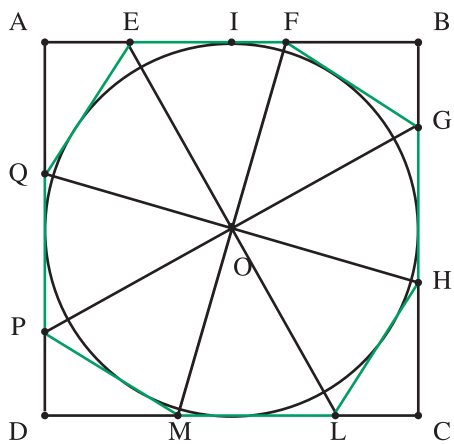
# Une famille d'octogones pas très réguliers même avec Cabri

Michel Carral(*)

*Dans ces quelques lignes nous donnons une construction générique d'une famille infinie d'octogones inscrits dans un carré, circonscrits au cercle inscrit dans le carré, ayant tous leurs côtés égaux, tels que tous les polygones de cette famille sont irréguliers sauf un et un seul.*

Soient ABCD un carré, O le centre du cercle inscrit, I le milieu du côté AB et E un point du segment AI. La droite OE coupe le côté DC au point L, et la perpendiculaire à EO passant par le point O coupe les côtés BC et AD aux points G et P. Les bissectrices des angles formés par les droites EL et GP coupent les côtés AB, DC, BC, et AD respectivement aux points F, M, H, Q.
Le polygone EFGHLMPQ est un octogone, et la famille des octogones ainsi construits répond aux conditions énoncées. Par rotation de centre O, il suffit de montrer que deux côtés consécutifs sont égaux et tangents au cercle inscrit au carré.




Le point F est image du point Q par la rotation de centre O et d'angle 90° et les segments OQ et OF sont égaux. Comme les angles $\widehat{EOQ}$ et $\widehat{QOP}$ sont égaux, les triangles EOQ et EOF sont égaux.
Ainsi les triangles EOQ et EOF se déduisent l'un de l'autre par la symétrie axiale d'axe OE, qui est aussi axe de symétrie du cercle inscrit au carré : les deux côtés consécutifs EQ et EF de l'octogone EFGHLMPQ sont égaux et tangents au cercle inscrit au carré.

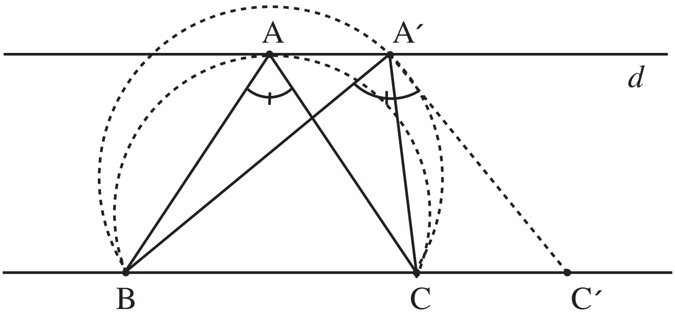
(*) IUFM Midi-Pyrénées.

Pour que l'octogone ainsi construit soit régulier il faut et il suffit que tous ses angles soient égaux (ou qu'il soit inscrit dans un cercle) ; il existe une unique position du point E qui correspond à ce cas, c'est celle où le triangle rectangle AEQ est isocèle. Dans ce cas, le côté EQ est perpendiculaire à la diagonale AC du carré et l'octogone est d'aire minimum.

**Une démonstration :**

On montre qu'à hauteur constante et angle au sommet constant l'aire d'un triangle est minimum lorsque le triangle est isocèle.

Considérons un triangle isocèle ABC et une droite *d* passant par A et parallèle à la base BC. Si on fait courir le sommet A sur la droite *d*, les aires des triangles ABC et A′BC (A′ étant le sommet courant) sont constantes mais les angles au sommet différent : les arcs capables correspondants sous lesquels on voit le côté BC sont de rayons distincts et l'angle en A′ est moindre que l'angle en A.
Soit C′ le point de la droite BC tel que les angles (AB, AC) et (A′B, A′C′) soient égaux : on rencontre les points B, C, C′ dans cet ordre. Le triangle ABC est contenu (par A′BC interposé) dans le triangle A′BC′ : il est d'aire moindre.




**Autre solution :**

L'idée est de minimiser un côté de l'octogone, les triangles le composant étant tous d'égale hauteur. Le carré est toujours supposé de côté égal à 2 ; on note $i$ l'angle $\widehat{EOI}$, le côté de l'octogone est égal à $\tan(i)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-i\right)$, c'est-à-dire à

$\frac{\sin(45°)}{\cos(i)\cos(45°-i)}=\frac{\sqrt{2}}{\cos(45°)+\cos(2i-45°)}$. Le côté est de longueur minimum si et seulement si $\cos(2i - 45°)$ est maximum, c'est-à-dire si et seulement si $i = 22{,}5°$. Cette situation correspond au cas où le triangle AEQ est isocèle et la longueur du côté de l'octogone est égale à $2\left(\sqrt{2}\quad 1\right)$.

**Épilogue :**

La découverte de cette famille d'octogones nous a été donnée par la recherche de différentes démonstrations de la propriété suivante :

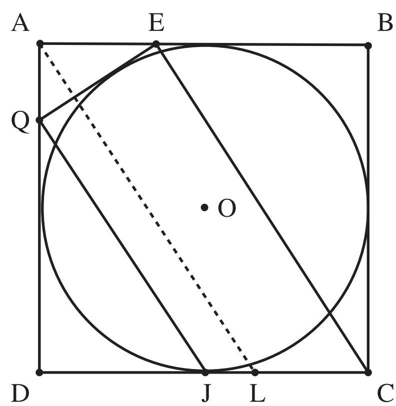
*Soient* ABCD *un carré,* I *et* J *les milieux respectifs des côtés* AB *et* DC. *Pour* E *point de* AI *et* Q *point de* AD *il y a équivalence entre « la droite* EQ *est tangente au cercle inscrit au carré » et « les droites* EC et QJ *sont parallèles ».*

L'utilisation des propriétés de la famille d'octogones ci-dessus permet une démonstration élémentaire de ce résultat que nous allons fournir. On notera par ailleurs qu'avec les notations précédentes, les droites EQ, OP et DC sont concourantes.

Supposons que la droite EQ soit tangente au cercle inscrit. La somme des angles $\widehat{\text{QEO}}$ et $\widehat{\text{EQO}}$ est égale à la moitié de la somme des angles $\widehat{\text{QEB}}$ et $\widehat{\text{EQD}}$, somme égale à 270° : l'angle au centre $\widehat{\text{QOE}}$ vaut 45°. On retrouve un octogone de la famille précédente en traçant la perpendiculaire à OE passant par O ; par suite, si on note $a$, $b$, $c$ les longueurs des segments AQ, AE et QE, on a les égalités $a^2 + b^2 = c^2$ et $a + b + c = 2$ (le côté du carré est supposé égal à 2). En élevant au carré la dernière égalité on obtient :

$$(a + c)(b + c) = 2 \qquad (*)$$

Par symétrie centrale de centre O les droites EC et AL sont parallèles ; les droites QJ et EC (i.e. QJ et AL) sont parallèles si et seulement si les rapports $\frac{\text{DJ}}{\text{DL}}$ et $\frac{\text{DQ}}{\text{DA}}$ sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{1}{a+c} = \frac{b+c}{2}$ ou $\frac{1}{a+c} \times \frac{2}{b+c} = 1$, ce qui est donné par l'égalité (*).




Réciproquement supposons que les droites QJ et EC sont parallèles. La tangente au cercle inscrit au carré passant par le point E coupe le côté AD au point Q′ : les droites

JQ et JQ′ sont parallèles. Par suite les points Q et Q′ sont confondus et la droite EQ est tangente au cercle inscrit.

**L'oracle Cabri[1] :**

Lors de la recherche de cette propriété, l'oracle Cabri II apporte un regard intéressant : traçant la tangente EQ au cercle inscrit et demandant si les droites EC et QJ sont parallèles l'oracle donne une réponse instable, à savoir :

Les objets sont parallèles Les objets ne sont pas parallèles

lorsqu'on fait courir le point E sur le segment AI, et ce que le carré soit construit avec la fonction « Polygone régulier » ou avec les fonctions « Droites perpendiculaires », « Cercle », etc. Notons que cette dernière construction permet d'avoir un oracle plus stable erroné ou non.

De même construisant les points E et Q tels que les droites EC et QJ soient parallèles, puis les points d'intersection de la droite EQ avec le cercle inscrit, on obtient deux points. Si on trace le segment d'extrémité un de ces deux points, disons S, et l'autre le point O et si on demande si les segments EQ et OS sont perpendiculaires, on obtient une réponse instable avec Cabri II et stable erronée ou exacte avec Cabri IIPlus, à savoir :

Les objets sont perpendiculaires Les objets ne sont pas perpendiculaires

Si on mesure l'angle $\widehat{QSO}$, sa valeur n'est pas tout à fait égale à 90° avec la précision d'affichage maximum. Cette valeur est meilleure si on construit le carré avec les fonctions « Droites perpendiculaires », « Cercle », etc. ; on peut dire qu'elle est bonne jusqu'à six chiffres après la virgule. L'oracle est plus instable, mais donne une réponse alternative avec Cabri II au contraire de Cabri IIPlus car on obtient une meilleure approximation. Pour percevoir une instabilité des réponses avec Cabri IIPlus, il faut modifier la position des sommets du carré, la réponse est stable si on fait courir le point E.
Pour une utilisation pédagogique de l'oracle, Cabri II me semble plus adapté car on peut voir (en fonction de l'ordinateur utilisé) à partir de combien de chiffres après la virgule le logiciel estime que le résultat est valide en faisant seulement courir le point E, le carré étant stable.

Ceci s'explique naturellement : Cabri est un logiciel basé sur le numérique et non le calcul formel. Cela lui donne une très grande ergonomie, le prix à payer étant des erreurs de calculs, même si l'approximation de ces calculs est très bonne, au contraire des logiciels basés sur le calcul formel pour lesquels il est difficile de dire qu'ils possèdent une bonne ergonomie. C'est une raison supplémentaire qui peut convaincre l'élève de la nécessité de la démonstration.

(1) Cabri possède une fonction qui permet à son utilisateur de s'adresser au logiciel comme un fidèle s'adressait dans l'antiquité à une divinité.

*Note :*
Plus généralement on peut poser le problème d'inscrire dans un polygone régulier de *n* côtés un polygone de 2*n* côtés ayant tous ses côtés égaux. La question étant alors de le construire et de savoir quant ce polygone est régulier.
Une situation analogue a été proposée, en prenant un autre point de vue, dans l'exercice n$^o$ 1 des Olympiades internationales 2005 dans le cas du triangle équilatéral. (cf. Brochure APMEP n$^o$ 171, p. 197-207) :

**Énoncé**

Six points sont choisis sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC ; $A_1$, $A_2$ sur [BC] et $B_1$, $B_2$ sur [CA] et $C_1$, $C_2$ sur [AB].
Ces points sont les sommets d'un hexagone convexe $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dont les côtés sont égaux.
Démontrer que les droites $(A_1B_2)$, $(B_1C_2)$ et $(C_1A_2)$ sont concourantes.