La division, le plus tôt possible ? La division, le mieux possible !

Roland Charnay[1]

Le décret relatif au socle commun de connaissances et de compétences prend soin de préciser, dans la partie relative aux principaux éléments de mathématiques que « *Il est nécessaire de créer aussi tôt que possible à l'école primaire des automatismes en calcul, en particulier la maîtrise des quatre opérations qui permet le calcul mental* ».

Cette formulation ne manque pas d'interroger le lecteur sur au moins deux points.

Premièrement, pour quelle raison les rédacteurs ont-ils éprouvé le besoin d'insérer ce « *aussitôt que possible* », seule précision de ce type dans l'ensemble du texte, toutes disciplines confondues ? Cela signifie-t-il que, dans d'autres domaines, on pourrait ne pas entreprendre les apprentissages visés dès que c'est possible … ou même qu'on pourrait le faire le plus tard possible ? Peut-être ont-ils simplement voulu dire que, actuellement, on tarde trop à mettre en place certaines connaissances. Il faudrait alors apporter des précisions argumentées qui éclairent le propos. Ou alors, cette précision est-elle destinée à répondre à ceux qui estiment qu'il faut étudier les quatre opérations dès le Cours Préparatoire, c'est-à-dire avec des enfants de 6-7 ans, comme cela était fait en des temps idéalisés, pour ne pas dire « idyllisés ». Ce serait alors à rapprocher du rapport parlementaire sur l'enseignement des disciplines scientifiques dans le primaire et le secondaire[2] qui recommande de « *développer le calcul mental et l'apprentissage des techniques opératoires des quatre opérations dès le cours préparatoire* ».

Deuxièmement, la formulation finale relative à « *la maîtrise des quatre opérations qui permet le calcul mental* » paraît curieuse. On pourrait, en effet, tout aussi bien affirmer que c'est la maîtrise du calcul mental qui permet la maîtrise des quatre opérations ou encore que le calcul mental est un élément essentiel de la maîtrise des quatre opérations.

Ces extraits de textes sont à resituer dans le cadre des analyses, débats et controverses qui se développent depuis quelques années autour de l'enseignement du calcul[3]. Au moment où ce texte est écrit, le ministre s'apprête, semble-t-il, à

(1) Roland Charnay a été membre du groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire et du groupe sciences pour les programmes de collège. Cet article reprend et développe quelques points d'une intervention faite lors de la dernière Université d'automne du SNUIPP, en octobre 2006, sous le titre «*Exigences d'une culture mathématique dès l'école primaire. Que faut-il enseigner le plus tôt possible ? L'exemple du calcul* ».

(2) Rapport consultable à l'adresse :
http://www.assemblee-nationale.fr/12/rap-info/i3061.asp#P260_57515:

(3) Au moment même où j'écris ce texte, je tombe sur une question orale qu'un député adresse au Ministre (séance de l'Assemblée Nationale du 10 janvier 2007) dans laquelle il note que les enfants « ne savent plus faire des divisions, qui ne sont plus au programme ! », tout cela à

annoncer le retour à l'enseignement des quatre opérations dès l'école maternelle, faisant fi de tous les travaux conduits depuis 50 ans en psychologie cognitive et en didactique, et même depuis plus de 100 ans puisque les principaux inspirateurs du ministre s'appuient « sur la synthèse des pédagogies innovantes recensées en 1887 par Ferdinand Buisson »(4) !

La présente contribution a pour objet d'apporter un point de vue développé en partant d'une analyse des besoins en calcul de tout individu et en se fondant sur un cadre théorique permettant de clarifier ce qu'on peut appeler « maîtrise d'un concept », illustré par l'exemple de l'apprentissage de la division.

Que faut-il apprendre sur les quatre opérations ?

Quelles connaissances et quelles compétences dans le domaine du calcul numérique un élève doit-il maîtriser à l'issue de sa scolarité obligatoire et, auparavant, lorsqu'il sort de l'école primaire ? La question paraît saugrenue à certains tant la réponse semble aller de soi. La tradition aurait répondu depuis longtemps ! C'est ignorer que, depuis une vingtaine d'années au moins, l'univers du calcul a connu des bouleversements considérables qui peuvent conduire à reconsidérer les objectifs d'apprentissage. Jusqu'aux années soixante ou soixante-dix, un enfant voyait ses parents effectuer leurs comptes ordinaires avec un papier et un crayon et les commerçants avaient le crayon sur l'oreille, toujours disponible pour « faire la note ». Ils rendaient la monnaie en complétant la somme due jusqu'à la somme donnée : *Et trois qui font soixante-dix, dix qui font quatre-vingts et vingt qui font cent*. Aujourd'hui, le relevé bancaire est vérifié en utilisant une calculatrice et la machine du commerçant affiche à la fois la somme à payer et la somme à rendre au client. Le calcul instrumenté a très largement remplacé le calcul posé. Celui-ci était un enjeu essentiel des apprentissages numériques pour la vie de tous les jours. Il ne l'est plus. Que faut-il en conclure pour l'enseignement ? Poser la question n'est pas blasphématoire, comme certains le laissent supposer. Mais, d'un autre côté, la réponse n'est pas contenue dans la question.

---

cause « de l'utilisation abusive de la calculatrice ». Si le député en question avait pris soin de lire les programmes de l'école primaire comme du collège, il aurait pu vérifier que cet apprentissage est bien « au programme ». S'il avait consulté le rapport de l'Inspection générale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire (http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html) , il aurait relevé que « les performances globales des élèves entrant en sixième dans les années 2000 sont de même niveau que celles de leurs prédécesseurs de 1980 qui ne semblaient, en outre, pas inférieures à celles des années 1920 ». Il n'aurait pas manqué d'y relever que « les calculettes sont peu utilisées ». Le dit député n'est d'ailleurs pas démenti par le ministre qui, en réponse, se propose « de mettre en place, pour la rentrée 2007, un apprentissage, dès l'école primaire, des quatre opérations et du calcul mental », ce qui montre qu'il n'a pas lu les programmes qu'il a pourtant préfacés ! Il est bien connu que qui veut tuer son chien l'accuse d'avoir la rage, en évitant soigneusement de le montrer à un vétérinaire… Comment espérer un débat serein lorsque les plus hauts responsables d'un pays manient des arguments de cette nature ?

(4) Déclaration de Jean-Pierre Demailly, membre influent du GRIP, à l'AEF.

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission Kahane[5]) indique d'ailleurs au début du rapport consacré au calcul que l'une des raisons de l'opportunité de ce rapport « *est que, dans la période récente, le développement des technologies informatiques a profondément modifié les pratiques associées au calcul, tant les pratiques quotidiennes et sociales que les pratiques scientifiques. La plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans l'enseignement obligatoire, sont aujourd'hui implantés dans les calculatrices les plus simples. En revanche, le calcul pose des questions nouvelles liées notamment à la représentation informatique des objets mathématiques sur lesquels il porte (par exemple la représentation informatique des nombres), à la performance des algorithmes utilisés au delà de leur seule effectivité…, des questions qui n'étaient pas des enjeux de l'enseignement jusqu'ici. La puissance de calcul des nouveaux outils modifie aussi profondément l'économie du calcul et pose, dans des termes renouvelés, celle de la gestion des rapports entre calcul et raisonnement, en favorisant explorations, simulations, expérimentations* ».

Dans l'immédiat, concernant les techniques opératoires posées, nous ferons nôtre la proposition énoncée dans le rapport de la CREM : « *Il est évident qu'aujourd'hui, le calcul numérique exact que nous faisons à la main, sans assistance, est très limité. Il semble difficile d'exiger de l'école qu'elle consacre un part importante du temps réduit dont elle dispose pour développer des compétences que plus personne n'utilise. Dans le même temps, nous souhaitons, à juste titre, que les élèves ne soient pas dépendants de leur calculatrice pour le moindre calcul. Ceci nécessite, au delà de la mémorisation d'un répertoire et de compétences de calcul mental, la mise en place de techniques de calcul écrit, et une fiabilité de ce calcul dans les cas simples* ». Dans la suite, sur l'exemple de la division, seront précisés d'autres intérêts du travail sur ces techniques et sera proposée une analyse des conditions de leur enseignement.

Revenons à la question des connaissances indispensables en calcul. La réponse doit bien entendu être examinée sous l'angle de ce qui sera utile, voire indispensable, à chacun dans sa vie quotidienne, plus largement pour pouvoir agir en citoyen informé et responsable[6]. Il faut également penser à ce qui pourra être nécessaire au plus grand nombre pour pouvoir profiter de nouvelles formations. Au-delà, il convient de réfléchir à ce que peuvent être les apports de l'apprentissage du calcul à la formation personnelle de chacun, au développement de la rigueur et du raisonnement, mais également des capacités d'initiative, de créativité[7].

(5) Ce rapport très intéressant est disponible à l'adresse :
http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/

(6) Sur l'aspect formation du citoyen, on peut viser, par exemple, à ce que nul ne se laisse abuser par ce « raisonnement » soutenu dans un journal du matin où il était dit en substance : 50 % des étudiants qui préparent un concours en IUFM échouent à l'issue de la première année. En deuxième année, 30 % des admis au concours ne sont pas validés en fin de formation. Ce sont donc 80 % des étudiants formés en IUFM qui ne deviennent pas enseignants !

(7) J'ai eu l'occasion de développer ces questions devant l'assemblée des directeurs d'IREM,

Pour dire les choses rapidement, savoir calculer c'est tout à la fois[8] :

- être capable de **rendre calculables des situations** (issues de la vie courante ou d'autres disciplines…), par un travail de modélisation qui nécessite de retenir certaines caractéristiques de ces situations et d'en ignorer d'autres ;
- être capable **de traiter des calculs, de façon automatisée ou raisonnée**, pour aboutir à un résultat exact ou approché, l'apprentissage et la compréhension des algorithmes comme l'élaboration de stratégies raisonnées nécessitant une bonne connaissance des nombres, des opérations et de certaines de leurs propriétés ;
- être capable **d'organiser, de « programmer » un calcul** pour le rendre exécutable, par soi-même ou par une machine (calculatrice, tableur, …), ce qui suppose une certaine connaissance des potentialités et des limites des outils utilisés.

Sans entrer dans un détail qui nécessiterait de longs développements[9], insistons sur quelques points.

La priorité à accorder au calcul mental doit être constamment réaffirmée. Elle est soutenue par plusieurs arguments qui en justifient une pratique régulière :

– le calcul mental demeure un mode de calcul largement utilisé dans la vie quotidienne ou professionnelle : c'est un moyen rapide d'évaluation et de prise de décision ;

– c'est un outil privilégié pour contrôler un résultat obtenu par d'autres moyens ;

– sans bonne maîtrise des tables, le calcul posé est rendu impossible ;

– il joue un rôle primordial dans l'aide à la conceptualisation ; on peut citer l'exemple des raisonnements relatifs au traitement de situations de proportionnalité qu'on apprend d'abord à mettre en œuvre avec des « petits » nombres pour lesquels un calcul mental est suffisant… mais aussi nécessaire : comment trouver le prix de 27 objets identiques sachant qu'un paquet de 3 de ces objets coûte 20 € si on ne perçoit pas très rapidement que « 27, c'est 9 fois plus que 3 » ?

– il constitue une aide à la résolution de problèmes, lorsqu'on cherche à déterminer ce que pourrait être la solution avec des nombres plus simples ;

– il est une occasion privilégiée de développer initiative et raisonnement lorsqu'on est confronté à une question de « calcul réfléchi » : multiplier 25 par 8 nécessite le choix d'une stratégie et un raisonnement pour la mettre en

---

intervention reprise dans un point de vue publié par la revue « Repères-IREM », n° 64 (juillet 2006).

(8) Un développement identique peut être trouvé dans le document d'accompagnement « Calcul » pour le collège.

(9) Pour une argumentation plus détaillée, assortie d'exemples, on peut se reporter aux documents d'accompagnement des programmes de l'école primaire (http://www.cndp.fr) ou du collège (http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm

œuvre, en faisant appel à des connaissances diverses selon qu'on cherche à calculer 25 x 2 x 2 x 2 ou « 8 fois 20 plus 8 fois 5 » ou « 25 x 4 x 2 »…

Le travail sur le calcul posé des opérations qui, selon le rapport de l'Inspection Générale, « *apparaît le plus pratiqué* » doit être justifié par autre chose que par l'utilité pratique de ce type de calcul qui, s'il n'est pas totalement abandonné, voit son usage très restreint. Que peut donc apporter son apprentissage ?

- Une occasion de calculer mentalement, prétendent certains ; ce n'est pas totalement inexact, mais ce serait utiliser une machine bien lourde alors que des occasions moins risquées peuvent être aisément trouvées.
- Une opportunité de confronter les élèves à l'exécution d'algorithmes, activité utile en mathématiques (pas seulement d'ailleurs) et nécessitant une bonne concentration de la pensée. L'argument mérite d'être entendu. Il ne trouvera pleinement sa force que si les élèves peuvent effectivement centrer leur attention sur l'algorithme et ne sont pas trop embarrassés par le manque de disponibilité des résultats élémentaires, ce qui plaide pour une mise en place de ces algorithmes qui ne soit pas trop précoce.
- Une occasion de travailler les propriétés des nombres et des opérations en axant une partie importante de l'apprentissage sur un effort de compréhension et de justification des étapes de ces algorithmes. C'est sans doute l'argument le plus décisif. Travailler sur la technique opératoire de la multiplication, c'est ainsi s'attacher à faire comprendre que multiplier 457 par 306 revient à multiplier 457 par 6 et par 300 puis à additionner les deux résultats et que multiplier 457 par 300 revient à multiplier 457 par 3 puis le résultat par 100… Sont alors à l'œuvre des connaissances (éventuellement en actes) relatives à la numération décimale (décomposition de 306) et à des propriétés de la multiplication (distributivité sur l'addition, associativité, …). Cela suppose de ne pas se limiter à un apprentissage techniciste (le comment), mais de chercher à justifier les différentes étapes du calcul et leur articulation (le pourquoi), c'est-à-dire à faire des mathématiques !

La possibilité d'utiliser les calculatrices dès l'école primaire fait débat. Certains jugent cet usage prématuré, arguant du fait qu'il serait un obstacle à l'apprentissage du calcul, notamment du calcul mental. D'autres, comme les inspecteurs généraux dans leur rapport déjà mentionné, estiment que, comme pour le calcul mental, une attention suffisante doit être portée au calcul instrumenté qui « *n'est l'objet d'un apprentissage organisé que pour une très faible minorité de maîtres* ». Ces machines à calculer faisant partie de l'environnement habituel des élèves, le rôle de l'école paraît évident : apprendre à s'en servir de manière raisonnable et raisonnée…

Penser un apprentissage sur la durée : l'exemple de la division(10)

Voila bien un apprentissage qui fait couler beaucoup d'encre. Depuis ceux qui s'alarment de ce qu'elle ne serait plus enseignée (marquant ainsi leur réelle

(10) Nous parlons ici, de manière un peu abusive, de la division alors qu'il faudrait distinguer entre division euclidienne dans le domaine des entiers (quotient et reste), division décimale et division dans l'ensemble des rationnels. Nous limitons ici le propos au cas de la division

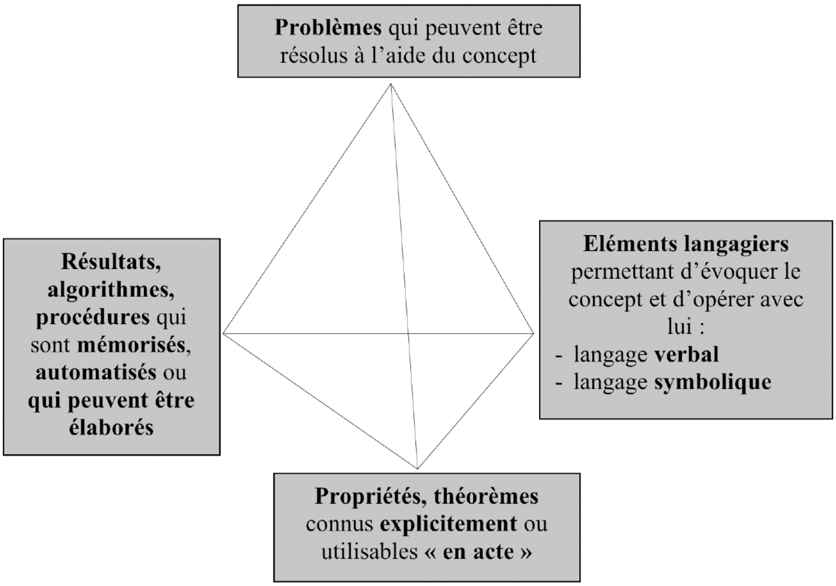
méconnaissance des textes et de la réalité ou révélant leurs arrières pensées), en passant par ceux qui regrettent qu'on ne pose de division dès le CP jusqu'à ceux qui estiment qu'on devrait, à l'heure des calculatrices et des ordinateurs, arrêter l'usage de la potence, symbole de la division posée.

Comment y voir plus clair sur une question dont la complexité n'est pas mince ? Est-il possible d'envisager tôt certains aspects de la division ? Lesquels gagneraient à être éventuellement retardés ?

Un cadre pour examiner la question de l'apprentissage de la division

La maîtrise d'un concept n'est jamais totalement aboutie. Elle résulte d'un long processus et peut être étudiée en se référant à différents aspects du concept.

Le schéma suivant qui propose l'analyse d'un concept (ici la division) en quatre pôles est largement inspiré de la caractérisation d'un concept proposée par Gérard Vergnaud.



Comme le montre cette schématisation, ces quatre pôles sont évidemment en forte interaction. Ce qu'il ne montre pas, mais qui devra être pris en considération, ce sont les relations (plus ou moins étroites) que le concept entretient avec d'autres concepts, par exemple la multiplication si on considère le concept de division. C'est ce qui a conduit Gérard Vergnaud a évoquer l'idée de champ conceptuel.

Bien qu'il soit difficile d'isoler un aspect d'un concept (matérialisé par un pôle ici), tentons pour chacun d'eux, à propos de la division d'examiner ce qui peut faire difficulté et quelles étapes d'apprentissage peuvent être envisagées.

euclidienne dans les entiers naturels et à celui de la division décimale (parfois aussi appelée, abusivement, « division exacte »).

La difficulté des problèmes « de division »

La reconnaissance des problèmes qui peuvent être résolus à l'aide d'une division (ce qu'on a coutume d'appeler « sens de la division ») est source de difficultés pour les élèves, davantage que pour les trois autres opérations. Nous ne livrons ici que quelques éléments d'analyse de ces difficultés.

À l'entrée en sixième en 2003, le problème suivant n'est résolu correctement que par environ 55 % :

> *Xavier range les 50 photos de ses dernières vacances dans un classeur. Chaque page contient 6 photos.*
>
> *a) Combien y a-t-il de pages complètes ?*
>
> *b) Combien y a-t-il de photos sur la page incomplète ?*

Pour être situé dans le champ de la division, la première question posée doit être ramenée à la suivante : « *Combien de fois le nombre 6 est-il contenu dans le nombre 50 ?* ». Dans ce problème du type « répartition équitable », il s'agit de chercher ce qui est traditionnellement appelé « le nombre de parts ».

Si on avait évoqué une situation dans laquelle il faut, parmi 50 photos, en placer le plus possible sur 6 pages, avec le même nombre de photos par page, la question « *Combien doit-on placer de photos par page ?* » revient à chercher ce qui est traditionnellement appelé « la valeur de chaque part ».

La distinction entre problèmes dans lesquels il faut chercher le nombre de parts identiques et problèmes dans lesquels il faut chercher la valeur de chaque part identique n'est pas nouvelle. Une difficulté pour les élèves est de comprendre qu'une même opération, la division, permet de répondre à ces deux catégories de questions. Cette compréhension doit faire l'objet d'un travail approfondi au cycle 3 de l'école primaire, l'une des clés résidant dans le fait que les deux catégories de questions peuvent être résolues en cherchant le nombre qui, multiplié par 6, permet de s'approcher le plus possible de 50, ce qui souligne les liens étroits entre division et multiplication.

Une autre difficulté des problèmes réside dans le fait que, dans certains cas, il faut décider de « la bonne division » à utiliser. Dans les exemples précédents, il s'agit de la division euclidienne : il faut chercher le quotient et le reste entiers. Si la question avait porté sur la longueur de chaque ruban obtenu en partageant une bande de 50 cm en 6 rubans de même longueur, il aurait fallu donner une réponse sous forme fractionnaire ou une réponse approchée sous forme décimale et la notion de reste n'intervient alors pas.

Quand peut-on proposer des problèmes « de division » aux élèves ?

Prenant en compte les difficultés qui viennent d'être évoquées, on pourrait conclure que de tels problèmes ne peuvent être proposés qu'assez tard, à la fin de la scolarité primaire. Il n'en est rien. Dès que les élèves sont capables de dénombrer, ils deviennent capables de traiter de tels problèmes.

Considérons une situation du type : un certain nombres d'images étant réparties dans des enveloppes à raison de tant d'images par enveloppe, trouver le nombre d'enveloppes nécessaires pour y placer le plus possible d'images (situation de type « recherche du nombre de parts »).

Dès la fin de l'école maternelle, des questions peuvent être posées aux élèves à ce sujet. La résolution prend appui sur un matériel, mais des conditions peuvent être créées pour que les élèves aient un effort de réflexion, de recherche à fournir. Donnons deux exemples.

Exemple 1 : Les élèves disposent de 15 images. Ils savent que chaque enveloppe devra contenir 3 images. Ils doivent commander les enveloppes nécessaires.

Ils peuvent répondre en groupant leurs images par paquets de trois, puis en comptant les paquets obtenus, un paquet étant assimilé à une enveloppe.

Exemple 2 : Les élèves disposent de plusieurs enveloppes et d'un crayon. Ils savent qu'il y a 12 images dans une boîte (inaccessible pour eux) et qu'on placera 3 images par enveloppe. Ils doivent préparer les enveloppes.

La résolution est plus délicate que dans le premier exemple. Ils peuvent, par exemple, dessiner des images sur les enveloppes en veillant à s'arrêter dès que 12 images auront été dessinées.

Les mêmes types de questions peuvent être posées au cours des années suivantes, mais avec d'autres conditions : nombres plus grands, pas de matériel mis à disposition, …

À la fin du CP ou au CE1, les problèmes peuvent être résolus en ayant recours à l'addition itérée. Un peu plus tard, la soustraction peut également être utilisée, puis le recours à des essais multiplicatifs devient possible.

Ce n'est qu'au cycle 3 que la division sera instituée comme moyen efficace de résoudre rapidement cette catégorie de problèmes. Mais, à ce moment là, les situations de référence seront devenues familières aux élèves (s'il y a 255 images et 3 images par pages, l'interprétation sous la forme « combien de fois 3 dans 255 ? » sera plus aisée) et la division pourra être reliée à un réseau de procédures (addition ou soustraction itérée, encadrement par des multiples successifs, …) qu'elle remplace avantageusement. Bref, de quoi aider à donner du sens.

Autrement dit, du point de vue de la résolution de problèmes, à la question « peut-on enseigner tôt la division ? », la réponse est oui s'il s'agit de proposer dès l'école maternelle des situations dites « de division » et la réponse est non s'il s'agit d'attendre que, dès le départ, la division soit utilisée pour les résoudre. D'ailleurs, la question pertinente ne serait-elle pas : « Comment enseigner efficacement la division pour que les élèves en construisent plus sûrement le sens ? ».

Des résultats et des techniques qui vont s'élaborer dans la durée

La technique posée de la division qui était traditionnellement enseignée en France, sans écriture de produits partiels ni pose de soustractions intermédiaires est d'une grande complexité. Il suffit de se demander ce que serait le programme à élaborer pour un automate chargé d'une telle tâche pour s'en rendre compte. Une brochure de l'APMEP consacrée à l'enseignement de la division[11] propose ainsi un ordinogramme de calcul qui tient sur deux pages entières et ne comporte pas moins de 11 variables. Et encore, ne se soucie-t-on pas de savoir si l'automate maîtrise bien tous les résultats élémentaires nécessaires. Son auteur l'accompagne d'un commentaire qui tient en un seul mot : « *Effrayant* ! ». On ne saurait mieux souligner qu'un élève qui apprend mécaniquement cette technique, sans compréhension, court tous les risques de se tromper ou d'être contraint d'abandonner. Avis aux amateurs de cette technique et de son enseignement dès le CP…

Pourtant, l'apprentissage d'une technique raisonnable (c'est-à-dire en s'autorisant l'écriture de quelques produits partiels et des soustractions intermédiaires) peut être fructueux pour la connaissance de la division, dans la mesure où cette technique met notamment en jeu les relations entre division, multiplication et soustraction. Cela ne peut être exploité que si l'apprentissage de la technique est accompagné d'un travail sur la compréhension des étapes du calcul et de leur organisation. Ce travail n'est lui-même possible que si les résultats élémentaires sont parfaitement disponibles, ce qui suppose une maîtrise « flexible » des tables de multiplication : il ne suffit pas de savoir que « 8 fois 6 égale 48 », il faut pouvoir en déduire immédiatement que dans « dans 50, il y a 8 fois 6 ». Autant dire que cet apprentissage ne peut guère être envisagé avant la fin du CE2 ou au CM1 et qu'un travail à son sujet est encore possible (et nécessaire) au collège.

Mais bien d'autres résultats sont à apprendre plus précocement. Dès le CP, des doubles et des moitiés de nombres simples peuvent être mémorisés. Dès le CE1, la réponse à des questions du type « Combien de fois 2 dans 14 ? » ou « combien de fois 5 dans 35 ? » doit devenir rapide, en même temps que sont mémorisés les résultats des tables de multiplication par 2 et par 5. À partir du CE2, cette compétence doit être étendue aux autres tables de multiplication et des stratégies de calcul réfléchi peuvent être mises en place. Par exemple, pour trouver le quotient de la division de 90 par 6, les élèves doivent pouvoir choisir entre la procédure consistant à diviser successivement par 3 puis par 2 ou celle qui s'appuie sur la décomposition de 90 en 60 + 30 ou encore celle qui consiste à se demander quel nombre doit être multiplié par 6 pour obtenir 90…

Là encore, on peut commencer tôt les apprentissages relatifs à la division sans débuter prématurément celui qui est le plus délicat et nécessite de nombreuses autres connaissances, c'est-à-dire celui de la division posée !

Un appui nécessaire sur les propriétés de la division

Le choix et la gestion de procédures de calcul réfléchi tout comme la compréhension et le contrôle des étapes du calcul d'une division posée ne sont possibles que si l'élève est capable de mobiliser, en acte ou explicitement, certaines propriétés de la division. On en a vu quelques exemples dans le calcul du quotient de 90 par 6. On est alors dans le cas d'une division dite « exacte », les propriétés peuvent être plus complexes dans le cas d'une division euclidienne à reste non nul :

(11) Elem math III, La division à l'école élémentaire (brochure de l'APMEP n° 19).

– la première procédure proposée suppose d'avoir compris que diviser par un produit revient à diviser successivement par chacun des facteurs du produit ;

– la seconde nécessite de maîtriser le fait que le quotient d'une somme par un nombre est égal à la somme des quotients de chacun des termes de la somme par ce nombre ;

– la troisième suppose de connaître la relation entre division et multiplication.

On pourrait également citer la connaissance de l'égalité caractéristique de la division euclidienne ($a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$) qui permet notamment de vérifier un résultat, mais peut également être utilisée pour trouver un quotient et un reste. C'est la même propriété qui permet aux élèves d'utiliser une calculatrice ordinaire pour obtenir un quotient et un reste entier… Ce qui montre également que, si la calculatrice est un outil de calcul efficace, elle peut aussi devenir un support de questions intéressantes.

Alors que cette dernière propriété est explicitée et formalisée dès que la division euclidienne est installée au cycle 3, les autres peuvent demeurer utilisées « en acte », en faisant l'objet d'explicitations orales, puis codées, par exemple, pour la première, sous la forme :

$$\begin{tikzcd} \boxed{90} \arrow[r, ":3"] \arrow[rr, bend right, ":6"'] & \boxed{30} \arrow[r, ":2"] & \boxed{15} \end{tikzcd}$$

La question posée aux enseignants est de savoir à quel moment une propriété peut être utilisée, à quel moment elle peut être explicitée verbalement, à quel moment elle peut faire l'objet d'un codage sur des exemples (et quels codages sont possibles et utiles à la compréhension) et à quel moment elle gagne à être généralisée en utilisant le langage littéral. La réponse dépend à la fois, pour chaque propriété, de la compréhension possible que peuvent en avoir les élèves, de l'usage qu'ils peuvent en faire et des outils langagiers dont ils disposent.

Différents langages pour « parler » la division

Pour évoquer la division et les traitements à son propos, différents éléments langagiers peuvent être utilisés.

Le langage verbal permet de décrire efficacement certaines procédures utilisées, par exemple : « *Pour diviser 90 par 6, j'ai d'abord divisé 90 par 3 puis j'ai divisé le résultat obtenu par 2* ». Le mot « diviser » est alors le seul terme spécifique utilisé. Dans le même registre, on pourrait expliquer que « *Pour trouver le quotient de 90 par 6, on cherche d'abord le quotient de 90 par 3, puis le quotient par 2 du premier quotient obtenu* ». Un autre terme est utilisé et on perçoit aisément que cette seconde formulation sera plus difficile à manipuler que la première, notamment parce que l'énoncé porte sur les résultats (*quotient*) plutôt que sur l'opération (*diviser*). Il y a donc les termes à connaître (division, quotient, reste, dividende, diviseur) et il y a aussi les formulations possibles à l'aide de ces termes qui sont d'une plus ou moins grande complexité. Là encore, l'enseignant devra être attentif dans la progression utilisée de façon à ne pas noyer les élèves dans cette complexité en exigeant trop tôt des formulations dont la compréhension ne serait pas assurée.

Du côté du **langage symbolique**, la question est encore plus complexe. Dans le schéma précédent, le signe « : » est utilisé, sans difficulté. C'est qu'on s'est placé dans un cas simple, celui où le reste est nul, donc celui où le quotient euclidien est égal au quotient décimal. Pour la division euclidienne, la difficulté vient du fait qu'on a affaire à une opération à deux résultats (le quotient et le reste) ou à deux opérations (l'opération « quotient » qui, à deux naturels, associe le quotient euclidien du premier par le second et l'opération « reste » qui leur associe le reste). Les élèves (et les maîtres) sont confrontés pour la première fois à cette situation qui, jusqu'à présent, du point de vue des notations symboliques, n'a pas trouvé de bonne solution. Une écriture du type *47 : 5 = 9 reste 2* est évidemment inacceptable, ne respectant pas les propriétés du signe =. On pourrait penser à une notation pour le quotient (du type : 47 q 5 = 9) et une autre pour le reste (du type 47 r 5 = 2). Elles sont également d'usage délicat, ne mettent pas en évidence la relation entre quotient et reste et n'étant pas, ensuite, utilisées de façon durable.

Cette question, ancienne, doit sans doute continuer à être explorée pour parvenir à une solution consensuelle. Dans l'immédiat, il semble raisonnable d'utiliser assez tôt le langage verbal, de privilégier l'égalité fondamentale de la division euclidienne pour rendre compte du quotient et du reste et de réserver la notation « : » au cas où la division « tombe juste » ou à celui où on cherche une valeur décimale approchée du quotient (7 : 3 ≈ 2,33, par exemple).

Conclusion

Cette étude rapide, trop rapide, de la question de l'apprentissage de la division ne se résoudra pas facilement, comme certains le prétendent, en avançant le moment où les élèves apprennent le symbolisme de cette opération et sont confrontés à la division posée à l'aide d'une potence. Elle vise, au contraire, à souligner la complexité de cet apprentissage et à esquisser des étapes possibles pour son étude en prenant en compte les différents aspects du concept.

Alors, quelle réponse à la question : faut-il enseigner tôt la division ?

Oui, s'il s'agit de permettre aux élèves de résoudre, à l'aide de leurs connaissances disponibles, des problèmes dits « de division ».

Non, s'il s'agit de les mettre en difficulté en les confrontant trop précocement à ce que la division comporte de plus délicat et de plus complexe.