

## À table !

### – Au lycée ! ... Au collège ! –(\*)

### Henri Bareil(\*\*)

La revue MATHS-JEUNES de la S.B.P.M.ef a proposé dans son numéro 115 de janvier 2002 le problème suivant appuyé sur la figure 1 ci-jointe :

*Déterminer les sets identiques pour qu'ainsi disposés sur une table circulaire ils la recouvrent au maximum.*

En son numéro 117 d'avril 2007, MATHS-JEUNES propose une solution algébrique :

avec  $AB = \frac{\ell}{2}$  et  $AC = h$ , on détermine  $h$  puis

l'aire des sets, en fonction de  $\ell$ .

En dérivant, on en déduit, à partir d'une équation bicarrée,  $\ell$  puis  $h$ .

Cette solution se termine sans explication aucune par :

« On peut remarquer que  $\widehat{COD} = 22^{\circ}30'$  »

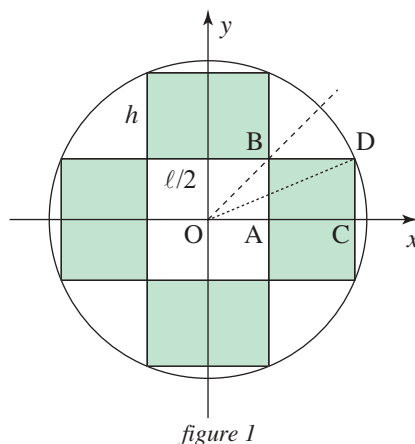


figure 1

CELA M'A DONNÉ ENVIE :

- de m'intéresser à ce problème de sets de table en le généralisant au cas de  $n$  sets (identiques),
- d'y dégager un « motif-clé »,
- de m'y adresser d'emblée au point D,
- de développer à la fois des outils lycée et des outils collège.

## I. UN PROBLÈME GÉNÉRAL

« Maths-jeunes » étudie le cas de 4 sets, mais on peut avoir le même type de configuration pour  $n$  naturel,  $n > 2$ , et même étendre au cas  $n = 2$ .

- SOPHIE suit, sur un logiciel, la variation du set pour  $n = 5$  lorsque D parcourt  $\widehat{VT} \dots$

Configuration pour  $n = 2$  :

(\*) Cet article, terminé le jour de son anniversaire, est dédié à ma filleule Agnès trop tôt arrachée à notre affection peu après son succès au Capes de maths.

(\*\*) Institut du Lauragais

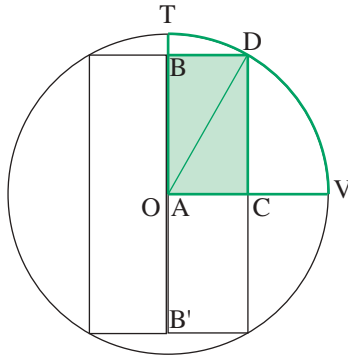


figure 2

• DAMIEN propose :

– DEUX EXEMPLES POUR  $n = 3$  :

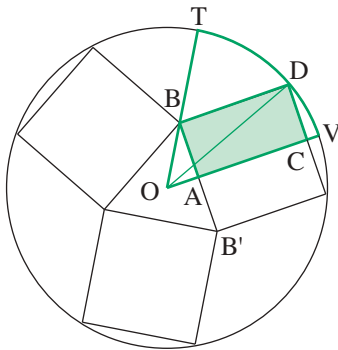


figure 3

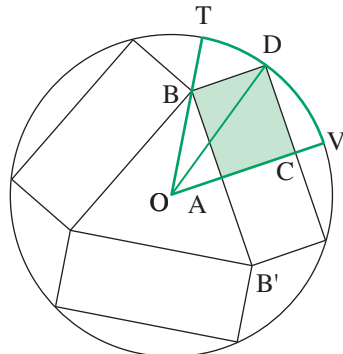


figure 3'

– DEUX EXEMPLES POUR  $n = 6$  :

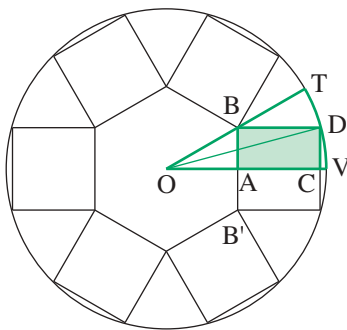


figure 4

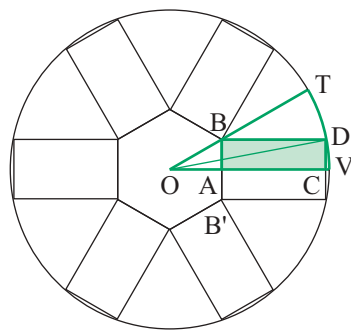


figure 4'

S'il y a  $n$  sets ( $n \geq 2$ ),  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{n}$  (Posons  $\widehat{AOB} = \alpha$ ).

• Dans chacune des figures 2. 3. 4, j'ai fait ressortir en vert un motif-clé. Il concerne un demi-set.

Voici la configuration de ce motif-clé quelle que soit la valeur de  $n$  avec  $\widehat{VOT} = \frac{\pi}{n}$

et, comme  $n \geq 2$ ,  $\widehat{VOT}$  est aigu ou droit :

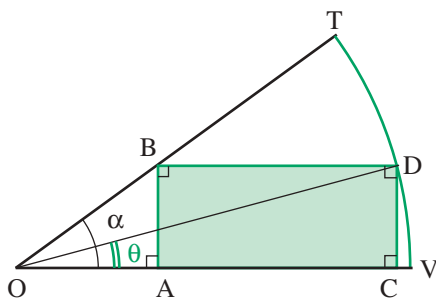


figure 5

**Voici donc le problème de Maths-Jeunes généralisé :**

Avec une table circulaire,  $n$  donné (et  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ),  $D$  pouvant varier sur l'arc  $\widehat{VT}$ , comment le choisir pour que l'aire  $S$  du demi-set  $ABDC$  soit maximale ?

### 1.1. MÉTHODE « LYCÉE » :

$$S = DC \times DB.$$

Or, avec  $\widehat{AOD} = \theta$  et une table de rayon  $R$ ,  $DC = R \sin \theta$  tandis que, dans le triangle

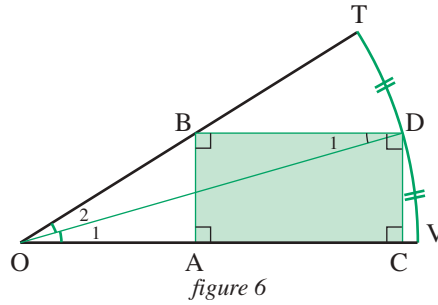
$$OBD, \frac{BD}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{OD}{\sin \widehat{OBD}} = \frac{R}{\sin \alpha}, \text{ d'où } BD = \frac{R}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \theta).$$

$$\text{Donc } S = \frac{R^2}{\sin \alpha} \sin \theta \cdot \sin(\alpha - \theta).$$

$\frac{R^2}{\sin \alpha}$  étant constant, le maximum de  $S$  est celui du produit des deux sinus.

$$\begin{aligned} \text{Or } 2 \sin \theta \cdot \sin(\alpha - \theta) &= \cos(\theta - \alpha + \theta) + \cos(\theta + \alpha - \theta) \\ &= \cos(2\theta - \alpha) + \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Le maximum est donc atteint pour  $2\theta = \alpha$ , c'est-à-dire pour  $(OD)$  bissectrice de  $\widehat{VOT}$ , soit  $D$  le milieu de l'arc  $\widehat{VT}$  :



**Étude de cette configuration :**

- Le parallélisme de (OA) et (BD) entraîne l'égalité  $\widehat{O}_1 = \widehat{D}_1$ . Or  $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ .  
Le triangle BOD est donc isocèle de base OD :

$$\boxed{OB = BD}$$

- Aire de ABDC :

Avec le triangle ODC,  $\boxed{DC = R \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

Avec le triangle isocèle BOD,  $\boxed{BD = \frac{R}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}$ .

$n$  donné, le set le plus grand possible a donc une aire  $S' = 2 DC \times BD = R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$ . Soit

$$\boxed{S' = R^2 \tan \frac{\pi}{2n}}$$

**1.2. MÉTHODES « COLLÈGE » :**

**ÉTAPE 1 :**

D intervient, avec DC et DB, de façon dissymétrique vis-à-vis des côtés de l'angle  $\widehat{VOT}$ . Comme D se déplace sur  $\widehat{VT}$ , remédions à cette dissymétrie.

a) Soit avec (DE)  $\perp$  (OB), [DE] « remplaçant » [DB]...

$$DE = DB \sin \alpha.$$

Donc

$$DC \times DB = DC \times DE \times \frac{1}{\sin \alpha}$$

et le maximum de  $DC \times DB$  correspond à celui de  $DC \times DE$ .

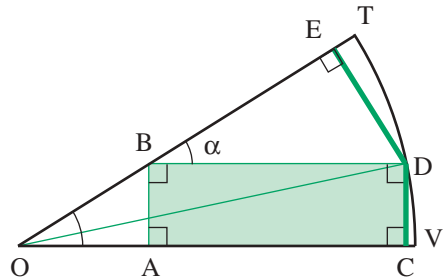


figure 7

b) Soit avec  $(DL) \parallel (OB)$ ,  $[DL[$  « remplaçant »  $[DC]$ ...

$$DC = DL \sin \alpha.$$

Donc

$$DC \times DB = DB \times DL \times \sin \alpha$$

et le maximum de  $DC \times DB$  correspond à celui de  $DB \times DL$ .

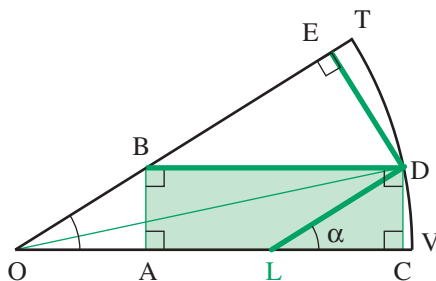


figure 8

Remarque pour a) et b) :

Il y a une cohérence puisque  $DB \times DL \times \sin^2 \alpha = DC \times DE$ .

**ÉTAPE 2 :**

Avec nos « symétries » quant aux deux bras de D, sommes-nous pour autant plus avancés?

Nous le serions si D se déplaçait sur le segment  $[VT]$ , base du triangle OVT.

En effet (Cf. Annexes I et I'), nous avons :

- avec le a),  $DE + DC =$  constante,
- avec le b),  $DB + DL =$  constante.

Et nous savons, Cf. Annexe II, que quand deux nombres ont une somme constante leur produit est maximal quand ces nombres sont égaux (ou s'en approchent le plus possible).

Mais D n'est pas sur  $[VT]$  !

Pour contrer ma frustration et m'appuyer sur ce que je sais, j'associe au point D qui

se situe sur l'arc  $\widehat{VT}$ , le point D' où  $(OD)$  coupe  $[VT]$ .

Cf. les figures 9 et 10 ci-après :

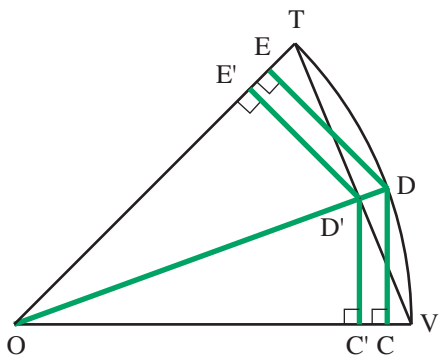


figure 9

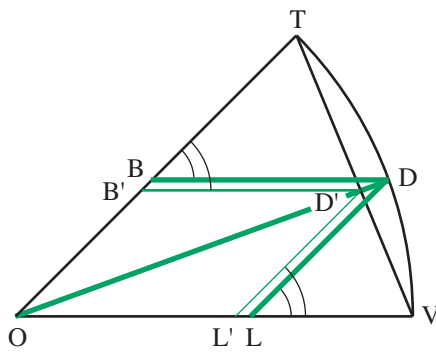


figure 10

Dans chacun de ces cas, le théorème de « Thalès-triangle » permet un « report » de

$$D' \text{ sur } D : \frac{DC}{D'C'} = \frac{OD}{OD'}, \text{ etc. } D' \text{ où}$$

$$DC \times DE = D'C' \times D'E' \left( \frac{OD}{OD'} \right)^2 \text{ et } DL \times DB = D'L' \times D'B' \left( \frac{OD}{OD'} \right)^2.$$

Le maximum de  $D'C' \times D'E'$  a lieu pour  $D'C' = D'E'$  soit  $D'$  milieu du segment  $[VT]$ , c'est-à-dire  $(OD') \perp (VT)$ , donc  $OD'$  minimum, ce qui déclenche aussi un maximum

pour  $\left( \frac{OD}{OD'} \right)^2$ .

$DC \times DE$  est donc alors, du fait de la conjugaison de deux maxima, lui-même maximum.

Idem pour  $DL \times DB$ .

Donc, par l'une quelconque des deux voies a) et b), on retrouve le fait que l'aire du set est maximale pour  $(OD)$  bissectrice de  $\widehat{VOT}$ , soit  $D$  milieu de l'arc  $\widehat{VT}$  : c'était le résultat de la « méthode lycée ».

Comme précédemment on déduira, de  $(OD)$  bissectrice, l'égalité  $OB = BD$ .

### 1.3. UNE AUTRE MÉTHODE ENCORE :

Le rectangle  $ABDC$  et le parallélogramme  $OBDL$  ont des aires égales. Celle de  $OBDL$  est le double de celle du triangle  $BOD$ .

Or, quand  $D$  varie sur l'arc de cercle  $\widehat{VT}$ , le triangle  $OBD$  a son côté  $OD$  constant,

ainsi que son angle  $\widehat{OBD} (= \pi - \alpha)$ . Il s'ensuit que, si on maintenait  $[OD]$  fixe,  $B$

se déplacerait sur un arc de cercle  $\widehat{OD}$  (appelé « arc capable... ») avec un maximum de l'aire de  $OBD$  pour  $BOD$  isocèle de base  $[OD]$ , donc quand le parallélogramme  $OBDL$  est un losange,

donc  $(OD)$  bissectrice de  $\widehat{VOT}$ . Etc.

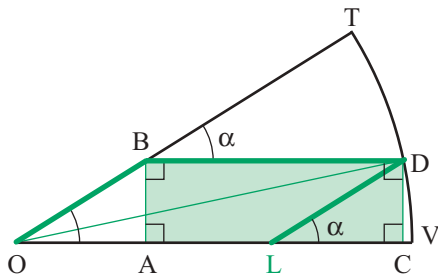


figure 11

### REMARQUE SUR LES VOIES DES 1.2 ET 1.3 :

Ces voies ont l'avantage de mettre en jeu des méthodes générales, ici fécondes grâce à des propriétés, démontrées dans les Annexes, d'usage relativement fréquent (y compris en probabilités ou statistiques...). Il s'agit de « beaux » parcours...

## II. PROPRIÉTÉS DES SETS MAXIMAUX

Nous avons vu que, pour  $n$  donné, il lui correspond un set maximal d'aire  $R^2 \tan \frac{\pi}{2n}$ .

En cette partie II, nous ne ferons intervenir, pour  $n$  donné, que les sets maximaux correspondants.

**PREMIER PROBLÈME :**

Existe-t-il une valeur de  $n$  (au moins une) et, si oui, laquelle (ou lesquelles) telle(s) que le set maximal soit un carré ?

**MÉTHODE 1 :**

$$BD = BB'$$

équivalent à  $OB = BB'$ , donc à  $OBB'$  équilatéral,

$$\text{soit } \alpha = \frac{\pi}{6}. \text{ Or } \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Le set maximal est donc carré pour le cas de six sets, et seulement dans ce cas.

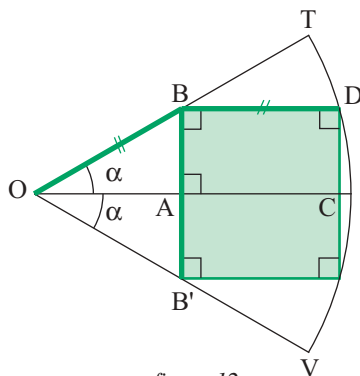


figure 12

**MÉTHODE 2 :**

$$DE = BD \sin \alpha \text{ (Cf. figure 7)}$$

Le set est maximal si et seulement si  $DE = DC$ , soit  $DC = BD \sin \alpha$ .

Il est carré si et seulement si  $DC = \frac{1}{2} DB$ , donc  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ . D'où  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . Etc.

**MÉTHODE 3 :**

Le set est maximal si et seulement si

$$2R \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{2 \cos(\alpha/2)}$$

$$\text{i.e. } 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ (le cas } \alpha = \frac{5\pi}{6}, \alpha \text{ obtus, étant exclu).}$$

**CONCLUSION :**

Il existe donc un et un seul cas, celui de six sets, où les sets maximaux sont des carrés.

**MAIS DAMIEN S'ÉTONNE :**

- La figure 3, où  $n = 3$ , ne propose-t-elle pas un set carré ?
- Tu oublies, rétorque SOPHIE, que la conclusion précédente porte sur des sets maximaux. Celui de la figure 3 n'est pas « maximal ».
- Tu as raison.  
Mais, Sophie, peut-on toujours, pour  $n$  donné, trouver un set carré, maximal ou pas ?
- Bien sûr ! Vois l'ANNEXE 3 !

**DEUXIÈME PROBLÈME :**

Soit  $\Sigma$  la somme des aires des  $n$  sets identiques d'une même configuration lorsque ces sets ont l'aire maximale.

$$\Sigma = n R^2 \tan \frac{\pi}{2n}$$

**ÉTUDE DE LA SUITE AINSI OBTENUE**

En voici les premiers termes, à partir de  $n = 2$  :

$2 R^2$  ;  $1,732 R^2$  ;  $1,657 R^2$  ;  $1,625 R^2$  ;  $1,607 R^2$  ;  $1,597 R^2$  ;  $1,591 R^2$  ; ...

Que constate-t-on ? (... , diminution des différences, ...)

Illustrer par un graphique...

Que prévoir pour la suite des valeurs de  $\Sigma$  ?

**AU COLLÈGE**

On s'en tiendra là, sauf à éliminer les valeurs peu réalistes (ainsi  $n = 90$  qui donne  $1,570\,956 R^2$  ou  $n = 180$ , qui donne  $1,570\,08\dots R^2$ ) qui, cependant, suggèrent bien une « limite » de la suite, égale à la moitié de l'aire de la table...

**AU LYCÉE****1. La suite est-elle bien décroissante ?**

Associons à notre suite la fonction qui, dans  $\mathbb{R}$ , associe à  $x$  la valeur  $y$  telle que

$$y = x \tan \frac{\pi}{2x}$$

et étudions, par sa dérivée, la variation de cette fonction.

$$y' = \tan \frac{\pi}{2x} + x \left( 1 + \tan^2 \frac{\pi}{2x} \right) \left( -\frac{\pi}{x^2} \right),$$

soit, en posant  $\tan \frac{\pi}{2x} = t$ ,

$$y' = t \left( 1 - \frac{\pi}{x} \times \frac{1+t^2}{2t} \right) = t \left( 1 - \frac{\pi/x}{\sin(\pi/x)} \right).$$

Or  $\sin \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{x}$ .

D'où  $\frac{\pi/x}{\sin(\pi/x)} > 1$ .

La dérivée est donc négative.

Donc une fonction et **une suite décroissantes...**

Plus il y a de sets (c'est-à-dire de convives), moins la table est protégée par eux !



## 2. Valeur limite ?

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\pi}{2n}$  tend vers zéro et  $\tan \frac{\pi}{2n}$  se comporte, en valeurs supérieures, comme  $\frac{\pi}{2n}$ . D'où la limite de la suite :  $n R^2 \times \frac{\pi}{2n}$ , c'est-à-dire  $\boxed{\frac{\pi R^2}{2}}$ , donc la moitié de l'aire de la table.

**Variante proposée par Louis-Marie BONNEVAL :**

### 1'. La suite est-elle bien décroissante ?

Posons pour tout  $x$  de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  :  $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ , de sorte que :  $\Sigma_n = \frac{\pi R^2}{2} f\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ .

$$\text{Alors } f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2(x)} - \tan(x)}{x^2} = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{x^2 \cos^2(x)} = \frac{2x - \sin(2x)}{2x^2 \cos^2(x)} > 0.$$

Donc  $f$  est croissante sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , ce qui implique la décroissance de la suite  $(\Sigma_n)$ .

### 2'. Valeur limite ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \frac{\pi R^2}{2}.$$

## TROISIÈME PROBLÈME :

Quand  $n$  augmente, que devient le polygone central délimité par les sets (à partir de  $n = 3$ ) ?

Reportons-nous à la figure 6 et au résultat  $OB = \frac{R}{2 \cos(\alpha/2)}$

$$OB = \frac{R}{2 \cos(\pi/2n)}.$$

Quand  $n$  augmente,  $\frac{\pi}{2n}$  diminue et,  $\frac{\pi}{2n}$  étant inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{2n}$  augmente, donc  $OB$  diminue.

Mais quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\pi}{2n} \rightarrow 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{2n} \rightarrow 1$  et  $OB \rightarrow \frac{R}{2}$ .

Le polygone intérieur délimité par les sets aurait donc alors *ses sommets sur le cercle*  $(O, R/2)$  et tendrait à se confondre avec lui, d'aire  $\frac{\pi R^2}{4}$ .

**Remarque :** Il existe **entre les sets et le pourtour de la table, hors du polygone**, (cf. figures 1, 2, 3, 5 et 6) **une partie de la table non couverte**. Quand  $n \rightarrow +\infty$ , quelle est son aire? (Les limites des autres aires : sets, et polygone central, permettent de répondre ...  $\frac{\pi R^2}{4}$ )

### CONCLUSION DE CETTE MINI-ÉTUDE SUR LES SETS DE TABLE

Merci à eux pour nos promenades mathématiques élémentaires collège ou lycées ! Et merci à MATHS-JEUNES !

Henri BAREIL  
en remerciant Louis-Marie Bonneval  
et Christiane Zehren  
pour leurs critiques constructives

#### ANNEXE 1

Un triangle isocèle OVT de base [VT], D' variable sur [VF], ... : Cf. figure 13.  
La somme D'C' + D'E' est constante.

Parmi les nombreuses démonstrations possibles :

$$2 \text{ aire } OD'V = D'C' \times OV,$$

$$2 \text{ aire } OD'T = D'E' \times OT.$$

$$D' \text{ où } 2 \text{ aire } OVT = (D'C' + D'E') \times OV.$$

D'C' + D'E' est donc constante, égale à la hauteur issue de V ou de T.

**Remarque :** Cela a une application classique au triangle équilatéral, avec la somme des distances aux côtés d'un point intérieur au triangle.

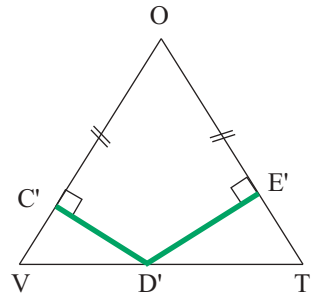


figure 13

#### ANNEXE 1'

Triangle isocèle OVT, ... (Cf. figure 14), avec D' variable sur [VT].

$$\text{Alors } D'B' + D'L' = B'T + B'O = OT.$$

$$D' \text{ où } D'B' + D'L' \text{ constante, ...}$$

**Extension** aussi au triangle équilatéral.

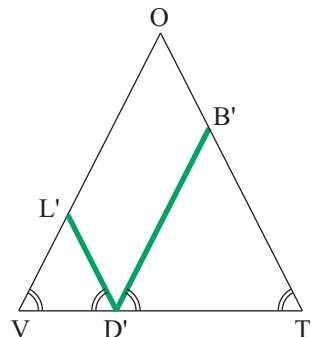


figure 14

## ANNEXE 2

THÉORÈME : *Quand deux nombres ont leur somme constante, leur produit est maximum quand ces nombres sont égaux (ou s'en approchent le plus possible).*

En voici une démonstration :

Soit  $x + y = 2m$ , constante.

$x = m - a$  implique  $y = m + a$ .

D'où  $xy = m^2 - a^2$ . Etc.

**Remarque :** La démonstration faite au §1.1 a fait apparaître un théorème voisin :

*Quand deux angles ont leur somme constante (et inférieure à  $\pi$ ) le produit de leurs sinus est maximum quand ces angles sont égaux.*

## ANNEXE 3

PROBLÈME : *Pour  $n$  donné, peut-on obtenir un set carré (pas nécessairement maximal) ?*

Référons-nous au § II. Premier problème - Méthode 2.

Pour que le set soit carré, il faut et il suffit que  $\frac{DB}{DC} = 2$ , soit  $\frac{DE}{DC} = 2 \sin \alpha$ .

Il suffit de construire  $\alpha$  en conséquence :

Soit, par exemple, un point  $d$  :

- à une distance arbitraire  $k$  de (OV),
- à la distance  $k \times 2 \sin \alpha$  de (OT).

$d$  est défini par l'intersection de deux parallèles respectives à (OV) et (OT).

La droite (Od) est la droite (OD), D et  $d$  se correspondant par homothétie.