

Se dépayser pour interroger les choix de l'enseignement français de la géométrie. Voyage au Chili

Corine Castela & Catherine Houdement(*)

Pour concevoir l'atelier, nous nous sommes appuyées sur les travaux menés de 2003 à 2005 dans le cadre d'une coopération (**programme ECOS**) entre l'Université de Paris 7 et l'Université Pontificale Catholique de Valparaiso (Chili)⁽¹⁾.

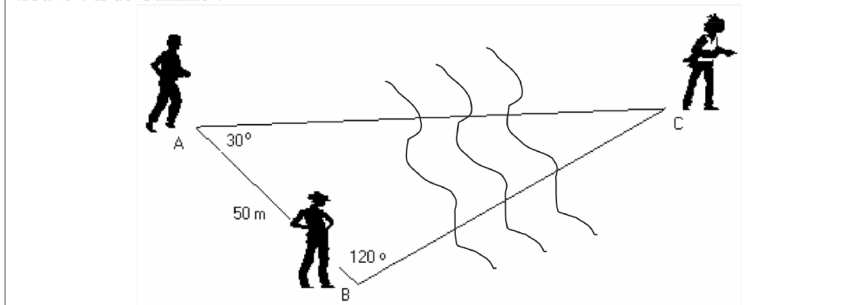
L'atelier comprenait trois parties : une réflexion des participants à partir de l'énoncé d'un exercice de géométrie chilien, la présentation d'éléments d'un cadre théorique permettant d'analyser les approches de la géométrie dans les deux pays, un récapitulatif des principales différences mises en évidence. Ce qui nous a conduits, en conclusion, à interroger les choix français sur l'enseignement de la géométrie.

Des stratégies différentes pour le même exercice

Le questionnement de départ était le suivant :

Sous quelles formes et à quels niveaux de la scolarité vous paraît-il possible de poser cet exercice ? Il serait intéressant que vous explicitiez les connaissances en jeu.

La figure montre André et Bernard qui se trouvent sur la même rive d'une rivière à une distance de 50 mètres l'un de l'autre. Camille est sur l'autre rive. A quelle distance André se trouve-t-il de Camille ?



Les collègues français se sont accordés sur le fait que cet exercice était exploitable de la Cinquième à la Première.

(*) MC en mathématiques à l'IUFM de l'Académie de Rouen.
Chercheuses en didactique des mathématiques à DIDIREM, Université de Paris 7.
corine.castela@rouen.iufm.fr, catherine.houdement@rouen.iufm.fr

(1) Cette équipe réunit pour le côté chilien I. Guzman, L. Consigliere, B. Acosta ; pour le côté français J.-C. Raucher, A. Kuzniak, C. Houdement, C. Castela.

En Cinquième, une méthode consiste à construire un triangle ($A'B'C'$) réduit à l'échelle, de mesurer à la règle la longueur $A'C'$, de déduire la longueur AC .

De la Quatrième à la Seconde, les méthodes attendues reposent sur la prise de conscience et la démonstration du fait que le triangle est isocèle, fait caché par la représentation proposée ; elles impliquent la construction d'un tracé auxiliaire (médiatrice de $[AC]$, hauteur issue de C , ...) et la mobilisation de théorèmes (théorème de Pythagore, cosinus, etc.).

En Première, la formule des sinus permet une démonstration rapide.

Pour illustrer les choix chiliens, nous avons montré un extrait de manuel chilien de seconde Media (équivalent de notre seconde générale), proposant la méthode suivante pour déterminer, dans le cas général, la grandeur inaccessible AC .

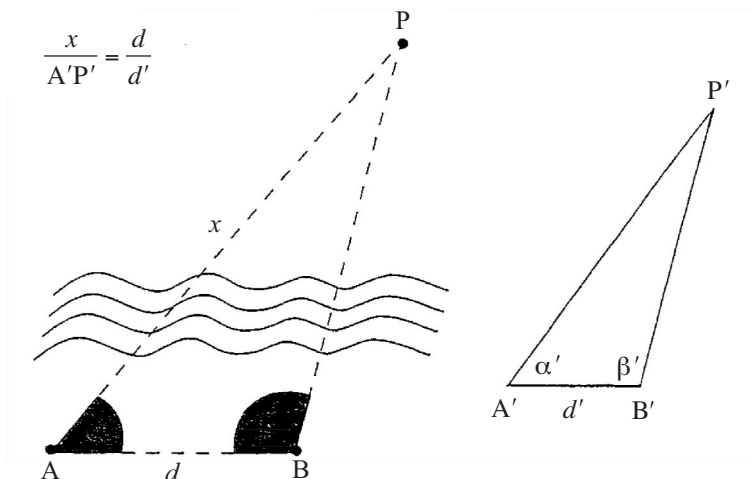
Extrait traduit de Arrayan Editores (2001) *Matemática 2° Medio* Unidad 2 Semejanza de figuras planas.

Les notations symboliques chiliennes ont été conservées.

Précisons que l'exercice analysé plus haut suit, dans le même manuel, la présentation de cette méthode.

Une autre application de la similitude des triangles est celle qui permet de calculer la distance à un point lointain ou inaccessible, par exemple la largeur d'un fleuve, la distance entre un point et un bateau visible en haute mer, etc. Supposons que tu désires calculer la distance entre un point A situé sur la rive d'un fleuve et un arbre situé en un point P de la rive opposée.

Pour calculer cette distance, tu peux procéder de la façon suivante.



- 1) Situer un point B à une certaine distance de A .
- 2) Par visée, mesurer les angles déterminés \widehat{PAB} et \widehat{ABP} .

- 3) Mesurer \overline{AB} .
- 4) Construire à l'échelle un triangle auxiliaire $A'B'P'$ semblable au triangle ABP (critères angulaires de similitude).
- 5) Mesurer avec une règle ou un mètre ruban la longueur de $\overline{A'P'}$.
- 6) Calculer la longueur de \overline{AP} , en prenant en compte le rapport de similitude de l'échelle employée $\frac{d}{d'}$.

Commentaire : ce développement prend place dans une des sept unités du programme nommée *Figures semblables*, qui aborde les notions suivantes : représentation à l'échelle, agrandissements – réductions, critères de similitude des triangles, théorème de Thalès, influences mutuelles entre géométrie et divers domaines artistiques (nombre d'or).

On constate qu'à ce niveau de la scolarité chilienne, une méthode reposant sur la réalisation effective de mesures est considérée comme licite et encouragée⁽²⁾.

Nos collègues français ont évoqué cette méthode pour la classe de Cinquième, mais l'ont exclue des niveaux supérieurs, en proposant des résolutions complètement théoriques. Ceci est conforme à l'esprit des textes officiels et des manuels français, dans la mesure où ceux-ci insistent, dès la Cinquième, sur l'apprentissage de la démonstration à l'occasion de toute question géométrique.

La comparaison entre le point de vue français présenté par nos collègues, en accord avec nos analyses, et l'approche chilienne illustre une des différences majeures que nous avons constatées et pour laquelle nous avons besoin des éléments théoriques présentés dans la partie suivante.

Un cadre théorique pour la géométrie

Alain Kuzniak et Catherine Houdement (1999, 2003, 2006), dans le cadre de travaux de recherche en didactique de mathématiques, ont, à la suite de Gonseth⁽³⁾, différencié trois paradigmes dans la Géométrie Élémentaire : la Géométrie Naturelle (ou Géométrie I), la Géométrie Axiomatique Naturelle (ou Géométrie II), la Géométrie Axiomatique Formaliste (ou Géométrie III).

Ces paradigmes se différencient quant à leurs objets, leur mode de validation et la place qu'y jouent les instruments. Pour des informations, voir les articles de la bibliographie.

(2) Remarque : au Chili les critères de similitude jouent deux rôles : ils fournissent des techniques de réalisation de la représentation à l'échelle appuyées sur les angles ; ils les justifient au niveau théorique ; toutes choses absentes en France en Cinquième, dernier moment où on aborde véritablement la question des représentations à l'échelle (dans le thème Proportionnalité).

(3) Gonseth (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Éditions du Griffon.

Le tableau suivant présente quelques éléments de synthèse.

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géom. axiomatique formaliste III
Espace	Espace intuitif et physique	Espace géométrique euclidien	Espace abstrait
Objets	Objets matériels (ou informatiques) Dessins, maquettes, produits d'une activité instrumentée	Objets idéels, sans dimension Figures (<i>certaines</i> sous-parties de l'espace, <i>certaines</i> relations) Définitions, théorèmes Modèle euclidien	Objets idéels Points, droites, plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Axiomes, définitions
Artefacts	Tout instrument qui justifie la fin (pliage, superposition, règle, équerre, gabarit, ...) Logiciels dynamiques	Instruments physiques (par ex. règle et compas), <i>s'il existe une justification théorique</i> « Raisonement hypothético-déductif »	« Raisonement hypothético-déductif »

Dans la scolarité obligatoire, les deux paradigmes en jeu sont ceux de la Géométrie I et la Géométrie II. Ces deux paradigmes sont différents, en particulier sur les points suivants :

	Géométrie I	Géométrie II
Mesurage	Licite et producteur de connaissances	Illicite pour la production, licite pour l'heuristique
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil heuristique, support du raisonnement
Preuve	Évidence, contrôle par instrument (dont la fonction « <i>drag</i> » des logiciels dynamiques) ou construction effective avec raisonnement	Axiomatisation partielle. Propriétés et « îlots de démonstration »

Les deux paradigmes sont complémentaires⁽⁴⁾ à tout moment de la scolarité. La Géométrie I correspond au cadre géométrique de l'école élémentaire. Ce cadre est aussi nécessaire au collège et lycée pour la construction d'une heuristique et la production de résultats. Ces résultats, qui ne sont que des conjectures en Géométrie II, se transforment en résultats de Géométrie II s'ils peuvent se déduire logiquement de faits avérés en Géométrie II (axiomes, théorèmes, données du problème) : c'est l'enjeu du texte de démonstration.

(4) Cette complémentarité est telle que Houdement et Kuzniak (2006) ont été amenés à introduire la notion « d'espace de travail géométrique ».

La Géométrie I n'est pas vide de raisonnement : l'élève de primaire qui retrouve le centre perdu d'un cercle par double pliage, l'élève de collège traitant l'exercice de départ à partir d'un dessin à l'échelle, mobilisent des connaissances en réponse à une question. Il serait dommage de priver les élèves de collège (et de lycée) de la possibilité de produire des résultats raisonnés sous prétexte qu'ils ne sont pas fournis dans LE cadre théorique (celui de la Géométrie II).

Comme le donnent à voir les exemples rencontrés précédemment, notre étude a montré qu'au Chili, un traitement en Géométrie I reste licite très longtemps dans la scolarité, même si se développe une initiation parallèle à la démonstration. La Géométrie I reste un point d'appui assumé pour l'introduction des connaissances nouvelles jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire (18 ans). En France, la Géométrie I est le cadre privilégié de l'enseignement primaire, mais elle est évacuée, au bénéfice de la Géométrie II, dès la Cinquième, voire en Sixième dans les manuels des programmes 1996 à 1998...

Les principales différences entre France et Chili

Le tableau ci-dessous présente les principales différences relatives à l'enseignement de la géométrie dans les deux pays (à partir d'analyses de programmes et manuels).

CHILI	FRANCE
Plus de temps passé à construire le sens des notions, théorèmes.....	Plus de concepts et théorèmes. Théorèmes vite naturalisés.
Espace de travail intégrant le mesurage.	Espace de travail reposant sur la démonstration
Confrontation à des situations spatiales peu modélisées (cf. physique). Plus de liens avec les pratiques sociales et professionnelles	Plus de temps pour des applications, surtout internes aux mathématiques. Centration sur la démonstration.
Plus de liens avec les arts. Plus de liens avec l'histoire des mathématiques, passées et présentes.	

1. Pour une durée d'enseignement des mathématiques sensiblement équivalente en France et au Chili (sur une scolarité de 6 ans à 18 ans, c'est-à-dire intégrant pour la France le lycée), les programmes français présentent plus de contenus que les programmes chiliens : la quasi intégralité des concepts et théorèmes figurant dans les programmes chiliens de géométrie peut être considérée comme traitée à la fin de la Seconde française.

2. Au Chili, un temps important est consacré à la construction des connaissances, à l'introduction des concepts et théorèmes par des situations qui s'appuient, jusqu'à la fin de la scolarité, sur des travaux expérimentaux en Géométrie I, intégrant la réalisation de mesures. Les élèves sont mis à contribution pour formuler, conjecturer, puis valider (en Géométrie I ou en Géométrie II en fin de scolarité) les résultats au programme. En France, à partir du collège, l'essentiel du travail introduisant les théorèmes est consacré à leur démonstration par le professeur. L'accent est mis

ensuite sur leur utilisation dans des exercices où ils sont outils pour démontrer. On semble considérer que c'est par l'utilisation que se construit la compréhension.

3. Ainsi en France, une grande partie de l'activité des élèves est consacrée à la résolution d'exercices internes aux mathématiques. L'enjeu majeur pour la géométrie est l'apprentissage de la démonstration. Au Chili, on attache au moins autant d'importance aux dimensions heuristiques de l'activité mathématique. Par ailleurs, si les résultats sont utilisés dans des exercices strictement mathématiques, les élèves y sont également confrontés à des situations spatiales peu modélisées, intégrant la réalisation de mesures (approche en France réservée aux Physiciens), dans lesquelles les connaissances mathématiques montrent leur efficacité pour des problèmes de la vie quotidienne, professionnelle ou issus d'autres disciplines scientifiques. L'accent est mis sur la nécessité de lier les mathématiques aux pratiques sociales.

4. Enfin, de manière tout à fait institutionnelle, avec des rubriques explicites précises dans les programmes, l'enseignement chilien s'intéresse aux liens des mathématiques avec les arts, l'histoire mais aussi aux développements récents des mathématiques (ex : contribution de Descartes, théorème de Fermat-Weyl). Ces dimensions sont présentes en France dans les déclarations d'intentions des programmes, mais ne sont pas reprises en termes de contenus obligatoires.

Nous sommes en présence de deux conceptions radicalement différentes de l'enseignement de la géométrie : en France, une conception très introvertie, les mathématiques étant enseignées pour elles-mêmes, en privilégiant la dimension démonstration ; au Chili, une conception plus ouverte aux dimensions exploratoires de l'activité mathématique et aux applications des mathématiques dans les diverses pratiques sociales. La pertinence de ces choix mérite pour le moins d'être examinée comme un autre possible pour le système français d'enseignement des mathématiques.

Bibliographie

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie. *Petit x* n° 51. 5-21. IREM de Grenoble.

Houdement C., Kuzniak A. (2003) Quand deux droites sont presque parallèles ou la version géométrique du presque égal. *Petit x* n° 61. 61-74. IREM de Grenoble.

Houdement C., Kuzniak A. (à paraître 2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg.

Pour information, équivalence des classes Chili France

France	École élémentaire		Collège				Lycée			
	Cycle2 CP CE1	Cycle3 CE2 CM1 CM2	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère	Terminale	
Chili	Basica						Media			
	1° ; 2° ; 3° ; 4°	5°	6°	7°	8°	1°	2°	3°	4°	