Complément d'enquête : à propos du Savant Cosinus

Jacques Borowczyk(*)

La vie est un tissu de coups de poignard
qu'il faut avaler goutte à goutte.
Christophe
Les facéties du Sapeur Camember

Dans cette note, nous proposons un calcul barycentrique donnant une autre démonstration de l'alignement des trois points remarquables d'un triangle ABC dont le point appelé *Savant Cosinus* par François Rideau établi dans [1] en permettant une localisation plus précise. Un second calcul barycentrique prouve que le *Savant Cosinus* appartient au segment ayant pour extrémités deux autres points, centres de cercles remarquables associés au triangle ABC.

1. Un calcul

Pour célébrer les 150 ans de Georges Colomb, dit Christophe (1856-1945), auteur de *L'idée fixe du Savant Cosinus* et du *Sapeur Camember*, François Rideau a appelé dans [1] *Savant Cosinus* le point du plan d'un triangle ABC de coordonnées barycentriques $\left(\cos\widehat{\mathrm{A}}, \cos\widehat{\mathrm{B}}, \cos\widehat{\mathrm{C}}\right)$: François Rideau en donne une construction géométrique et établit qu'il appartient à la droite passant par le centre de gravité G et le point de Gergonne du triangle, noté Γ.

Nous proposons une autre preuve de l'alignement de ces trois points remarquables.

Si nous désignons par r_a, r_b, r_c les rayons des cercles exinscrits, le calcul de la distance du centre du cercle circonscrit O au côté (BC) (resp. (CA), (AB)) permet d'établir la *formule de Lemoine* :

$$\mathrm{R}\cos\widehat{\mathrm{A}} = \mathrm{R} + \frac{r - r_a}{2}$$

(resp. $\mathrm{R}\cos\widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{R} + \frac{r - r_b}{2}$, $\mathrm{R}\cos\widehat{\mathrm{C}} = \mathrm{R} + \frac{r - r_c}{2}$).

Le Savant Cosinus est donc le point de coordonnées barycentriques

$$\left(\cos\widehat{\mathrm{A}}, \cos\widehat{\mathrm{B}}, \cos\widehat{\mathrm{C}}\right)$$

ou

(*) IUFM d'Orléans-Tours.

$$\left(\mathrm{R}+\frac{r-r_a}{2},\mathrm{R}+\frac{r-r_b}{2},\mathrm{R}+\frac{r-r_c}{2}\right).$$

Par ailleurs si p désigne le demi-périmètre du triangle ABC on a :

$$\tan\frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}=\frac{r_a}{p},\quad \tan\frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}=\frac{r_b}{p},\quad \tan\frac{\widehat{\mathrm{C}}}{2}=\frac{r_c}{p}.$$

Comme l'on sait que $r_a + r_b + r_c = 4\mathrm{R} + r$, on a l'égalité trigonométrique :

$$\tan\frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}+\tan\frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}+\tan\frac{\widehat{\mathrm{C}}}{2}=\frac{r_a}{p}+\frac{r_b}{p}+\frac{r_c}{p}=\frac{4\mathrm{R}+r}{p}.$$

Le point de Gergonne du triangle, noté Γ, est donc le point de coordonnées barycentriques (r_a,r_b,r_c).
Par suite, pour tout point M, on a :

$$(2\mathrm{R}+2r)\overrightarrow{\mathrm{M\Omega}}=(4\mathrm{R}+r-r_a)\overrightarrow{\mathrm{MA}}+(4\mathrm{R}+r-r_b)\overrightarrow{\mathrm{MB}}+(4\mathrm{R}+r-r_c)\overrightarrow{\mathrm{MC}}$$

$$(2\mathrm{R}+2r)\overrightarrow{\mathrm{M\Omega}}=3(4\mathrm{R}+r)\overrightarrow{\mathrm{MG}}-(4\mathrm{R}+r)\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$$

et l'égalité :

$$(2\mathrm{R}+2r)\overrightarrow{\mathrm{G\Omega}}+(4\mathrm{R}+r)\overrightarrow{\mathrm{G\Gamma}}=0$$

établit que le centre de gravité G appartient au segment [ΓΩ].

De plus l'inégalité $(2\mathrm{R} + 2r) < (4\mathrm{R} + r)$ prouve que G est plus proche de Γ que de Ω.
En fait dès que ABC n'est pas équilatéral, on a $(2\mathrm{R} + 2r) < 3\mathrm{R} < (4\mathrm{R} + r)$ qui permet une localisation encore plus précise.
Par ailleurs, si le triangle n'est pas isocèle, l'inégalité entre les longueurs des côtés $a < b < c$ entraîne $p - c < p - b < p - a$ d'où l'inégalité entre les rayons des cercles exinscrits $r_a < r_b < r_c$ et, pour un triangle acutangle, celle des angles $\widehat{\mathrm{A}}<\widehat{\mathrm{B}}<\widehat{\mathrm{C}}$. Les inégalités $r_a < r_b < r_c$ permettent de localiser le point Γ dans l'un des six triangles délimités par les médianes du triangle ABC : pour un triangle acutangle, l'inégalité $\cos\widehat{\mathrm{A}}>\cos\widehat{\mathrm{B}}>\cos\widehat{\mathrm{C}}$ prouve que le point Ω appartient au triangle « symétrique » par rapport à G du triangle qui contient les points I et Γ et, comme on l'a vu, on a : ΓG < GΩ. Dans le cas d'un triangle rectangle ABC, le Savant Cosinus appartient à l'hypoténuse du triangle mais il est extérieur au triangle lorsque celui-ci possède un angle obtus.

2. Remarques

Le point Ω′ qui est le symétrique du point I par rapport à O est le centre du cercle circonscrit au triangle de sommets les centres des cercles exinscrits $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$; c'est aussi le point commun des cercles de centre respectif A, B, C passant par les points de contact avec les côtés du triangle des cercles exinscrits.

L'annulation du déterminant (4) de [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan\dfrac{\widehat{A}}{2} & \tan\dfrac{\widehat{B}}{2} & \tan\dfrac{\widehat{C}}{2} \\ \cos\widehat{A} & \cos\widehat{B} & \cos\widehat{C} \end{vmatrix} = 0$$

entraîne aussi l'alignement des points dont les coordonnées trilinéaires sont proportionnelles aux lignes de ce déterminant, à savoir I pour la ligne (1,1,1) et O pour la ligne $\left(\cos\widehat{A}, \cos\widehat{B}, \cos\widehat{C}\right)$. Quel est le point de coordonnées trilinéaires $\left(\tan\dfrac{\widehat{A}}{2}, \tan\dfrac{\widehat{B}}{2}, \tan\dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$? C'est un point de coordonnées barycentriques :

$$\left(a\tan\frac{\widehat{A}}{2}, b\tan\frac{\widehat{B}}{2}, c\tan\frac{\widehat{C}}{2}\right) = \left(\sin^2\frac{\widehat{A}}{2}, \sin^2\frac{\widehat{B}}{2}, \sin^2\frac{\widehat{C}}{2}\right) = \left(ar_a, br_b, cr_c\right).$$

et l'on sait que comme $ar_a = p(r_a - r)$ on a :

$$ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R - r).$$

Philippe Deleham a étudié ce point remarquable V barycentre de (ar_a, br_b, cr_c) et isogonal d'un point U barycentre de $(a(p-a), b(p-b), c(p-c))$ dans [3]. U est le point de Lemoine du triangle $I_aI_bI_c$ et V est le point de concours des droites (OI), (O_aI_a), (O_bI_b), (O_cI_c) où O_a, O_b, O_c désignent les milieux des hauteurs respectives issues des points A, B, C.

Avec le point de Lemoine K, les points U, G, I et V sont toujours intérieurs au triangle. U est l'image du point de Gergonne Γ par l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ et aussi l'image du point Γ par l'homothétie de centre V et de rapport $-\dfrac{2R}{r}$ qui transforme le triangle pédal du point I en le triangle $I_aI_bI_c$. Ainsi V est le point de concours des droites (GΓ) et (OI). L'*Encyclopedia of Triangle Centers* de Clark Kimberling, confirme que ce point V désigné par X(57) est bien sur les droites (GΓ) et et (OI) et qu'il est l'isogonal du point de Lemoine U du triangle $I_aI_bI_c$ désigné par X(9), de coordonnées trilinéaires $\left(\operatorname{cotan}\dfrac{\widehat{A}}{2}, \operatorname{cotan}\dfrac{\widehat{B}}{2}, \operatorname{cotan}\dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$. D'autres propriétés du point X(57) sont indiquées dans [4].

3. Alignement du point Ω, du point de Nagel X(8) et du point de Longchamps X(20)

Le point Ω′, symétrique du point I par rapport à O, est milieu du segment ayant pour extrémités le point de Nagel X(8) et le point de Longchamps X(20) du triangle ABC. C'est le point X(40) de l'*Encyclopedia of Triangle Centers* de Clark Kimberling.
Ce point est barycentre de :

$$\left(a\left(\cos\hat{B}+\cos\hat{C}-\cos\hat{A}-1\right),b\left(\cos\hat{C}+\cos\hat{A}-\cos\hat{B}-1\right),c\left(\cos\hat{A}+\cos\hat{B}-\cos\hat{C}-1\right)\right).$$

On a donc :

$$a\mathrm{R}\left(\cos\hat{B}+\cos\hat{C}-\cos\hat{A}-1\right)=a\left(\mathrm{R}+\frac{r-r_b}{2}+\mathrm{R}+\frac{r-r_c}{2}-\left(\mathrm{R}+\frac{r-r_a}{2}\right)-\mathrm{R}\right),$$

$$a\mathrm{R}\left(\cos\hat{B}+\cos\hat{C}-\cos\hat{A}-1\right)=a\left(-\frac{r_b+r_c}{2}+\frac{r+r_a}{2}\right).$$

Or $r_b + r_b - r = 4\mathrm{R} - r_a$ donc :

$$a\mathrm{R}\left(\cos\hat{B}+\cos\hat{C}-\cos\hat{A}-1\right)=-2a\mathrm{R}+a\frac{r_a}{2}.$$

Mais on a les relations :

$$ar_a = p(r_a - r),$$

$$-a-\frac{p\left(r-r_a\right)}{2}=p-a-p\frac{2\mathrm{R}+r-r_a}{2\mathrm{R}}=(p-a)-p\cos\hat{A}.$$

Le point X(40) est donc barycentre de :

$$\left(a\mathrm{R}+\frac{p\left(r-r_a\right)}{2},b\mathrm{R}+\frac{p\left(r-r_b\right)}{2},c\mathrm{R}+\frac{p\left(r-r_c\right)}{2}\right);$$

$$\left(p\cos\hat{A}-(p-a),p\cos\hat{B}-(p-b),p\cos\hat{C}-(p-c)\right).$$

De plus

$$a\mathrm{R}+\frac{p\left(r-r_a\right)}{2}+b\mathrm{R}+\frac{p\left(r-r_b\right)}{2}+c\mathrm{R}+\frac{p\left(r-r_c\right)}{2}=2p\mathrm{R}+p\frac{2r-4\mathrm{R}}{2}=rp.$$

Par suite, pour tout point M, on a :

$$pr\overrightarrow{\mathrm{MX}(40)}=p(\mathrm{R}+r)\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}-p\mathrm{R}\overrightarrow{\mathrm{MX}(8)}.$$

Ainsi Ω appartient au segment [X(8)X(40)] et la relation

$$r\overrightarrow{\mathrm{MX}(40)}=(\mathrm{R}+r)\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}-\mathrm{R}\overrightarrow{\mathrm{MX}(8)}$$

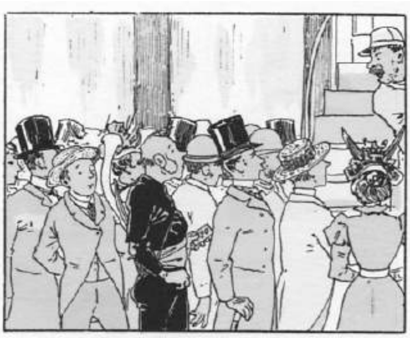
donne pour M = Ω

$$r\overrightarrow{\Omega X(40)} + R\overrightarrow{\Omega X(8)} = 0,$$

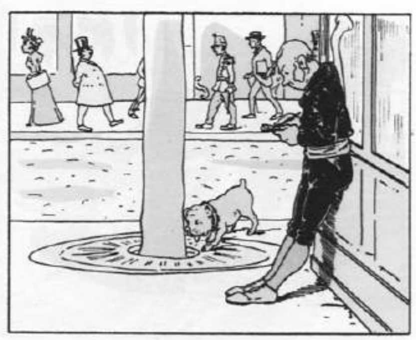
ce qui prouve que le point Ω est plus près du point de Nagel X(8) que de X(40).
Ainsi Ω est le centre de l'homothétie positive qui transforme le cercle inscrit du triangle antimédial $A_1B_1C_1$ en le cercle circonscrit du triangle $I_aI_bI_c$ dont les sommets sont les centres des cercles exinscrits du triangle ABC.
Le point de Nagel est toujours intérieur au triangle ABC et appartient au sous-triangle délimité par les médianes symétrique du triangle qui contient le point de Gergonne X(8) alors que le point de Longchamps X(40), centre radical des cercles centrés en A, B et C de rayons respectifs *a*, *b* et *c* est le milieu du segment [X(8)X(40)] et peut être extérieur au triangle.
Signalons que Gaston Gohierre de Longchamps qui est né à Alencon en 1842, fut professeur de mathématiques spéciales à Poitiers, Mont-de-Marsan et Paris. Il a créé en 1880 et animé pendant plusieurs années la revue *Le Journal de mathématiques spéciales*. En 1890, Gohierre de Longchamps a publié un *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre*. Chevalier de la Légion d'Honneur, Longchamps est mort à Paris en 1906.

Bibliographie

1 – François Rideau, Le Savant Cosinus, *Bulletin de l'APMEP*, n° 457, 2005, 249-261.
2 – Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*
http://faculty.evansville.edu/ck6:encyclopedia/ETC.html
3 – François Lo Jacomo, Les Problèmes de l'APMEP, *Bulletin de l'APMEP*, n° 420, 1999, 90-98.
4 – Eric Danneels, The Intouch Triangle and the OI-line, *Forum Geometricorum*, Volume 4, 2004, 125-134.
5 – P.-R Machin, *Georges Colomb, Christophe : enfant de Lure et père du Sapeur Camember*, Maé-Eri éditions, 2001.
6 – *Georges Colomb, Christophe (1856-1945)*, *BT*, mai 2004.



N'ayant pas réussi à déterminer la nature de l'objet informe, Cosinus fait une nouvelle tentative pour prendre l'omnibus. Or en 12 minutes 3 voitures passent complètes. Cosinus admire la stupidité d'une administration dont les véhicules sont complets précisément aux heures où il y a beaucoup de monde.



Ayant admiré la stupidité de l'Administration, et exprimé en termes énergiques le mépris qu'il professe pour l'illogisme de sa manière d'agir, Cosinus s'isole pour résoudre le problème suivant : « Sachant qu'en 12 minutes il monte 0 voyageur, dans combien de temps appellera-t-on le n° 720 ? »