

Quelle place pour le calcul mental au collège ?

Bernard Anselmo^(*)

Le calcul mental a toujours été présent dans les programmes de collège. Si aujourd'hui les instructions officielles précisent qu'« à la suite de l'école primaire, le collège doit en particulier permettre aux élèves d'entretenir et de développer leurs compétences en calcul mental », les programmes de 95-98 mentionnaient déjà que « les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché, sous différentes formes » dont le calcul mental. Le document d'accompagnement des programmes de sixième précisait dans le paragraphe « place des calculatrices et de l'informatique » que « le calcul mental portant sur les nombres inférieurs à 100 restait une nécessité », et dans celui intitulé « calcul mental et ordre de grandeur » que le professeur devait entretenir les acquis de l'école élémentaire et conduire de nombreuses activités de calcul pour améliorer les performances des élèves dans ce domaine.

Force est de constater que, malgré ces instructions officielles, la pratique effective du calcul mental dans les classes de collège s'est faite de plus en plus rare ces 20 dernières années, et qu'elle est aujourd'hui souvent occasionnelle. De multiples raisons peuvent expliquer cette désaffection, au rang desquelles on peut citer l'explosion des moyens de calculs instrumentés et la diminution des horaires de mathématiques.

La polémique actuelle sur le calcul et la déclinaison de compétences du socle commun reposent aujourd'hui la question du calcul mental. Mais c'est surtout l'affirmation de sa place prédominante dans les programmes de l'école élémentaire, la réaffirmation de la nécessité de cette forme de calcul dans ceux du collège, qui conduisent à se pencher à nouveau sur le sujet, pour le redéfinir, préciser quels en sont les enjeux, interroger les pratiques et les faire évoluer.

Le calcul mental

Le premier aspect du calcul mental, celui qui est communément évoqué, est l'aspect automatisé. Le traitement du calcul se fait alors de façon immédiate, sans faire appel à réflexion. Il consiste simplement en un rappel d'un résultat mémorisé (comme par exemple les résultats des tables de multiplication) ou d'une procédure automatisée (comme par exemple la règle de multiplication d'un entier par 10). Il demande peu d'effort, peut être réalisé rapidement, se fait probablement de façon stable chez chaque individu et reste assez proche d'un individu à l'autre.

D'autres calculs demandent un traitement plus complexe. Pour les effectuer il est nécessaire d'établir une stratégie visant à rendre le calcul plus simple en s'appuyant sur des résultats connus. On parle alors de calcul réfléchi ou raisonné.

^(*) Professeur de collège, membre du groupe « calcul mental au collège » de l'IREM de Lyon.

La charge mentale est plus lourde, le temps nécessaire est plus long, des traces écrites sont parfois nécessaires.

Souvent plusieurs méthodes de calcul sont possibles, elles varient suivant les personnes, mais peuvent aussi changer d'une fois sur l'autre pour un même individu.

Dans le calcul mental, ces deux aspects du calcul ne sont pas indépendants :

- la mémorisation des résultats, l'automatisation des procédures se font souvent par la pratique répétée d'un calcul réfléchi : ainsi certains élèves reconstruisent à plusieurs reprises $6 \text{ fois } 8$ comme $5 \text{ fois } 8 + 1 \text{ fois } 8$ avant de mémoriser $6 \text{ fois } 8 = 48$;
- le traitement réfléchi d'un calcul mobilise automatiquement des résultats et des procédures connues : 26×17 peut se décomposer en $26 \times 10 + 26 \times 7$ par application en acte de la distributivité, le traitement de $10 \text{ fois } 26$ peut s'effectuer par application automatisée de la règle de multiplication d'un entier par 10, et celui de 26×7 en s'appuyant sur la connaissance de la table de multiplication par 7, pour calculer $20 \text{ fois } 7 + 7 \text{ fois } 6$.

Ainsi le calcul réfléchi s'appuie sur le calcul automatisé, en montre l'intérêt, et en retour favorise la mémorisation.

Les enjeux

Les capacités en calcul mental méritent d'être entretenues et développées au collège pour répondre à deux nécessités :

- Une nécessité sociale : le calcul mental est le calcul d'usage, utile au quotidien. Il demeure indispensable de savoir obtenir rapidement un résultat, exact dans des cas simples ou approché dans d'autres cas, aussi bien pour contrôler un résultat trouvé par un autre moyen de calcul que pour calculer en son absence.
- Une nécessité pour l'apprentissage : Une insuffisance de maîtrise des relations existant entre certains nombres interdit la mise en œuvre de certaines procédures. C'est le cas par exemple pour les problèmes de proportionnalité, où la perception des relations entre les nombres de l'énoncé détermine le choix de la propriété la mieux adaptée.

D'autre part le calcul mental remplit une fonction pédagogique : en travaillant des notions comme la structuration des naturels ou les propriétés des opérations, en en maniant d'autres telles que la proportionnalité, les écritures fractionnaires, les relatifs ou le calcul algébrique, il contribue à leur maîtrise et en assure une première compréhension.

Ainsi, au collège, la pratique du calcul mental peut s'avérer intéressante à plusieurs niveaux :

- C'est une aide à la mémorisation d'un certain nombre de résultats, de relations entre nombres, dont la disponibilité est plus qu'utile pour effectuer des calculs écrits. Par exemple, sans disponibilité rapide des résultats des tables, il est difficile

de pouvoir simplifier une fraction ou de réduire l'écriture d'une expression telle que : $\sqrt{28} + \sqrt{63}$.

- C'est une aide à l'automatisation de procédures de calculs. Ainsi la technique d'addition ou de multiplication de nombres en écriture fractionnaire, les techniques de réduction ou de développement d'une expression numérique ou littérale, peuvent être travaillées de façon répétée, sur plusieurs séances. La concentration des élèves pendant le calcul mental, la reprise d'exercices similaires, la verbalisation des procédures utilisées, sont autant d'éléments qui peuvent permettre aux élèves d'acquérir une certaine dextérité, et ainsi, maîtrisant ces techniques, de pouvoir ultérieurement se centrer sur d'autres aspects des problèmes qui leur sont soumis.
- C'est une aide à la conceptualisation de propriétés des opérations qui dans la pratique du calcul réfléchi sont souvent utilisées en acte. Au collège, les propriétés d'associativité, de commutativité, la distributivité, mais aussi les propriétés des puissances, des racines carrées peuvent être travaillées mentalement avec profit, pour peu que les nombres choisis permettent de focaliser l'attention davantage sur les procédures mises en jeu que sur le traitement du calcul. Elles peuvent ainsi prendre du sens avant d'être, si nécessaire, étudiées pour elles-mêmes.
- C'est l'occasion de développer des capacités de raisonnement. La pratique du calcul réfléchi nécessite l'élaboration de stratégies de calcul souvent personnelles. Celles-ci permettent de rendre un calcul plus simple, en procédant étape par étape, tout en mobilisant des résultats mémorisés et des procédures automatisées.

De plus, le développement d'une certaine habileté en calcul mental :

- favorise les processus de contrôle. Des compétences d'ordre mental sont déterminantes pour contrôler la vraisemblance d'un résultat obtenu ou non par un autre moyen de calcul : être capable de choisir une valeur approchée convenable, de « compenser » des valeurs approchées par défaut par des valeurs par excès, de déterminer un ordre de grandeur, de le positionner par rapport à une valeur exacte.
- constitue une aide à la résolution de problèmes. La dextérité à calculer mentalement permet de multiplier les essais en contrôlant la vraisemblance des résultats, et de tester différentes stratégies possibles. Un changement de champ numérique peut par exemple ramener l'élève à une situation de référence dans laquelle les opérations à mettre en jeu sont plus familières, et à partir de laquelle il pourra envisager un mode de traitement possible du problème.

D'autre part, la courte durée d'une activité permet de multiplier les types de problèmes traités et ainsi d'élargir les connaissances qu'ont les élèves des champs d'application d'une opération, d'un théorème, ...

Pour ces raisons la pratique régulière du calcul mental au collège est à encourager et peut viser quatre objectifs :

- **Entretenir et développer** les connaissances construites à l'école primaire, en sollicitant et en enrichissant le répertoire de résultats mémorisés, et celui des procédures automatisées.
- **Enrichir le panel de stratégies mobilisables** par chaque élève dans des situations de calcul réfléchi.
- **Développer la maîtrise du calcul approché**, aussi bien pour anticiper un ordre de grandeur que pour contrôler l'exactitude d'un résultat.
- **Favoriser l'appropriation de nouvelles connaissances**, comme par exemple les propriétés de racines carrées, la propriété de Thalès, ou les opérations sur les nombres en écriture fractionnaire.

Les pratiques

Traditionnellement, le calcul mental est pratiqué soit par le procédé de La Martinière⁽¹⁾ (peu utilisé en collège), soit au moyen de fiches à compléter. Les séances se répartissent en trois types : des séances où, après une rapide présentation, il s'agit d'appliquer une technique ou de mémoriser des résultats, des séances d'entraînement où on les sollicite, et des séances d'évaluation où on vérifie le niveau d'acquisition. Le travail porte essentiellement sur le calcul automatisé. Le calcul réfléchi, même s'il est parfois mis en œuvre par les élèves pour reconstruire des résultats, n'est pas pris en compte, ni exploité.

De cette pratique éprouvée, on peut tirer quelques enseignements : la nécessité de prendre en compte des profils cognitifs (auditifs, visuels), celle de favoriser l'attention des élèves (en variant les supports, en proposant des exercices courts, plutôt en début de séance), celle de travailler sur la motivation.

Une séance de calcul réfléchi se gère différemment. Le calcul proposé ne peut pas se faire directement par simple rappel de mémoire, il nécessite réflexion et demande plus de temps. Souvent plusieurs stratégies apparaissent. Une mise en commun permet d'organiser la confrontation de ces procédures, leurs explicitations, leur mise en lien. Elle est l'occasion d'un travail d'argumentation et vise à ce que chacun puisse découvrir d'autres solutions et éventuellement s'en approprier de nouvelles.

Cette démarche s'apparente davantage à une approche par la résolution de problèmes dont les différents travaux de didactique du dernier quart de siècle ont montré l'importance dans les processus d'apprentissage.

(1) C'est à l'école « La Martinière de Lyon », que l'utilisation pédagogique de l'ardoise fut inventée et prônée au début du siècle dernier. Dans cette méthode dite de « La Martinière », le professeur pose une question, et au signal, les élèves doivent inscrire sur leur ardoise le résultat qu'ils ont trouvé mentalement. Les ardoises sont ensuite brandies en direction de l'enseignant qui, en quelques instants, peut lire toutes les réponses, questionner ceux qui se sont trompés, féliciter les autres, ...

Quelles activités pour la classe⁽²⁾ ?

Les activités problématisées peuvent être de différents types, et se décliner suivant différents modes, en fonction des objectifs visés. Voici quelques idées :

- Le compte est bon multiplicatif : sur le principe du jeu, le professeur propose de retrouver des nombres en formant un produit à partir de plusieurs facteurs à choisir dans une liste de nombres. Par exemple :

En utilisant une seule fois des nombres de cette liste et en effectuant uniquement des multiplications, trouver : 315

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;

À chaque fois, après qu'environ la moitié de la classe a abouti à un résultat, le professeur recense les propositions, les soumet à la validation de la classe. Il revient sur les démarches correctes en questionnant les élèves producteurs sur ce qui les a orientées : « Comment as-tu su quels nombres choisir ? ».

La mise en commun des solutions peut dans un premier temps permettre d'illustrer les propriétés d'associativité, de commutativité, et la notion d'élément neutre. Un choix judicieux des nombres proposés peut ensuite faire évoluer les procédures des élèves, de la procédure essai/erreur vers une stratégie d'analyse du nombre à atteindre. Le problème posé donne ainsi du sens à la notion de critères de divisibilité et contribue à leur mémorisation.

- Le compte est bon avec des fractions : sur le même principe, le professeur propose de trouver une fraction à partir d'une liste de nombres (dont certains sont des fractions) et des quatre opérations. Il précise qu'il est autorisé d'écrire des résultats intermédiaires sur la feuille de recherche, et que naturellement, il est possible d'utiliser d'autres écritures fractionnaires que celles des nombres proposés. Par exemple :

En utilisant une seule fois des nombres de cette liste et en effectuant les

opérations voulues, trouver le nombre suivant : $\frac{9}{8}$

1; 2; 3; 4; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{6}{9}$

La confrontation des propositions, leur mise en débat permettent à la fois de redéfinir ce qu'est une opération (en excluant l'utilisation des différentes écritures d'un même nombre de cette définition), mais aussi de rappeler les techniques de calcul en écriture fractionnaire.

- « Vrai, faux » : le professeur soumet à la classe les propositions suivantes :

$$\sqrt{4} + \sqrt{16} = \sqrt{20} ; \sqrt{18} \text{ est le double de } \sqrt{9} ; \sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$$

(2) On pourra retrouver d'autres exemples d'activités dans l'article « Le calcul mental au collège, nostalgie ou innovation », B Anselmo ; Paul Planchette. Repères IREM n° 62 (janvier 2006), Topiques éditions, Janvier 2006.

Dans la suite de propositions, des erreurs classiques sont glissées parmi quelques phrases vraies. Les nombres choisis sont volontairement simples pour que le débat porte davantage sur les représentations que sur le calcul proprement dit.

Le professeur recense les différents avis. Le débat qui s'ensuit permet de mettre à jour les conceptions erronées.

Des activités similaires peuvent être proposées sur les écritures littérales.

- « Faux ? » : L'énoncé suivant est proposé en classe :

Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont sûrement fausses ?

$$312,5 \times 27,87 = 8\,700,326 ; 312,5 \times 27,87 = 9\,037,25 ;$$

$$312,5 \times 27,87 = 8\,709,375 ; 312,5 \times 27,87 = 6\,570,425 ;$$

$$312,5 \times 27,87 = 9\,307,675$$

Les différentes propositions sont recensées, les procédures de contrôle utilisées explicitées et débattues. La synthèse permet de dresser une liste de procédures valides (contrôle du dernier chiffre, de la place de la virgule, utilisation des ordres de grandeur, ...).

- Règle pensée : L'énoncé suivant est proposé aux élèves :

J'ai pensé à une règle qui permet de passer de 2 à 5, de 3 à 7, de 9 à 19, ...
Quelle est cette règle ?

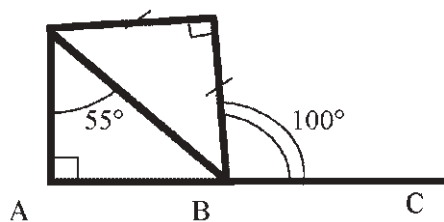
Les élèves cherchent individuellement, puis suit une mise en commun qui vise à valider ou invalider les différentes propositions sans en privilégier. Selon le niveau de classe ou l'objectif que le professeur se fixe, la synthèse peut mettre en lumière l'équivalence des règles, ou porter davantage sur le passage des formulations en mots aux expressions algébriques correspondantes.

La fréquence de ce type d'activités est un facteur important dans les apprentissages. C'est la répétition des exercices qui force à réinvestir les procédures et pousse à leur automatisation. Ce processus peut être favorisé par la verbalisation des procédés mis en œuvre, par exemple dans les phases d'explicitation.

Il serait dommage de ne pas en profiter dans d'autres domaines que celui purement numérique, et dans lesquels l'automatisation est aussi un objectif d'enseignement. On peut, par exemple, envisager une mise en œuvre similaire d'activités spécifiques pour travailler sur les formules d'aires, de volumes, ou les identités remarquables.

De même, on peut viser la mémorisation de certaines propriétés en géométrie en les travaillant en acte et en faisant fonctionner les procédures qui leur sont associées. C'est possible par exemple avec les propriétés des angles du triangle en cinquième, Pythagore en quatrième, ou Thalès en troisième.

D'autres activités peuvent être construites pour exiger un raisonnement déductif préalable au calcul, par exemple en demandant de réfléchir sur un dessin à main levée comme dans l'exercice ci-dessous. Les nombres sont alors choisis simples pour que les problèmes puissent être résolus avec le seul calcul mental, et que l'attention des élèves se centre sur le raisonnement.



Les points A, B, C sont-ils alignés ?

D'autre part, si la mise en œuvre d'activités de calcul réfléchi est l'occasion d'échanges de stratégies, on peut envisager des dispositifs similaires dans d'autres domaines du programme où un enrichissement progressif des procédures est souhaité. C'est le cas en particulier pour la proportionnalité dont l'enseignement s'étend sur les quatre années du collège. Ainsi on peut proposer de résoudre en calcul mental de petits exercices, variant les types de problèmes, les contextes et les nombres mis en jeu, avec l'objectif, non plus de travailler le calcul proprement dit, mais la diversité des démarches et le choix des procédures pertinentes.

Pour travailler plus spécifiquement la mémorisation des résultats, d'autres activités sont à organiser. Les jeux sont souvent motivants et peuvent prendre différentes formes : ils peuvent être soit oraux (jeu de furet), ou s'appuyer sur des supports (jeu de loto, de cartes, de dominos, ...).

Quelle mise en œuvre ?

La richesse des activités possibles fait que les moments de calcul mental peuvent être nombreux et réguliers. Il est envisageable d'en placer à chaque cours, plutôt en début d'heure, à la fois pour fixer l'attention des élèves mais aussi pour profiter de leur concentration, meilleure pendant les premières minutes des séances.

Les séances de calcul mental sont de différents types et peuvent être plus ou moins longues. Les situations de découverte qui visent à faire émerger de nouveaux résultats, de nouvelles procédures ou propriétés sont des séances assez longues où la recherche et le débat sont privilégiés. Il en est de même pour les situations où il s'agit de favoriser l'échange de procédures. Pour autant ces séances nécessitent l'attention des élèves et ne doivent pas trop se prolonger pour éviter que celle-ci ne commence à tomber.

Les séances d'entraînement visent l'automatisation, la mémorisation. Elles peuvent porter sur des connaissances antérieures ou sur des connaissances récentes. Suivant le degré d'automatisation atteint par les élèves, elles s'avèrent plus ou moins longues selon qu'il est ou non nécessaire de revenir sur les erreurs et de faire verbaliser les procédures.

Les séances d'évaluation sont courtes, c'est la capacité à produire rapidement un résultat qui est mesurée.

Les consignes peuvent être données sous forme orale ou écrite. Si elles le sont oralement, l'attention des élèves est plus soutenue mais une partie de la mémoire de travail est occupée à retenir les données de l'énoncé. Si elles sont données par écrit, on allège cette mémoire mais on risque d'induire des techniques opératoires de calcul écrit. La solution consiste à varier les formes de consignes.

S'ils ne sont pas donnés oralement, les énoncés peuvent être écrits au tableau, projetés au rétroprojecteur, ou défiler automatiquement par projection d'un diaporama. Là aussi, la variation des supports est conseillée : elle permet d'éviter la routine et motive les élèves.

La classe peut être amenée à produire ses réponses sur fiche (si on veut garder une trace des résultats trouvés) mais l'utilisation du brouillon est parfois suffisante. L'ardoise est toujours d'actualité en particulier dans les séances où un débat autour des réponses proposées est envisagé.

Quelle programmation ?

Les séances de calcul mental peuvent s'inscrire dans la logique du chapitre en cours mais en être aussi complètement déconnectées. Elles suivent une logique qui leur est propre même si elle interagit avec celle de la progression générale de l'année. Ainsi des séances peuvent être organisées : en amont d'un chapitre pour vérifier des prérequis ou initier un travail, pendant le chapitre pour aider à la mémorisation, après le chapitre pour continuer à entraîner la notion. Certains points du programme comme la proportionnalité en sixième, peuvent même être traités en grande partie à travers des activités de calcul mental réparties tout au long de l'année scolaire. C'est une façon d'entrer dans une programmation « spirale » des notions à enseigner au collège.

En ce qui concerne les compétences spécifiques au calcul mental à entretenir ou acquérir au collège, une aide à la programmation est disponible en annexe du document d'accompagnement des programmes « calcul numérique au collège »⁽³⁾, mais comme nous l'avons vu plus haut, des activités à prétexte calcul mental peuvent aussi s'intégrer dans une programmation des enseignements d'une année.

Conséquences pour la classe

L'installation d'un rituel en début d'heure d'enseignement permet de marquer la césure avec les cours précédents et de mettre les élèves en situation mentale propice au travail. L'activité de calcul mental joue ce rôle, sa mise en place rapide et son aspect ludique font que le cours débute par un exercice apprécié dans lequel les élèves s'investissent.

Un rôle privilégié est donné à l'oral au moment des débats ou des corrections collectives. Ces temps d'échanges verbaux ne sont pas contraints par les codes de l'écriture mathématique, et libèrent certains élèves des blocages de l'écrit. Le langage

(3) Disponible sur le site <http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm>

Voir aussi les éléments de programmation cycle 3 donnés dans le document d'accompagnements des programmes de primaire :

<http://www.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf>

employé est spontané mais se veut accessible à tous, en cas d'incompréhension les réactions sont instantanées.

C'est dans ces moments de formulation que chacun, sous le contrôle des autres, prend conscience de sa démarche, découvre ses éventuelles erreurs ou vérifie la qualité de son raisonnement. L'immédiateté des répliques rend la classe vivante et motive les élèves.

La pratique régulière du calcul mental permet de multiplier les exercices d'entraînement, d'entretien mais aussi d'intégrer des évaluations diagnostiques, des situations de recherche. Loin d'être une perte de temps, elle s'appuie sur l'attention et la réactivité des élèves pour accélérer certains apprentissages et peut, à condition de donner un peu moins de place à l'écrit, permettre d'avancer plus rapidement dans le programme.

La recherche de problèmes, les mises en débat répétées de réponses ou des procédures conduisent inévitablement à instaurer un nouveau contrat dans la classe. L'élève assume la responsabilité des solutions et des preuves, il doit être attentif, critique et capable d'argumenter. Le professeur anime et est le garant de la justesse des éléments dégagés par la classe.

Pour lui, l'écoute des élèves, la découverte de leurs représentations et de leurs démarches sont souvent source d'enseignements. La prise en compte de la diversité des réponses, son exploitation par la classe sont l'occasion d'une différenciation réelle et facile à mettre en place.

Conclusion

Si la place du calcul mental au collège mérite d'être élargie, ce n'est pas pour permettre un retour des « bonnes vieilles méthodes » d'enseignement traditionnel que chacun sait bien aujourd'hui inadaptées. Mais c'est au contraire parce que sa pratique actualisée, nourrie des apports de la recherche en didactique des mathématiques, est à la fois nécessaire, possible, utile et rentable.

Elle est nécessaire, dans un monde où l'information « chiffrée » est de plus en plus prégnante.

Elle est possible, par une programmation construite, cohérente et articulée avec les programmes.

Elle est utile, car elle favorise les apprentissages, permet la mémorisation et développe des automatismes.

Elle est rentable, et rejaillit sur l'ensemble de l'activité mathématique (capacités de calculs accrues, aides en résolution de problèmes, mais aussi capacité à chercher, à argumenter, à s'adapter, ...).