{(10^n)^m - 1}{10^n - 1} \times \frac{10^n - 1}{9},$$

il est clair que  $R_m$  et  $R_n$  divisent  $R_{mn}$  en étant premiers entre eux.

Pour l'autre résultat, c'est la même idée en écrivant d'abord que  $m = \delta m'$  et  $n = \delta n'$  avec  $m' \wedge n' = 1$ . Puis de  $mn = (\delta m' n') \times mn$  vient

$$R_{mn} = \frac{(10^{\delta m' n'})^\delta - 1}{10^{\delta m' n'} - 1} \times \frac{10^{\delta m' n'} - 1}{9}.$$

### Où j'élève les répons au carré et j'arrive à démontrer<sup>(2)</sup>

Dans un article précédent (« Étude de motifs »), j'envisageais les carrés de nombres à motifs. Le cas le plus simple est effectivement celui de  $R_n$  où l'on répète le 1 à satiété. Examinons les carrés de ces nombres du point de vue du « cœur ». La suite des cœurs est périodique de période 9. J'établis que la suite des cœurs est donnée par

$$C_n = E\left(\frac{R_n^2}{10^{n-1}}\right) - E\left(\frac{R_n^2}{10^{n+1}}\right) \times 100 = E\left(\frac{10^{n+1}}{81}\right) - 100 \times E\left(\frac{10^{n-1}}{81}\right).$$

La période 9 qui est annoncée n'est pas autre chose que celle de  $\frac{1}{81}$  dans son développement décimal illimité.

(2) Voir BV numéro 457.

### Répuns, relation fonctionnelle et structure

Nous avons vu plus haut que pour tous  $m$  et  $n$  entiers (convention  $R_0 = 0$ ) :

$$R_{m+n} = 10^m R_n + R_m = 9R_m R_n + R_m + R_n.$$

Plusieurs pistes sont exploitables :

1. Quelles sont toutes les suites  $(u_m)$  qui vérifient :

$$u_{m+n} = \alpha u_m u_n + u_m + u_n \quad (1)$$

( $\alpha \in \mathbf{C}^*$ , ici  $\alpha = 9$ ) ?

2. Quelles sont toutes les suites  $(v_m)$  qui vérifient :

$$v_{m+n} = \beta^m v_n + v_m \quad (2)$$

( $\beta \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ , ici  $\beta = 10$ ) ?

3. Peut-on structurer l'ensemble  $\{R_m, m \in \mathbf{N}\}$  ?

#### Partie 1

On peut considérer  $\alpha \in \mathbf{C}^*$  ; l'itération de la relation (1) conduit par récurrence à :

$$u_{km} = \frac{(1 + \alpha u_m)^k - 1}{\alpha} \text{ pour tous } k \text{ et } m, \text{ ce qui fournit donc } u_m = \frac{(1 + \alpha u_1)^m - 1}{\alpha}.$$

La relation (1), satisfaite pour  $m = n = 0$ , donne donc  $u_0 = 0$  ou  $u_0 = \frac{1}{\alpha}$  (auquel cas la suite est constante).

**Conclusion** : Dans le cas  $\alpha = 9$ ,  $(R_m)$  est la seule suite non constante vérifiant (1) pour laquelle  $R_1 = 1$ .

Il sera intéressant de regarder ce qui se passe si l'on prend pour  $R_1$  un polynôme de  $\mathbf{C}[X]$  et en particulier d'examiner quand  $R_m$  et  $R_n$  sont premiers entre eux, quel est leur PGCD...

#### Partie 2

L'itération de (2) donne  $v_m = \frac{\beta^m - 1}{\beta - 1} v_1$ . Donc on voit que (2), pour  $\beta = 10$ ,

caractérise en fait les répautres (rep-digits en anglais) obtenus avec  $v_1 \in [2; 9]$ .

Par ailleurs les suites obtenues par (1) ou (2) ne coïncident que si et seulement si :  $\beta - 1 = \alpha v_1$ , ce qui est la moindre des choses pour notre application numérique de départ !

#### Partie 3

En préambule, on peut remarquer que la loi  $*$  définie sur  $\mathbf{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{\alpha} \right\}$  par :

$$z * z' = \alpha z z' + z + z'$$

munit cet ensemble d'une structure de groupe abélien dans lequel l'itéré d'ordre  $m$

d'un élément  $z$  est :  $z^{(m)} = \frac{(1 + \alpha z)^m - 1}{\alpha}$  avec  $m \in \mathbf{Z}$ .

Cette remarque montre donc qu'il est plus intéressant de définir  $\mathcal{R} = \{R_m, m \in \mathbf{Z}\}$  où

on aura pris pour  $m < 0$  :  $R_m = \frac{R_{-m}}{10^m}$ . De la sorte  $(\mathbf{Z}; +)$  est isomorphe à  $(\mathcal{R}; *)$  par

$\varphi : m \mapsto R_m$ . Il en est clairement de même avec toute valeur de  $\alpha$  en adaptant pour

$m < 0$  :  $u_m = -\frac{R_{-m}}{(1 + \alpha u_1)^m}$  ; dans le cas où  $u_m$  est entier pour  $m \in \mathbf{N}$ , une remarque

déjà faite montre que  $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$ . C'est le cas avec, par exemple,  $u_1 = 1$  et  $\alpha = 7$ ,

qui donnent  $u_m = \frac{8^m - 1}{7}$ .

## Fonctions génératrices de répuns

Rappelons que la fonction génératrice ordinaire (f.g.o) d'une suite  $(u_m)$  est la

fonction  $F$  définie sur  $\mathbf{C}$  par  $F(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n$  ; la fonction génératrice exponentielle

(f.g.e) quant à elle, est  $G$  définie par  $G(z) = \sum_{n \geq 0} u_n \frac{z^n}{n!}$ . En posant  $R_0 = 0$ , la fonction

génératrice ordinaire de  $(R_m)$  est  $\Theta$  telle que :

$$\Theta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n - 1}{9} z^n = \frac{z}{(1-10z)(1-z)}.$$

Pour rire voici la fonction génératrice ordinaire  $\varphi$  de  $(R_n^2)$  :

$$\varphi(z) = \frac{1}{81(1-100z)} - \frac{2}{81(1-10z)} + \frac{1}{81(1-z)}.$$

Les f.g.e respectives sont :  $\Phi(z) = \frac{1}{9}(e^{10z} - e^z)$  et  $\Psi(z) = \frac{1}{81}(e^{100z} - 2e^{10z} + e^z)$ .

## Conclusion

Ils paraissent bien inoffensifs ces répuns, bataillons de clones de UN alignés comme des petits soldats sans armes ! Mais quels ravages ils font dans les neurones quand on se met à penser à eux : on ne les oublie jamais.