

# Pourquoi et comment fait-on de la recherche en mathématique ?

Yves Meyer

*Le professeur Miguel de Guzmán (1936-2004) a créé en Espagne un programme destiné à détecter et à stimuler le talent des élèves des lycées. En particulier Miguel de Guzmán voulait expliquer à ces élèves comment se prend la décision de consacrer sa vie à faire de la recherche. C'est dans ce cadre que j'ai parlé de mon expérience de chercheur. J'ai fait cet exposé à Madrid, le 29 septembre 2001, et mon public était un groupe motivé de lycéens espagnols. C'est pourquoi Borges et Calderón sont évoqués. Jorge Luis Borges est un écrivain et poète argentin. Alberto Calderón (1920-1998) est un mathématicien argentin qui a totalement renouvelé l'étude des équations aux dérivées partielles. Claudine Schwartz m'a prié de confier la version française de ce texte au Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques et je l'en remercie. Je suis ouvert aux critiques que ce texte peut susciter ; j'y répondrai et mon e-mail est : ymeyer@cmla.ens-cachan.fr*

## 1. Mathématiques, révoltes et libertés

J'ai commencé à aimer les mathématiques à l'âge de 13 ans environ. C'était à Tunis où j'ai passé mon enfance.

L'Afrique du Nord était alors encore une colonie française, mais ceux que nous appelions « les arabes » commençaient à lutter pour obtenir l'indépendance. La réponse de la France aux demandes des nationalistes était souvent une répression brutale et quelquefois l'amorce d'un dialogue.

J'étais un enfant révolté et je sentais au fond de moi que les justifications du colonialisme n'étaient que des mensonges. Un argument que j'entendais souvent à Tunis était que, grâce à l'introduction des techniques agricoles européennes, le rendement des terres avait décuplé en Tunisie. Cela justifiait le vol des terres et revenait à dépouiller les plus pauvres sous prétexte qu'ils gèrent mal leur argent. Beaucoup d'adultes acceptaient l'injustice et l'ordre établi. Je ne leur faisais pas confiance et *j'ai alors conclu que je ne trouverai pas la vérité en écoutant les autres.*

Découvrir la vérité par moi-même est ainsi devenu un besoin. Je ne savais pas que cette recherche de la vérité « en solitaire » est impossible en dehors du domaine restreint des mathématiques.

Voici ce que je croyais :

*Si un problème est aujourd'hui trop difficile pour moi, je finirai cependant par en trouver la solution, car un amour sincère, lucide et anxieux de la vérité permet toujours d'accéder à la connaissance.*

Les problèmes de géométrie m'apportaient un plaisir double. Je pouvais d'abord vérifier, en faisant une belle figure dessinée avec soin, que les neuf points que l'on m'avait demandé de construire étaient situés sur un même cercle, comme on me l'annonçait. Il fallait ensuite prouver qu'il en est bien ainsi. Le bonheur intellectuel de trouver une démonstration élégante se mêlait au plaisir procuré par la beauté de l'image.

En physique ou dans les sciences expérimentales, la connaissance me semblait s'apparenter à une forme de croyance, puisque je ne pouvais contrôler ou vérifier par moi-même ce que disait le maître. Il utilisait sans cesse des arguments d'autorité que je détestais. Par exemple, il disait : « Michelson et Morley ont fait telle expérience et obtenu tel résultat ». Je ne pouvais reproduire cette expérience et il me semblait donc aussi sot de croire en Michelson et Morley que de croire aux sorcières.

En mathématique, il y a une totale égalité entre le maître et l'élève. Je peux prouver, par la force et la justesse de mon argumentation, que le maître se trompe.

Les mathématiques signifiaient donc la liberté (de penser par moi-même) et l'égalité (avec le maître et les autres élèves).

La fraternité entre chercheurs, il me faudra attendre bien des années pour la découvrir.

## 2. La recherche en mathématiques

Les enfants résolvent les problèmes posés par les professeurs. Ce faisant, ces enfants sont des chercheurs. Mais ils n'ont pas ajouté une pierre nouvelle à l'édifice des mathématiques, car le professeur sait déjà la solution. Le métier du chercheur consiste à découvrir ce que personne ne savait auparavant. Ces enfants, devenus adultes, ont-ils le droit de consacrer leur vie à une activité qui semble aussi puérile ? Qui leur dira quels problèmes résoudre ? Un chercheur en mathématique est-il un enfant qui a refusé de vieillir ?

S'il est vrai que l'on peut, en mathématique, démêler le vrai du faux grâce à ses propres ressources, la question suivante est : *où, dans quelle direction, doit-on diriger ses efforts ?*

André Weil était l'ami de Jean Delsarte. À la mort de Delsarte, André Weil a rendu hommage à l'œuvre scientifique de son ami. Delsarte, nous dit André Weil, définissait lui-même, en toute liberté et indépendance, ses thèmes de recherche.

J'ai fait de même et ai décidé moi-même, sans consulter personne, quel serait le sujet de ma thèse. De mon temps, la thèse était le résultat de cinq ans d'efforts et de découvertes. La thèse est, encore aujourd'hui, le premier combat et la première victoire dans la vie d'un chercheur. Le problème que je me proposais de résoudre était, sans que je le sache, étudié à l'Université de Chicago, par Charles Fefferman et Elias Stein, en utilisant des méthodes très originales dues à Alberto Calderón. Il va sans dire que les résultats de Stein dépassèrent les miens. En croyant entreprendre une recherche indépendante et solitaire, je me trouvai soudain au centre d'un tourbillon scientifique.

Montaigne (1533-1592) insiste sur la solidarité qui unit les chercheurs et décrit, dans ses « Essais », la chaîne humaine qui fait avancer la science.

*Ce que ma force ne peut découvrir, je ne laisse pas de le sonder et essayer et, en retastant et pétrissant cette nouvelle matière, la remuant et l'eschauffant, j'ouvre à qui me suit quelque facilité.*

*Autant en fera le second au tiers qui est cause que la difficulté ne me doit pas désespérer, ni aussi peu mon impuissance...*

La recherche en mathématique est une œuvre collective. Mes efforts, mes découvertes, n'ont de sens que s'ils prolongent ou complètent le travail d'un autre mathématicien. Mais d'où vient le succès de cette aventure collective ? Doit-on admettre l'existence d'un « mystérieux chef d'orchestre » qui dirigerait « du haut du ciel » le travail des chercheurs. Jean-Pierre Serre remarquait, lors d'un exposé à l'Académie des Sciences, que le théorème qui fournit la liste complète des groupes finis simples est une *œuvre collective* de plus de 6 000 pages qu'aucun mathématicien ne pourra jamais lire ni contrôler dans son intégralité. Croire en ce théorème s'apparente donc à un acte de foi et l'on rejoint ici mes critiques de l'enseignement de la physique. Rappelons qu'un groupe fini  $G$  est simple s'il ne contient aucun sous-groupe  $H$  (excepté  $G$  lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre) tel que  $G/H$  soit un groupe. Dans ce cas, le chef d'orchestre qui a dirigé cette œuvre collective et réparti le travail entre ses collaborateurs fut Daniel Gorenstein.

### 3. Alberto Calderón

C'est en 1974 environ (j'avais 35 ans) que j'ai renoncé à mon orgueilleuse indépendance. Pendant une dizaine d'années (1974-1983), j'ai accepté d'être le disciple de Calderón. Ensuite (1984-1992) je devins celui du physicien Alexandre Grossmann. Mais pour devenir le disciple d'un maître, encore faut-il que ce maître vous accueille. Calderón m'a accueilli et m'a dévoilé son programme de recherche. Ce programme consistait à construire de nouveaux opérateurs qui allaient révolutionner l'analyse complexe et les équations aux dérivées partielles. Calderón me laissait entrevoir le nouveau monde qu'il se proposait de découvrir et d'explorer à l'aide de ces opérateurs. Les opérateurs sont aussi utiles aux mathématiciens que les moteurs électriques le sont aux ingénieurs.

Mais pour que le programme de Calderón fonctionne, il fallait ouvrir une porte magique. Cette porte restait fermée, verrouillée, et nul ne pouvait pénétrer dans le monde enchanté évoqué par Calderón. Cette porte magique avait un nom : la continuité du noyau de Cauchy pour les courbes Lipschitziennes. En mai 1981, après sept ans d'efforts, j'ai fini par comprendre comment la porte s'ouvrait. Aujourd'hui cette porte s'ouvre encore plus facilement grâce aux travaux de Joan Verdera, de l'Université Autonoma de Barcelone. Pendant ces sept années, j'ai collaboré avec Ronald Coifman, j'ai appris à travailler en équipe et l'assaut final a bénéficié de l'aide d'Alan McIntosh.

Alberto Calderón me traitait en ami et je l'aimais. Il connaissait mes opinions politiques. Les siennes étaient différentes. Mais j'aimais ses critiques. Par exemple, il détestait Atahualpa Yupanqui et, avec son amabilité usuelle, il m'expliquait les raisons de son désaccord. Il m'a fait découvrir les poèmes de Jorge Luis Borges et, en particulier, le « Poema de los dones » qui commence ainsi :

*Nadie rebaje a lágrima o reproche  
Esta declaración de la maestría  
De Dios. que con magnífica ironía  
Me dio a la vez los libros y la noche<sup>(1)</sup>.*

Dans ce poème, Borges rend grâce à Dieu qui lui offrit deux dons en même temps : la cécité et l'honneur de devenir directeur de la bibliothèque de Buenos Aires. Borges ne pouvait plus lire les livres qu'il a tant aimés, mais seulement les caresser. Alberto Calderón m'a fait comprendre les méfaits du péronisme. Calderón était pudique. Il lui arrivait cependant de se laisser aller à la nostalgie et d'évoquer ses promenades dans le Buenos Aires de sa jeunesse.

En juin 1998. l'université Autonoma de Madrid a tenu à lui rendre un dernier hommage. J'ai eu le bonheur de revoir Alberto Calderón à cette occasion.

#### 4. Les mathématiques et la connaissance scientifique.

Nicolas Bourbaki est le nom d'un petit groupe de mathématiciens français. Bourbaki a cherché à développer la rigueur, la cohérence et l'unité des mathématiques. Henri Poincaré était montré du doigt comme le « mauvais élève », car, dans son œuvre, il arrivait que les hypothèses d'un théorème soient modifiées au cours de la démonstration...

Bourbaki, malgré sa critique injuste de l'œuvre de Poincaré, a renforcé l'unité des mathématiques. Mais Bourbaki a aussi élargi le fossé séparant les mathématiques de la physique.

Comme je l'ai dit plus haut, la physique m'inspirait une grande méfiance. Ce n'est qu'en 1985 environ que j'ai changé d'avis et que j'ai perçu l'unité des sciences. J'en suis encore émerveillé.

Cette vision nouvelle, je la dois à Alex Grossmann et à Jean Morlet. Le premier est un spécialiste de Mécanique Quantique. Le second était un ingénieur. Morlet travaillait sur des problèmes de traitement du signal posés par la recherche pétrolière et, plus précisément, par la vibrosismique. La vibrosismique imite le sonar de la chauve-souris et fournit des signaux présentant des variations très rapides (appelées transitoires), qu'il est impossible d'analyser correctement en se limitant à l'analyse de Fourier. Pour analyser ces signaux, Morlet a commencé par redécouvrir une identité remarquable qui avait été trouvée par Alberto Calderón vingt ans avant. Mais il a fait bien plus. Il a compris que cette identité fournit un nouveau langage permettant de mieux analyser et décrire les signaux transitoires et les images. Ingrid

(1) NDLR : Que personne n'attende par pleurs ou reproches à cette affirmation de la puissance de Dieu, qui d'une merveilleuse ironie m'a donné à la fois les livres et la nuit.

Daubechies, Stéphane Mallat et moi allions inventer les algorithmes numériques rapides qui permettent d'intégrer la vision de Jean Morlet dans ce que l'on appelle aujourd'hui la révolution numérique. Les résultats de ces recherches servent à accélérer la transmission des images sur le web, mais s'appliquent aussi à l'imagerie médicale. Le nom technique de cette découverte est JPEG2000.

Dans cet exemple, les mathématiciens ont suivi la voie tracée par les physiciens. Les mathématiciens ne sont pas isolés du monde qui les entoure, même s'ils le croient. Mais il y a aussi des exemples où les mathématiciens sont des prophètes, devançant les physiciens et annonçant le monde à venir.

Voici un exemple de cette capacité divinatoire des mathématiques.

En 1969, alors que j'étais professeur à l'Université de Paris-Sud, je me suis attaché à résoudre un problème mathématique difficile, posé par Raphaël Salem. C'est à cette occasion que j'ai inventé une configuration géométrique remarquable qui est, en un sens, une nouvelle façon de disposer des points, des « petits cailloux » dans un plan. Ce faisant j'avais découvert les quasicristaux, dix ans avant qu'ils ne soient trouvés dans la nature, en chimie. Les « petits cailloux » figurent les emplacements des atomes. Les quasicristaux sont aujourd'hui bien plus importants que ne l'était le problème posé par Salem, car ce sont des arrangements moléculaires nouveaux, ayant des propriétés physiques remarquables. Cette étrange aventure est décrite par Robert V. Moody, de l'Université d'Alberta, Edmonton. Canada.

## 5. Les mathématiques et la peine des hommes

Barbara Weiss (la femme du mathématicien Guido Weiss) me voyait, un soir du mois de mai 1981, travailler avec acharnement sur un problème posé par son mari. Elle m'a dit :

*« Yves, si au lieu de travailler sur ces mathématiques qui ne servent à rien, tu utilisais ton intelligence à alléger la souffrance des hommes, les choses iraient un peu moins mal sur cette terre. »*

Ce reproche m'a blessé, mais j'ai continué mon travail mathématique et, deux jours après, j'avais résolu le problème posé.

Aujourd'hui, après tant d'années, je ne sais toujours pas répondre aux critiques de Barbara Weiss.

Une réponse un peu facile et mensongère serait la suivante. Oui, j'ai pu alléger la souffrance des hommes. En effet, grâce au travail de tout un groupe de chercheurs et de médecins, les nouvelles méthodes de traitement de l'image qu'Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat et moi avons découvertes s'appliquent à de nombreux problèmes posés par l'imagerie médicale.

Mais cette réponse est mensongère, car ce que j'attends de mon travail de mathématicien est de retrouver le mélange de peur, d'excitation et de joie qu'un enfant ressent en cherchant le trésor enfoui dans l'île mystérieuse.