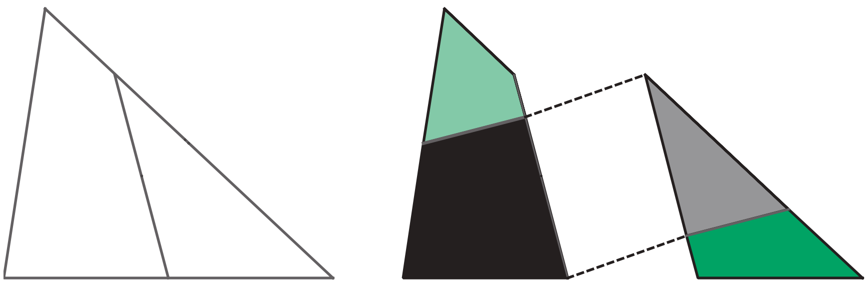
# Du triangle au carré, en trois coups de ciseaux

## Jean-Pierre Friedelmeyer(*)

**Premier défi :** En trois coups de ciseaux, découper un triangle quelconque en quatre morceaux qui, réarrangés, donnent un rectangle.

**Second défi :** Faire en sorte que ce rectangle soit un carré.

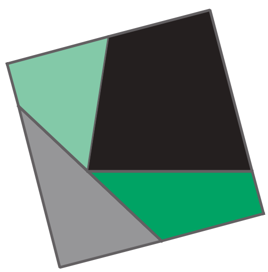
**Réponse au premier défi :**



Premier coup de ciseau : par le milieu d'un côté, selon la dimension d'un des côtés du rectangle.

Deuxième coup : par le milieu d'un autre côté et perpendiculairement au segment obtenu par le précédent coup de ciseaux

Troisième coup : perpendiculairement au même segment, en veillant à l'égalité des segments signalée par les pointillés.



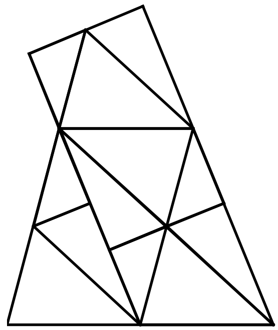
Et voilà…

## Justification

**Premier défi :** découper un triangle quelconque en quatre morceaux polygonaux qui réarrangés donnent un rectangle.

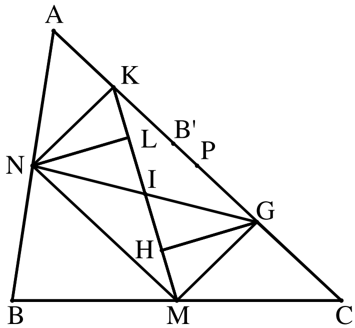
(*) Irem de Strasbourg.

Un cas particulier : l'explication est simple si l'on effectue le premier coup de ciseaux selon une médiane :

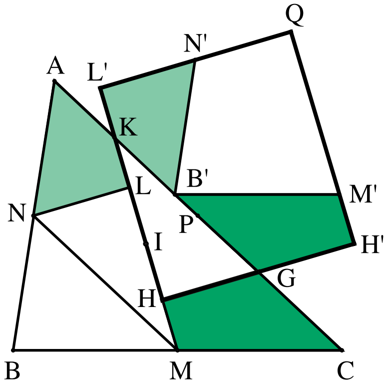


Dans le cas général

Soit ABC le triangle que l'on veut transformer en rectangle.
Plaçons les milieux M, N, P des côtés [BC], [AB], [AC] respectivement et choisissons un point K sur [AP] (on suppose pour l'instant que l'un au moins des côtés du rectangle est supérieur à MP = AB/2 et inférieur à la médiane AM. La parallèle à (NK) passant par M coupe alors [AC] en un point G.

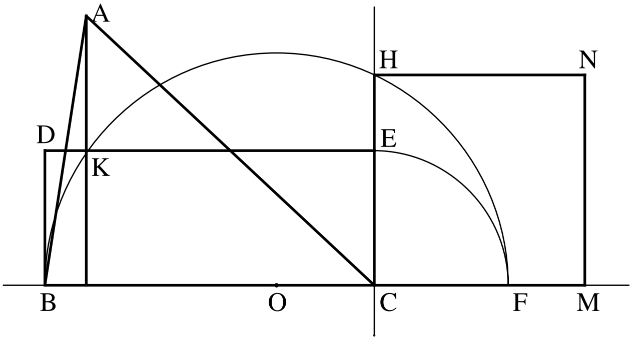



1. Démontrer que MGKN est un parallélogramme de centre I milieu de [MK].
2. On construit les perpendiculaires à (MK) issues de N et G, qui coupent [MK] en L et H, respectivement. Démontrer que NL = HG.
3. Démontrer que le symétrique de A par rapport à K et le symétrique de C par rapport à G sont confondus en un point B′.
4. Construire le polygone KL′N′B′ symétrique du polygone KLNA par rapport à K, et le polygone GH′M′B′ symétrique du polygone GHMC par rapport à G. Soit Q l'intersection de (L′N′) avec (M′H′). Démontrer que L′HH′Q est un rectangle dont le côté L′H est égal à MK.
5. Démontrer que le polygone N′B′M′Q est l'image du polygone NBML par une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$. En déduire que le rectangle L′HH′Q est constitué des mêmes polygones que le triangle ABC.




**Second défi :** Faire en sorte que le rectangle L′HH′Q soit un carré. Il suffit de connaître le côté de ce carré et de prendre MK égal à ce côté. On retrouve là un problème classique : construire un carré de même aire qu'un triangle donné. Ce problème a étudié par exemple dans le BV n° 377 (1991) sous le titre *La géométrie, Dessin ou Calcul* ou dans Repères IREM n° 31 (avril 1998), sous le titre *Les aires,*

*outil heuristique – outil démonstratif*. Je rappelle la méthode :
Le triangle ABC a même aire que le rectangle BCED. Soit F sur le prolongement de [BC] tel que CF = CE. Alors le cercle de diamètre [BF] coupe la perpendiculaire (CE) à (BC) en un point H. Et le carré de côté [CH] a même aire que le rectangle BCED ou le triangle ABC parce que $CH^2 = CB \cdot CF = CB \cdot CE$.

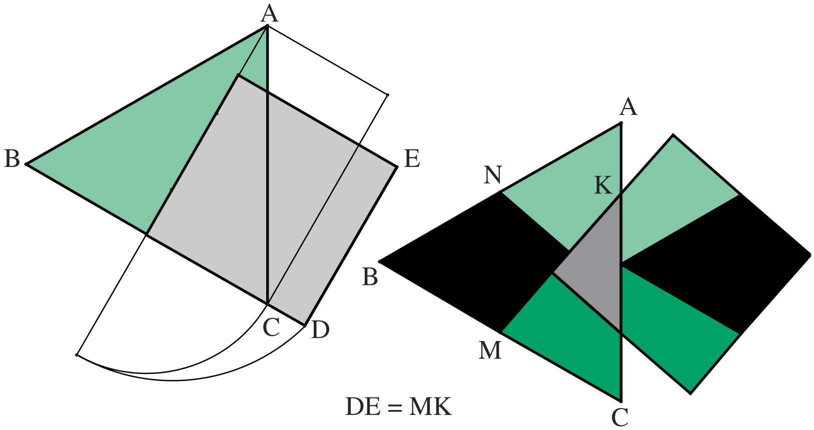



À ma connaissance le découpage ci-dessus pour un triangle quelconque est inédit. Par contre, il généralise le célèbre puzzle de Henry Ernest Dudeney (1857 – 1931), qui réalise le même découpage mais pour un triangle équilatéral seulement. C'est d'ailleurs en cherchant une justification du découpage de Dudeney que je me suis rendu compte qu'on pouvait le généraliser à un triangle quelconque.

## Le puzzle de Dudeney

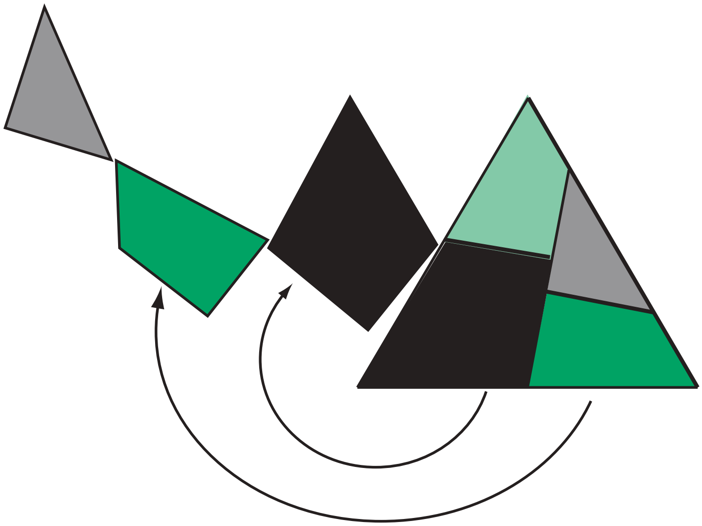
Il se traite en deux temps :

1) la quadrature du triangle équilatéral, selon la méthode rappelée ci-dessus,
2) le découpage en trois coups de ciseaux.

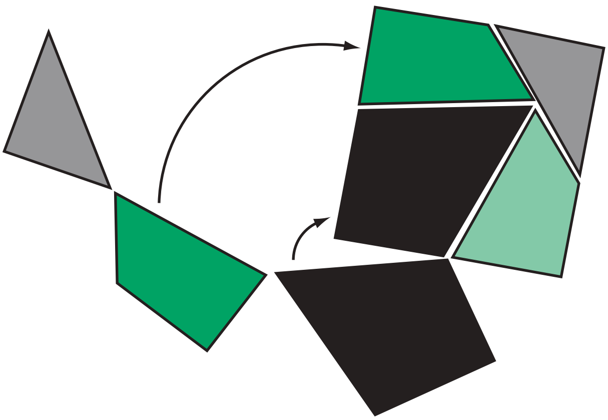



Remarque 1 : d'un point de vue pratique il suffit en réalité de prendre le point K au quart du côté [AC] à partir de A. Dans ce cas MK mesure $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ contre $\frac{a\sqrt[4]{3}}{2}$ pour le côté du carré, si $a$ mesure le côté du triangle équilatéral. Les deux valeurs ne diffèrent que de moins de 0,0035 $a$, pratiquement indécelable à l'œil nu.

Remarque 2 : on peut passer du triangle équilatéral au carré par un simple déroulement – enroulement des différents polygones constituant les deux figures, selon le schéma suivant :

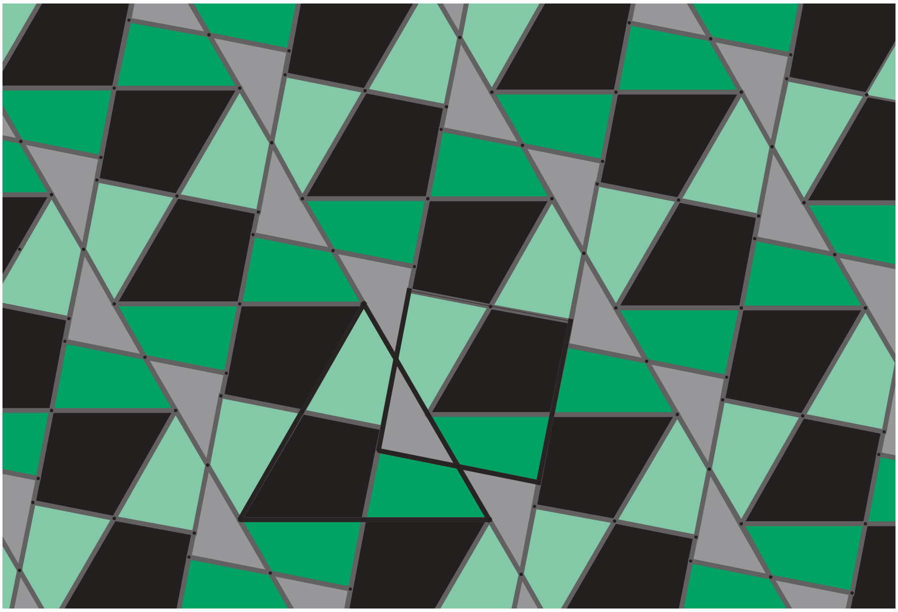


On déroule le triangle de la droite vers la gauche

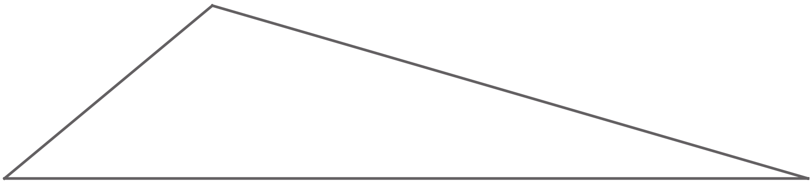


On enroule les morceaux de la gauche vers la droite.

Remarque 3 : Le triangle équilatéral comme le carré constituent un pavage du plan. Le découpage précédent permet de les combiner en un pavage où les triangles et les carrés sont étroitement imbriqués.



Remarque 4 : Revenons au problème général. Il n'est pas évident que le découpage puisse se réaliser pour n'importe quel triangle, par exemple si celui-ci présente un angle obtus très marqué, tel que dans le triangle suivant :



Les conditions nécessaires et suffisantes pour réaliser le puzzle dans le cas général ne paraissent pas du tout simples à dégager. Le lecteur pourra vérifier que si le triangle est acutangle (tous les angles aigus) et que nous désignons comme à l'accoutumée par $a > b > c$ ses trois côtés, une condition suffisante est alors

$$2c \cdot \sin \widehat{\mathrm{A}} > b.$$

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes reste un problème ouvert auquel le lecteur aura peut-être envie de s'attaquer pour le cas général.