

# Spectre d'un nombre

Daniel Reisz<sup>(\*)</sup>

En arithmétique nous connaissons tous l'intérêt d'associer à un entier  $a$  l'ensemble de ses multiples dans  $\mathbb{Z}$  ou dans  $\mathbb{N}$  :

$$a\mathbb{Z} = \{\dots, -ka, \dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots, ka, \dots\},$$

$$a\mathbb{N} = \{0, a, 2a, \dots, ka, \dots\}, \quad a\mathbb{N}^* = \{a, 2a, \dots, ka, \dots\}.$$

Dans l'anneau  $\mathbb{Z}$ , ces ensembles forment des idéaux, avec tout ce que cela entraîne (voir par exemple [DEMAZURE]) Rappelons simplement ce résultat classique, où  $a \vee b$  désigne le ppcm des entiers  $a$  et  $b$  :

$$a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} = (a \vee b)\mathbb{N}$$

ainsi que le lien avec les congruences :

$$x \equiv y \pmod{a} \Leftrightarrow x - y \in a\mathbb{Z}.$$

À partir de là on peut penser à des généralisations. Une des plus connues, d'utilisation courante, est la notion de « multiple d'un réel  $x$  » :

$$x\mathbb{Z} = \{\dots, -kx, \dots, -2x, -x, 0, x, 2x, \dots, kx, \dots\}$$

et chacun connaît l'usage, dans le cadre des mesures des angles orientés, du cas particulier où  $x = \pi$  ou  $2\pi$

$$\pi\mathbb{Z} = \{\dots, -k\pi, \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi, \dots\}$$

qui mène tout droit à l'écriture modulaire

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\pi}$$

pour dire que

$$\alpha - \beta \in \pi\mathbb{Z}.$$

## 1. Définition du spectre d'un nombre réel.

Mais on peut aussi penser à une autre généralisation de  $a\mathbb{N}^*$  qui consiste à associer au réel positif non nul  $x$  la suite des entiers

$$\text{Spec}(x) = ([x], [2x], [3x], \dots)$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

Cette suite  $\text{Spec}(x)$  s'appelle le *spectre* de  $x$ .

*Remarque 1.* Si  $x$  est entier, alors  $\text{Spec}(x) = x\mathbb{N}^*$ .

*Remarque 2.* Dans la suite  $\text{Spec}(x)$  certains termes peuvent figurer plusieurs fois. On remarquera que ce phénomène se produit lorsque  $x < 1$ . Par contre, si  $x > 1$  alors il y

(\*) reiszd@aol.com

aura des lacunes, plus ou moins fréquentes, par rapport à la suite des entiers  $\mathbb{N}^*$ .

*Exemples.*

$$\text{Spec}\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots)$$

$$\text{Spec}(\sqrt{2}) = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots)$$

$$\text{Spec}\left(\frac{1}{7}\right) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, \dots)$$

$$\text{Spec}(2006) = (2006, 4012, \dots)$$

Une des premières propriétés qui justifie indirectement le rôle du spectre comme « trace caractéristique » d'un nombre est la suivante :

*Propriété.* Deux réels distincts ont des spectres distincts, ou encore : si  $a \neq b$ , alors  $\text{Spec}(a) \neq \text{Spec}(b)$ .

La démonstration en est simple : Supposons sans nuire à la généralité du résultat que  $a < b$ . Alors il existe un entier  $m$  tel que

$$m(b - a) > 1$$

soit

$$mb > ma + 1$$

ce qui implique.

$$[mb] > [ma].$$

Il en résulte que  $\text{Spec}(b)$  contient moins de  $m$  éléments inférieurs ou égaux à  $[ma]$ , alors que  $\text{Spec}(a)$  en contient au moins  $m$ , donc ils sont différents.

*Remarque.* La détermination du spectre d'un réel  $x$  est l'occasion d'une jolie activité de programmation sur une calculatrice programmable, avec toutes les questions liées à la gestion d'une valeur approchée lorsque  $x$  est par exemple irrationnel.

## 2. Les suites de Beatty

On appelle *suite* (ou *spectre*) de Beatty le spectre d'un nombre irrationnel. Ces suites de Beatty apparaissent par exemple dans l'analyse du jeu de Wythoff, jeu proposé par ce mathématicien en 1907 et qui généralise en quelque sorte le classique jeu de Nim.

*Le jeu de Wythoff.*

On dispose de deux ou plus tas d'allumettes. À tour de rôle, chaque joueur prend autant d'allumettes qu'il veut dans un ou deux tas. S'il en prend dans deux tas, il en prend la même quantité dans chacun. Celui qui prend la ou les dernières allumettes a gagné.

Avec deux tas, l'analyse peut se faire facilement sur un quadrillage avec comme coordonnées le nombre d'allumettes dans chaque tas.

Il faut atteindre la position gagnante (0,0).

Pour cela il faut donner à l'adversaire une position telle que quoiqu'il joue, il nous permettra d'arriver à cette position (0,0). Toutes les cases (0,x), (x,0) et (x,x) nous permettent d'atteindre (0,0). Il faut donc que l'adversaire soit contraint de jouer sur une de ces cases.

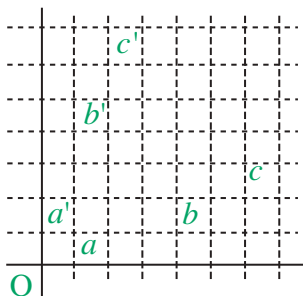
Les deux cases les plus proches qui ne font pas de cette liste sont les cases (1,2) et (2,1). En y amenant l'adversaire il sera forcé de jouer une des cases (1,1), (0,1) ou (0,2), ou leurs symétriques.

De proche en proche on construit ainsi la liste des « positions clés ». De toute autre position, on peut atteindre une position clé, d'une position clé on ne peut pas atteindre une autre position clé.

Voici la liste des premières positions clés :

rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	...
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	...

et leur représentation graphique



Ces valeurs peuvent se calculer aisément : on commence par le rang 0, position (0,0).

Le rang 1 a pour valeur x le plus petit nombre non trouvé : 1, et  $y = x + \text{rang} = 1 + 1 = 2$ .

Au rang 2 le plus petit pas déjà trouvé est 3 et  $y = x + \text{rang} = 5$ . Etc.

W.A. Wythoff a montré que ces nombres sont les suites de Beatty  $x_n = [n\varphi]$ ,  $y_n = [n\varphi^2]$

du nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\dots$  et de son carré  $\varphi^2$ .

Les positions clés sont aussi données par des suites de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... qui donne en groupant les termes par paires : (1,2), (3,5), (8,13), (21,34), ..., la première paire n'apparaissant pas dans cette suite est (4,7).

On peut former une suite « à la Fibonacci » 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... qui donne les paires (4,7), (11,18), (29,47), ...

(Plusieurs sites parlent du jeu de Wythoff. Ici nous avons utilisé [www.chehip.free.fr/index.html](http://www.chehip.free.fr/index.html).)

Quelques exemples de spectres de Beatty pas tout à fait choisis par hasard.

Valeur de $x$	Spectre de $x$
$\sqrt{2}$	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, ...
$\sqrt{2}+2$	3, 6, 10, 13, 17, 20, ...
$\sqrt{3}$	1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, ...
$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	2, 4, 7, 9, 11, 12, ...
$e$	2, 5, 8, 10, 13, 16, 19, ...
$\frac{e}{e-1}$	1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, ...
$\pi$	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...
$\frac{\pi}{\pi-1}$	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...

L'examen de ce tableau montre qu'en les accouplant deux à deux  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}+2$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ , etc. et, en observant leur spectre, on peut conjecturer qu'ils réalisent

à chaque fois une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

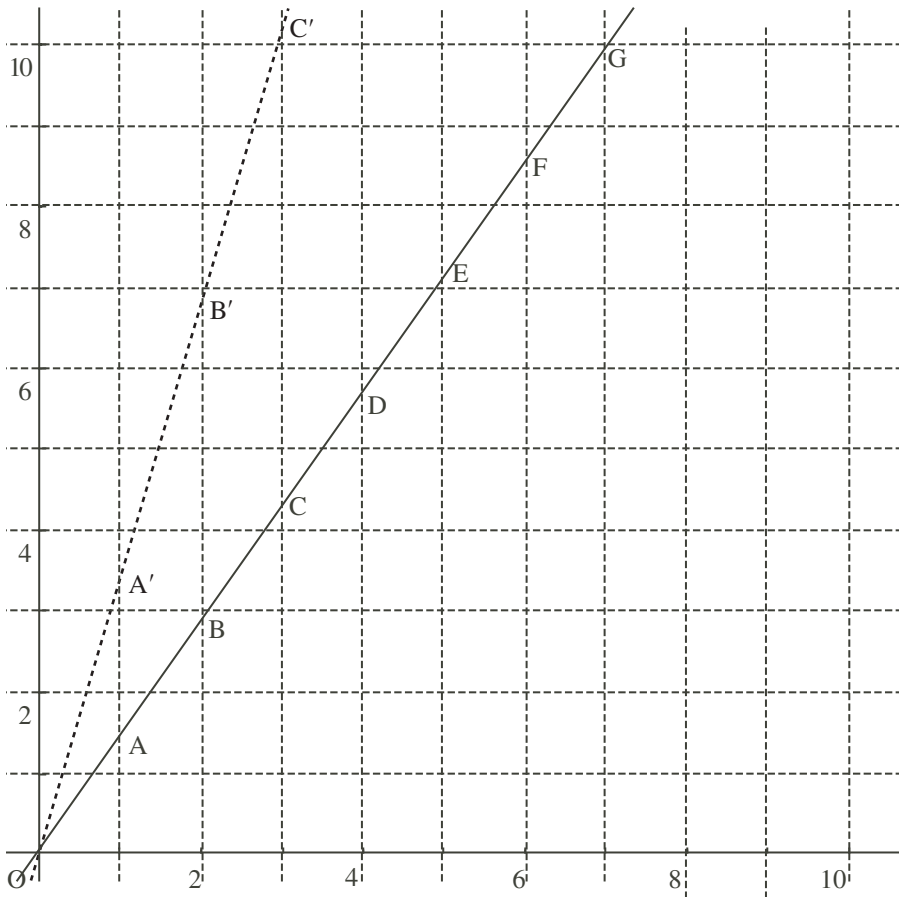
Une telle conjecture est-elle exacte ? Oui !

Regardons de plus près le premier couple  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}+2)$ . Le début du spectre de  $\sqrt{2}$  s'obtient sans peine avec une calculatrice et, compte tenu du fait que  $[\sqrt{2}+2] = [\sqrt{2}] + 2$ , on a immédiatement le spectre de  $\sqrt{2}+2$ .

La figure ci-dessous permet de visualiser notre conjecture. On a tracé les droites d'équation  $y = \sqrt{2}x$  et  $y = (\sqrt{2}+2)x$ .

Les nombres 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, ... sont les parties entières des ordonnées des points de la droite d'équation  $y = \sqrt{2}x$ , A, B, C, D, E, F, G, ... d'abscisses 1, 2, 3, 4, 5, 6,

7, ... et forment ainsi le début du spectre de  $\sqrt{2}$ . Les parties entières 3, 6, 10, ... des ordonnées des points A', B', C', ... forment de la même façon le début du spectre de  $\sqrt{2}+2$ .



*Démonstration de la conjecture.*

Considérons les deux suites  $(k\sqrt{2})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(k'(\sqrt{2} + 2))_{k' \in \mathbb{N}}$ .

Tous les termes de ces deux suites sont irrationnels et distincts. En effet, supposons qu'il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que

$$k\sqrt{2} = k'(\sqrt{2} + 2).$$

Alors, tous calculs faits, on aboutirait à

$$\sqrt{2} = \frac{2k'}{k - k'}$$

c'est-à-dire que  $\sqrt{2}$  serait rationnel ! Absurde !

Essayons maintenant d'évaluer, pour un entier  $N$  donné, le nombre  $S(N)$  d'éléments

de  $(k\sqrt{2})_{k \in \mathbb{N}} \cup (k'(\sqrt{2} + 2))_{k' \in \mathbb{N}}$  strictement inférieurs à  $N$ .

$$k\sqrt{2} < N \Leftrightarrow k < \frac{N}{\sqrt{2}} \text{ et } k'(\sqrt{2}+2) < N \Leftrightarrow k' < \frac{N}{\sqrt{2}+2}$$

Il y a donc  $\left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}} \right\rfloor$  éléments de  $(k\sqrt{2})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}+2} \right\rfloor$  éléments de  $(k'(\sqrt{2}+2))_{k' \in \mathbb{N}}$

inférieurs à  $N$ .

Or

$$\frac{N}{\sqrt{2}} - 1 < \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}} \right\rfloor < \frac{N}{\sqrt{2}}$$

et

$$\frac{N}{\sqrt{2}+2} - 1 < \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}+2} \right\rfloor < \frac{N}{\sqrt{2}+2}$$

Soit, en additionnant membre à membre,

$$N \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} \right) - 2 < \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}+2} \right\rfloor < N \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} \right),$$

soit encore, en remarquant que  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} = 1$ ,

$$N - 2 < \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{2}+2} \right\rfloor < N,$$

c'est-à-dire

$$N - 2 < S(N) < N.$$

Les inégalités étant strictes, il en résulte que  $S(N) = N - 1$ , d'où le résultat : les deux suites  $\text{Spec}(\sqrt{2})$  et  $\text{Spec}(\sqrt{2}+2)$  forment bien une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

Le théorème de Beatty généralise ce que nous avons observé pour les spectres de  $\sqrt{2}$  et de  $(\sqrt{2}+2)$ . (Cette question semble apparaître pour la première fois en 1926, dans la rubrique des problèmes de l'*American Mathematical Monthly*, page 159 sous la signature de Samuel Beatty, mathématicien canadien, avec deux types de solutions, une d'Ostrowski et Hyslop, l'autre d'Aitken, publiées en 1927, page 159 et 160).

*Théorème de Beatty.* Si  $a$  et  $b$  sont deux irrationnels tels que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , alors

$\text{Spec}(a)$  et  $\text{Spec}(b)$  réalisent une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

La démonstration reprend la méthode utilisée pour les spectres de  $\sqrt{2}$  et de  $(\sqrt{2}+2)$ .

Soit les deux suites  $(ka)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(k'b)_{k' \in \mathbb{N}}$ .  $a$  et  $b$  étant irrationnels, il en est de même

de tous les termes des deux suites. De plus tous les termes de ces deux suites sont distincts. En effet, s'il existait deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $ka = k'b$ , alors, sachant que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , il en résulterait  $b = 1 + \frac{k}{k'}$ , c'est-à-dire que  $b$  serait rationnel, contrairement à nos hypothèses.

Montrons à présent que, pour tout entier  $N$ , il existe exactement un élément et un seul de  $(ka)_{k \in \mathbb{N}} \cup (k'b)_{k' \in \mathbb{N}}$  dans l'intervalle  $[N, N+1[$ . Pour cela on peut évaluer le nombre  $S(N)$  d'éléments de  $(ka)_{k \in \mathbb{N}} \cup (k'b)_{k' \in \mathbb{N}}$  strictement inférieurs à  $N$  :

$$ka < N \Leftrightarrow k < \frac{N}{a} \quad \text{et} \quad k'b < N \Leftrightarrow k' < \frac{N}{b}$$

Il y a donc  $\left[ \frac{N}{a} \right]$  éléments de  $(ka)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement inférieurs à  $N$  et  $\left[ \frac{N}{b} \right]$  éléments de  $(k'b)_{k' \in \mathbb{N}}$  strictement inférieurs à  $N$ .

Par définition de la partie entière d'un nombre

$$\frac{N}{a} - 1 < \left[ \frac{N}{a} \right] < \frac{N}{a}$$

$$\frac{N}{b} - 1 < \left[ \frac{N}{b} \right] < \frac{N}{b}$$

(les inégalités de droite sont strictes parce qu'on sait que  $a$  et  $b$  sont irrationnels et donc ni  $\frac{N}{a}$ , ni  $\frac{N}{b}$  ne sont entiers.)

Soit, en additionnant membre à membre :

$$N \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - 2 < \left[ \frac{N}{a} \right] + \left[ \frac{N}{b} \right] < N \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

c'est-à-dire

$$N - 2 < \left[ \frac{N}{a} \right] + \left[ \frac{N}{b} \right] < N.$$

De cette double inégalité stricte il résulte  $S(N) = N - 1$  d'où la conclusion.

On peut se poser le problème de la réciproque :

*Si les spectres de deux nombres réels  $a$  et  $b$  réalisent une partition de  $\mathbb{N}^*$ , est-ce que  $a$  et  $b$  sont alors deux irrationnels tels que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  ?*

Pour cela introduisons une notion de « densité » d'une suite par rapport à  $\mathbb{N}$  comme le nombre moyen de termes de cette suite entre deux entiers consécutifs. Il

est clair que pour la suite  $(ka)_{k \in \mathbb{N}}$  cette densité est égale à  $\frac{1}{a}$  et pour la suite  $(k'b)_{k' \in \mathbb{N}}$  elle est égale à  $\frac{1}{b}$ . Pour que  $\text{Spec}(a)$  et  $\text{Spec}(b)$  réalisent une partition il faut (et c'est loin d'être suffisant !) que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

Si  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont de même nature (tous les deux soit rationnels, soit irrationnels).

Montrons qu'ils ne peuvent pas être tous deux rationnels. S'ils l'étaient, alors il existerait un entier  $d$  tel que  $a = \frac{d}{a'}$  et  $b = \frac{d}{b'}$ . Il est alors facile de voir que  $d - 1$  n'appartient à aucun des deux spectres et que, par contre,  $d$  appartient aux deux. Il n'y a donc pas partition dans ce cas, ce qui achève la démonstration de la réciproque.

*Merci à J.-P. Friedelmeyer et F. Goutlequer dont les judicieuses remarques m'ont permis à la fois d'améliorer et d'enrichir mon texte initial.*

## Bibliographie

[BEATTY] Samuel Beatty, titre inconnu, in *American Monthly* 34 (1927), page 159-160. *Sans doute l'article fondateur.*

[DEMAZURE] Michel Demazure, Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes. Éd. Cassini, 1997. *Un joyau pour qui veut une vision moderne de l'arithmétique élémentaire.*

[GARDNER] Martin Gardner, Jeux mathématiques. *Pour la Science* n° 1, 1977.

[GRAHAM, KNUTH, PATASHNIK] Ronald L. Graham, Donald, E. Knuth et Oren Patashnik, *Mathématiques Concrètes*. International Publishing France, 1998. *Une mine inépuisable à l'articulation du con(tinu) et du (dis)cret. On y parle du spectre d'un nombre.*

[LECONTE] Jean-Noël Leconte, Décimales des multiples d'un nombre. In *Quadrature* n° 60 (2006), pages 7-14, EDP Sciences. *Un article (ardu) sur un sujet « complémentaire ».*

[NIVEN] Ivan Niven, *Diophantine Approximations*. Interscience, 1963.

[PARPAY, CHERVRIER] Serge Parpey et Pierre Chevrier, Les suites de Beatty. *PLOT* n° 8, 1979. (repris dans le bulletin vert en 1980). *Un article ancien de PLOT qui traite à peu près des mêmes questions et découvre une fois ce texte rédigé...*

HYPERLINK <http://www.mathworld.wolfram.com>. *Une source inépuisable de renseignements mathématiques.*