Autour du problème de Sylvester

Luc Bouttier et Mikhail Zaidenberg

RÉSUMÉ. Le problème de Sylvester est un problème classique de la géométrie élémentaire. Nous proposons ici, en nous référant à Borwein et Moser [1], un bref résumé de ce problème.
Une première version plus complète au niveau démonstrations et bibliographie doit paraître dans la revue Quadrature [2]. Pour la revue de l'APMEP nous proposons une version un peu allégée.

Introduction

Parmi les problèmes de géométrie, il y en a qui ont pour objectif d'établir des relations d'incidence entre des droites et des points.

Un problème classique posé par J. J. Sylvester en 1893 [5] est resté sans solution pendant 40 ans. En 1933, Paul Erdös a reposé le problème, — en se désolant de ne pas arriver à le résoudre, – sans savoir qu'il avait déjà été posé[(1)]. Pou après, son collègue de Budapest, Tibor Gallai (*alias* Grünwald) trouve une première démonstration, en utilisant le plan projectif. 10 ans plus tard, en 1943, ils se retrouvent tous les deux aux États-Unis, le problème est posé publiquement, et la solution de Gallai est communiquée aux éditeurs en même temps. L'année suivante, d'autres solutions (Buck, Kelly, Steinberg, Steenrod, …) sont publiées.

Mais avant d'aller plus loin, voici le problème :

A. *Soit* P *une famille finie de points du plan qui ne sont pas tous alignés : alors il existe toujours une droite qui passe par deux points de* P *et pas plus* (voir Figure 1).

Ou bien pour ceux qui préfèrent :

B. *Soit* P *une famille finie de points du plan telle que toute droite passant par deux points de* P *passe aussi par un troisième point (au moins) : alors tous les points sont alignés.*

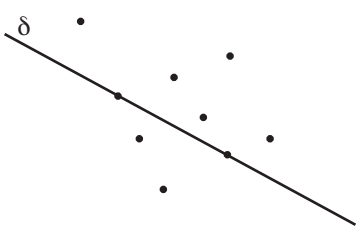

Figure 1. La droite δ est « ordinaire » ; elle ne passe que par deux points de P.

On travaille dans un plan réel affine ou projectif[(2)]. La situation est d'ailleurs différente dans le plan complexe, affine ou projectif, voir annexe 2.

(*) IREM DE GRENOBLE, 100 RUE DES MATHÉMATIQUES,
BP 41, 38402 ST. MARTIN D'HÈRES CEDEX, FRANCE.
E-mail address: Mikhail.Zaidenbergaujf-grenoble.fr
E-mail address: luc.bouttierfinanadoo.fr

(1) Plus tard, à Oslo, Karamata a dit à Paul Erdös qu'il avait vu ce problème, sans solution, dans un ancien ouvrage de mécanique.

(2) La version éditée par Quadrature [2] donne des solutions dans le plan projectif et contient en annexe quelques explications sur ce plan projectif.

Ce problème, on peut essayer de le transformer avec les outils dont ou dispose en géométrie.
* Si on reste dans une géométrie affine, on peut faire tourner ou retourner la configuration. On peut aussi l'étirer dans un sens ou dans l'autre à l'aide de transformations affines ; est-ce que cela va faciliter la recherche ?
* On peut également utiliser les transformations du plan projectif : par exemple, envoyer l'un des points à l'infini, les droites qui passent par ce point deviendront des parallèles dans le plan affine.
* Toujours dans la famille des transformations du plan projectif, on peut remplacer le problème par le problème dual :
A*. *Soit Δ' une famille finie de droites qui ne sont pas toutes concourantes ni parallèles dans le plan affine (ou bien pas toutes concourantes dans le plan projectif) : alors il existe toujours un point qui appartient exactement à deux droites de Δ' et pas plus.*

Ou bien pour ceux qui préfèrent :
B*. *Soit Δ' une famille finie de droites du plan affine telle que par tout point d'intersection de deux droites de Δ' passe aussi une troisième droite de Δ' (au moins) : alors toutes les droites de Δ' sont concourantes ou parallèles.*

On peut aussi faire des mesures : mesures d'angles, de distances, d'aires, utiliser des relations topologiques telles que la formule d'Euler-Poincaré (qui relie les nombres de sommets, de côtés, et de régions), ou bien la relation d'ordre sur chaque droite (un point est situé entre deux autres).

L'énoncé initial se pose en termes de problème d'incidence : existe-t-il une solution utilisant les simples relations d'incidences ?
Ce n'est pas si simple ! Voici des réponses.

1. Quelques solutions

La solution de Gallai est essentiellement euclidienne : elle utilise des mesures d'angles. Celle de Kelly se situe également dans le plan affine euclidien, elle porte sur la distance euclidienne ; c'est la plus connue et la plus « élémentaire ». La solution de Steinberg a été écrite dans un espace projectif : elle utilise l'ordre cyclique sur la droite projective. La solution de Steinberg ci-dessous et celle de Melchior-Steenrod sont projectives : l'une utilise l'ordre cyclique sur la droite projective, l'autre utilise la formule d'Euler-Poincaré, propriété topologique du plan projectif. Nous donnons aussi dans le § 2, une solution affine (utilisant des rapports d'aires de triangles) du problème « dual » de Sylvester : grâce au plan projectif et à la dualité projective, on obtient un nouvel énoncé du problème.

- P désignera tout au long un ensemble fini de points du plan.
- Δ désignera l'ensemble de toutes les droites joignant deux points de P.
- Une droite *ordinaire* δ sera une droite de Δ qui ne passe que par deux points de P.

1.1. La solution de Gallai (l'angle minimal).

Nous reprenons cette solution essentiellement parce que c'est la première qui a été proposée et qu'elle a aussi son intérêt. Ceux qui n'aiment pas entendre parler d'espaces projectifs pourront aller directement au paragraphe qui suit.

Gallai se place dans le plan projectif, et envoie un des points p_1 a l'infini. Si une des droites de Δ passant par p_1 est ordinaire alors la démonstration est terminée.

Sinon dans le plan affine, les droites de Δ passant par p_1, point à l'infini, sont deux à deux parallèles, et en plus de p_1, chacune contient encore au moins deux points de P. Parmi les droites de Δ qui ne passent pas par p_1, Gallai cherche la droite δ qui fait l'angle minimal α avec les droites parallèles : δ est ordinaire !

En effet, si δ contient trois points p_2, p_3, p_4 de P tels que p_3 est situé entre p_2 et p_4 alors la droite (p_1p_3) appartenant à Δ contient un troisième point p_5 de P (voir Figures 2 ou 3, p_5 est noté p_5' ou p_5''). Il est facile de voir qu'une des droites (p_2p_5) ou bien (p_4p_5) appartenant à Δ forme un angle plus petit que δ avec nos droites parallèles, ce qui contredit l'hypothèse d'angle α minimal.

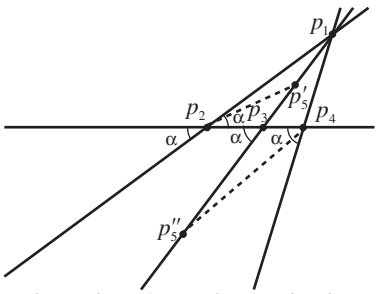

Figure 2. Présentation projective

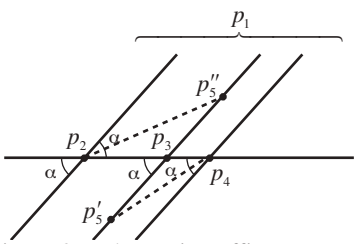

Figure 3. Présentation affine : par une transformation projective, on a envoyé l'un des points à l'infini et les droites passant par ce point sont parallèles dans le plan affine

1.2. La solution de Kelly (la distance minimale)

Kelly se place dans le plan affine euclidien. Pour tout point p de P et pour toute droite δ de Δ qui ne passe par p, Kelly note $d(p,\delta)$ la distance euclidienne de p à δ. Puisque P et Δ sont des ensembles finis, la famille de réels $\{d(p,\delta)\}$ est aussi finie. Si tous les points de P ne sont pas alignés, cet ensemble possède un plus petit élément strictement positif $d(p_0,\delta_0) = d_{\min} > 0$. Alors la droite δ_0 est ordinaire !

On note q le projeté orthogonal de p_0 sur δ_0. Si δ_0 contient trois points p_1, p_2, p_3 de P, deux parmi ces trois points sont situés du même côté par rapport à q, on les note p_1 et p_2 (p_1 est entre q et p_2, on n'exclut pas la

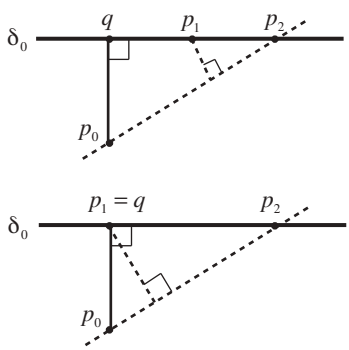

Figure 4. La démonstration de Kelly : la distance minimale entre point de P et droite de Δ est réalisée avec une droite δ_0 ordinaire.

possibilité $q = p_1$), voir Figure 4.

La distance $d(p_1,(p_0p_2))$ est plus petite que la distance $d_{\min} = d(p_0,\delta_0)$.

On s'aperçoit dans les deux démonstrations qui précèdent que les positions relatives des points d'une droite jouent un rôle important. Voici une troisième solution qui ne repose que sur la relation d'ordre des points sur une droite.

1.3. La solution de Steinberg (la relation d'ordre)

La solution initiale de Steinberg utilise l'ordre cyclique des points d'une droite projective : cette solution permet de ramener à trois le nombre de configurations possibles. Si on se replace dans le plan affine, il y a six configurations que nous proposons ici.

Steinberg choisit un point p de P et suppose qu'aucune droite de Δ passant par p n'est ordinaire. Puis il choisit une droite l passant par p n'appartenant pas à Δ et regarde les points d'intersection de l avec les droites de Δ. Il repère les différents points d'intersection x_0, x_1, …, x_{k-1} avec les droites de Δ, en partant de $x_0 = p$ et en faisant en sorte qu'aucun des autres points x_2, x_3, …, x_{k-1}, n'appartienne au segment $[x_0x_1]$.

Soit δ une droite de Δ passant par x_1 : δ doit être ordinaire !

En effet si δ contient trois points de P au moins, on les note p_1, p_2, p_3 en faisant en sorte que p_2 appartienne au segment $[p_1x_1]$ et que p_3 n'appartienne pas à ce segment $[p_1x_1]$, ce qui est toujours possible puisque sur cette droite δ il y a forcément au moins deux points qui sont situés du même côté par rapport à x_1.

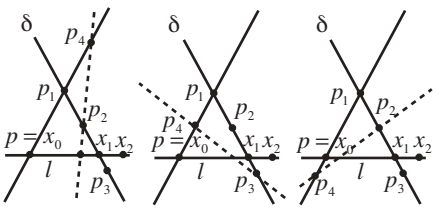

Figure 5. Cas où x_1 appartient au segment $[p_2p_3]$

Cela correspond à deux configurations possibles : soit x_1 appartient au segment $[p_2p_3]$, soit p_1 appartient au segment $[p_2p_3]$ (voir Figures 5 et 6).

La droite (pp_1) qui appartient à Δ n'est pas ordinaire (par hypothèse) et contient un troisième point p_4 de P : l'une des droites (p_2p_4) ou (p_3p_4) qui appartient à Δ, coupe nécessairement le segment $[x_0x_1]$, voir les six configurations possibles des figures 5 et 6, – ce qui est impossible d'après les hypothèses sur le principe de la numérotation des points x_0, x_1, …, x_{k-1}.

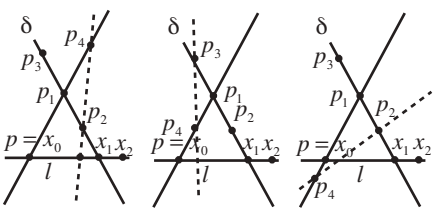

Figure 6. Cas où p_1 appartient au segment $[p_2p_3]$

2. Dualité projective. Le problème de Sylvester dual

Avant d'aller plus loin, nous faisons quelques rappels sur la notion de dualité projective. La dualité permet de passer par un jeu de coordonnées homogènes du plan

projectif[3] $\mathbb{P}^2$ au plan projectif dual $(\mathbb{P}^2)^*$:

• la droite l du plan projectif $\mathbb{P}^2$ d'équation $ax + by + cz = 0$ correspond au point l^* de coordonnées $(a : b : c)$ dans $(\mathbb{P}^2)^*$,

• le point p du plan projectif $\mathbb{P}^2$ de coordonnées $(x : y : z)$ correspond à la droite Δ' d'équation $ax + by + cz = 0$ dans $(\mathbb{P}^2)^*$.

Toute assertion concernant une configuration de points et de droites de $\mathbb{P}^2$ qui n'utilise que des relations d'incidence entre les droites et les points correspond à une assertion duale entre des points et des droites de $(\mathbb{P}^2)^*$ et réciproquement.

Juste un exemple : l'assertion « les droites d_1, d_2 et d_3 de $\mathbb{P}^2$ se coupent en un point p » devient « les points d_1^*, d_2^* et d_3^* de $(\mathbb{P}^2)^*$ sont situés sur la droite p^* ».

Ce principe de dualité permet de démontrer une assertion dans $\mathbb{P}^2$ en démontrant l'assertion duale dans $(\mathbb{P}^2)^*$.[4]

D'après ce principe, *il suffit de résoudre le problème de Sylvester dual pour que le problème de Sylvester original soit automatiquement résolu, et vice versa*.

2.1. Une solution du problème dual (l'aire minimale).

Désormais

• Δ' désignera une famille finie de droites du plan.

• P' désignera l'ensemble des points d'intersection de droites de Δ'.

• Un point ordinaire sera un point de P' par lequel ne passent que deux droites de Δ'.

La solution du problème dual B* repose sur la propriété classique d'un triangle inscrit dans un autre (voir l'annexe 1 pour la démonstration) :

(*) *Soit* ABC *un triangle quelconque, et soient* A_1, B_1, C_1 *trois points choisis d'une façon arbitraire sur les côtés respectifs* [BC], [AC] *et* [AB] *(voir Figure 7).*
Alors l'aire α_0 *du triangle* $A_1B_1C_1$ *inscrit est supérieure ou égale au minimum des aires* α_1, α_2, α_3 *des trois triangles respectifs* AB_1C_1, BC_1A_1 *et* CA_1B_1. *De plus, il n'y a égalité que lorsque* A_1, B_1, C_1 *sont les milieux* A_0, B_0, C_0 *des côtés respectifs*

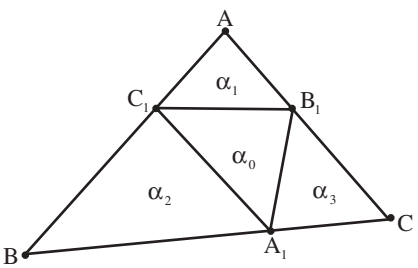

Figure 7. $\alpha_0 \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

(3) Nous utilisons les notations $\mathbb{A}^n$ (resp. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$) pour l'espace affine réel (resp. complexe) de dimension n, $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$) pour l'espace projectif réel (resp. complexe) de dimension n, et la notation $(x : y : z)$ pour les coordonnées homogènes d'un point du plan projectif : $(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ si $\lambda \neq 0$.

(4) Un exemple classique : les théorèmes de Pascal et de Brianchon sont deux à deux duaux. Pascal a découvert son théorème concernant un hexagone inscrit dans une conique à l'age de 16 ans. Le théorème dual a été trouvé par Brianchon 150 ans plus tard !

[BC], [AC] *et* [AB] *du triangle* ABC. *Dans ce cas on* $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.[5]

Une solution du problème dual[6] $\mathbb{B}^*$ consiste à rechercher un triangle d'aire minimale.

Si on suppose que les droites de Δ' ne sont pas toutes concourantes ou parallèles, on peut trouver trois droites δ'_1, δ'_2, δ'_3 qui forment un triangle.

En effet s'il y a deux points distincts p'_1, p'_2 de P′ qui ne sont pas ordinaires, donc par lesquels passent au moins deux droites de Δ' en plus de la droite ($p'_1p'_2$) de Δ' qui les joints, alors l'une des droites passant par p'_1 de Δ' au moins, n'est pas parallèle à l'une des droites de Δ' passant par p'_2, il y a au moins un troisième point d'intersection de Δ' donc au moins un triangle.

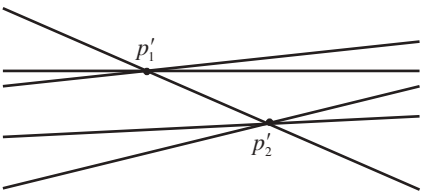

Figure 8. Avec ces cinq droites, il y a au moins un triangle.

Parmi les triangles construits à partir de droites de Δ', en nombre fini, on recherche un triangle $A_1B_1C_1$ d'aire non nulle minimale.

D'après l'hypothèse du problème B*, par chacun des sommets A_1, B_1, C_1 de ce triangle passe une droite de Δ', notée resp. δ'_A, δ'_B ou δ'_C, autre que (A_1B_1), (B_1C_1) ou (C_1A_1) : ces droites sont situées toutes les trois à l'extérieur du triangle $A_1B_1C_1$ sinon $A_1B_1C_1$ n'est pas un triangle d'aire minimale (voir la figure 9).

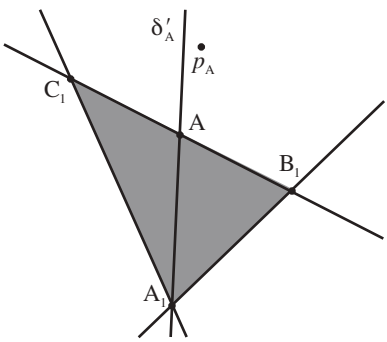

Figure 9. Ici δ'_A partage $A_1B_1C_1$ en deux triangles A_1AB_1 et A_1AC_1 d'aires inférieures à l'aire minimale…

À leur tour, δ'_A, δ'_B ou δ'_C déterminent un triangle ABC, dans lequel le triangle $A_1B_1C_1$ est inscrit.

Les trois triangles voisins du triangle

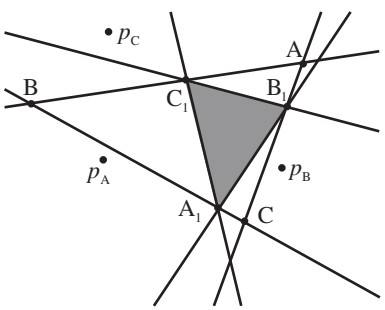

Figure 10. D'après le théorème (*), l'un des triangles AB_1C_1, A_1BC_1 ou A_1B_1C au moins a une aire inférieure à celle du triangle inscrit $A_1B_1C_1$.

(5) Diananda (voir [4]) a démontré une inégalité plus forte : $\alpha_0 \geq \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$, avec le même cas d'égalité.

(6) Il est difficile de tracer l'historique de cette solution. Apparemment, dans les années 80, Elkies la connaissait. D'autres auteurs aussi.

$A_1B_1C_1$ ainsi déterminés, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, construits à partir de droites de Δ' doivent avoir une aire au moins égale à celle du triangle $A_1B_1C_1$ (voir la figure 10) :

Mais comme il ne peut pas y avoir pour l'un des triangles une aire strictement inférieure à celle du triangle ABC, toujours d'après le théorème (*), les quatre triangles ont la même aire et les points A_1, B_1, C_1 sont les milieux des côtés $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$ et $[A_1B_1]$.

Cela implique des relations de parallélisme $(B_1C_1) \parallel (BC)$, $(C_1A_1) \parallel (CA)$ et $(A_1B_1) \parallel (AB)$.

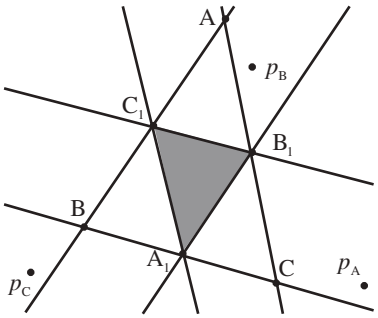

Figure 11. Les triangles AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C et $A_1B_1C_1$ ont même aire.

On peut remarquer alors que dans la dernière configuration, les triangles AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C d'aire minimale seront inscrits à leur tour dans des triangles définis à l'aide de droites de Δ' : chacun aura des triangles voisins d'aire toujours égale à l'aire minimale, et par propagation, la famille des triangles va devenir infinie ainsi que le nombre d'éléments de Δ'. Cela contredit l'hypothèse d'un nombre fini de droites de Δ' du problème A*.

On peut écrire un théorème :
Si Δ' est une famille de droites du plan affine finie ou infinie, telle que :
• *par tout point d'intersection de deux droites de Δ' passe une autre droite de Δ' au moins,*
• *parmi les triangles d'aire non nulle définis à l'aide de trois droites de Δ', il y en a un d'aire minimale,*
alors les droites de Δ' définissent un pavage triangulaire du plan (figure 12).

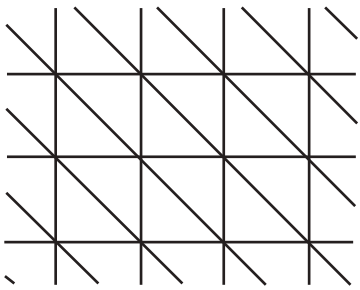
Figure 12. Un pavage triangulaire.

2.2. La solution de Melchior-Steenrod (la formule d'Euler-Poincaré).

Voir l'article publié par Quadrature [2].(7)

3. Épilogue : quelques généralisations

Une vaste littérature est consacrée aux diverses précisions et généralisations du problème de Sylvester, voir les résumés [1]. Cela concerne en particulier les estimations, en fonction de n, du nombre minimal de droites ordinaires pour toute configuration de n points non alignés du plan.

Certains ont ajouté des couleurs aux points (par exemple, dans une configuration de points bicolore, on a démontré qu'il y avait toujours une droite passant par des points

(7) Steenrod en 1943 a repris, sans le savoir, une idée déjà développée en 1940 par Melchior sur un autre sujet.

de même couleur).
Il existe des généralisations du problème de Sylvester pour des configurations de cercles ainsi que d'autres courbes planes, généralisations pluri-dimensionnelles, généralisations où les points sont remplacés par des ensembles, etc.

3.1. Encore quelques problèmes

Voici quelques exercices proches du problème de Sylvester ; 1 et 2 sont proposés par Erdös [3], et 3 et 4 par Hadwiger et Debrunner [4]. Essayez de trouver des solutions !

1. *L'assertion A est-elle vraie pour toute famille finie de points non alignés dans l'espace ?*

2. *Montrer que, pour toute famille* P *de n points non-alignés, il existe n droites différentes, au moins, passant par des couples de points de* P. *Le nombre de toutes ces droites est précisément n si et seulement si* $n - 1$ *des points de* P *au moins sont alignés.*

Une solution de ce problème posé par Erdös a été donnée par Pierre Samuel dans un bulletin de l'APMEP [6, Problème 123].

3. *Soit* P *une famille finie de points non alignés du plan affine telle que tout cercle passant par trois points de* P *passe aussi par un quatrième point de* P, *au moins. Alors tous les points de* P *appartiennent au même cercle.*

4. *Si une partie bornée* P *du plan affine est symétrique par rapport à toute médiatrice d'un couple de points de* P, *alors* P *est contenue dans un cercle.*

4. Annexes

4.1. Annexe 1 : Triangle inscrit dans un autre triangle.

Nous donnons ici deux preuves, une algébrique et l'autre géométrique, de la propriété (*) ci-dessus concernant l'aire d'un triangle inscrit dans un autre.

Première solution : L'assertion est évidemment vraie dès que deux parmi les points A, B, C se trouvent du même côté de la droite correspondante (A_0B_0), (A_0C_0) ou (B_0C_0), où A_0 est le milieu de [BC], B_0 est le milieu de [AC] et C_0 est le milieu de [AB], voir la figure 13.

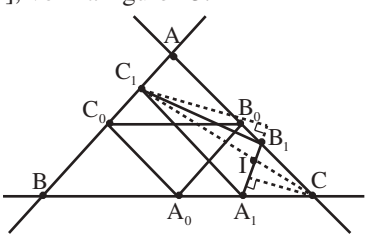

Figure 13. Type de situation immédiate : $\text{Aire}(A_1B_1C) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_1)$ car C est plus proche de I, donc de (A_1B_1) que C_1. Ici I est le point d'intersection de (A_1B_1) et (C_1C).

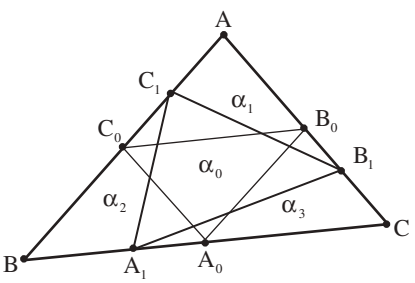

Figure 14. Les aires α_0, α_1, α_2, α_3 des triangles définis par le triangle $A_1B_1C_1$ inscrit dans le triangle ABC.

Si ceci n'est pas le cas, quitte à changer l'orientation, on peut considérer que C_1 appartient au segment $[AC_0]$, B_1 appartient à $[CB_0]$ et A_1 appartient à $[BA_0]$ (figure 14).
Alors on a :

$$0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2},$$

où

$$x = \frac{|AC_1|}{|AB|}, \; y = \frac{|BA_1|}{|BC|}, \; z = \frac{|CB_1|}{|CA|}.$$

Notons α l'aire du triangle ABC, α_0 l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ et α_1, resp. α_2, α_3 l'aire du triangle AB_1C_1, resp. BA_1C_1, CA_1B_1. Puisque

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}|AB_1||AC_1|\sin\widehat{A}}{\frac{1}{2}|AB||AC|\sin\widehat{A}} = x(1-z),$$

et de même

$$\frac{\alpha_2}{\alpha} = y(1-x), \frac{\alpha_3}{\alpha} = z(1-y),$$

alors le rapport $f(x,y,z) = \dfrac{\alpha_0}{\alpha}$ s'exprime par :

$$f(x,y,z) = 1 - x - y - z + xy + xz + yz.^{(8)}$$

On remplace maintenant x, y, z par $x' = \dfrac{1}{2} - x$, $y' = \dfrac{1}{2} - y$ et $x, y, z \leq \dfrac{1}{2}$. Parce que x, y, $z \leq 1/2$, on a x', y', $z' \geq 0$. La fonction

$$f(x,y,z) = g(x',y',z') = \frac{1}{4} + x'y' + x'z' + y'z'$$

atteint son minimum égal à 1/4 à l'origine $x' = y' = z' = 0$ et nulle part ailleurs. Ainsi le minimum de la fonction f est égal à 1/4. Donc la moyenne des aires α_1, α_2, α_3 est inférieure ou égale à $\alpha/4$ et l'égalité n'est possible que si $x' = y' = z' = 0$, donc $x = y = z = 1/2$, ce qui revient à $A_1 = A_0$, $B_1 = B_0$, $C_1 = C_0$, d'où l'assertion.

(8) Au lieu d'utiliser les mesures d'angles (qui exigent l'emploi d'une structure euclidienne), on peut employer la structure affine en remarquant que le rapport d'aires $\dfrac{\alpha_0}{\alpha}$ (qui est un invariant affine) est le déterminant 3×3 des coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1 dans le repère affine A, B, C :

$$\begin{vmatrix} 0 & y & 1-y \\ 1-z & 0 & z \\ x & 1-x & 0 \end{vmatrix} = 1 - x - y - z + xy + xz + yz.$$

Deuxième solution : On passe du triangle inscrit $A_0B_0C_0$ au triangle inscrit $A_1B_1C_1$ en trois étapes, en prenant A_1 sur $[BA_0]$, B_1 sur $[CB_0]$, et C_1 sur $[AC_0]$, en augmentant chaque fois l'aire (il suffit de bien regarder les hauteurs qui correspondent à une base commune) :

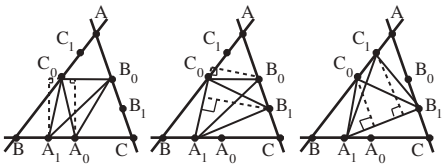

Figure 15. La situation : $\text{Aire}(A_0B_0C_0) = \text{Aire}(A_1B_0C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_1)$.

$$\text{Aire}(A_0B_0C_0) = \frac{1}{4}\text{Aire}(ABC)$$
$$\leq \text{Aire}(A_1B_0C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_1)$$

(voir Figure 15).

L'inégalité qui en résulte est stricte dès qu'un de points A_1, B_1, C_1 au moins est distinct du milieu A_0,B_0,C_0 du côté correspondant.

4.2. Annexe 2 : Le problème de Sylvester dans le plan complexe.

Comme contre-exemple dans le plan complexe, on peut utiliser les 9 points d'inflexion d'une cubique non dégénérée. Par exemple celle d'équation

$$x^3 + (x-1)^3 + y^3 = 0.$$

Les 9 flexes de cette cubique sont les points :

$$p_1(0,1),\ p_1'\left(0, e^{2i\frac{\pi}{3}}\right),\ p_1''\left(0, e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right),$$
$$p_2\left(\frac{1}{2},0\right),\ p_2'\left(e^{i\frac{\pi}{3}},0\right),\ p_2''\left(e^{-i\frac{\pi}{3}},0\right),$$
$$p_3(1,-1),\ p_3'\left(1, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right),\ p_3''\left(1, e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

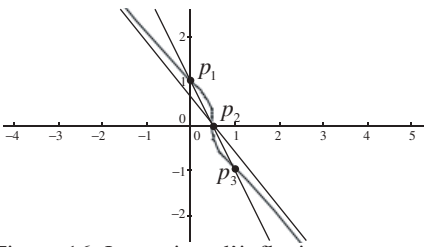

Figure 16. Les points d'inflexion p_1, p_2, p_3 de la partie réelle de la cubique d' équation $x^3 + (x-1)^3 + y^3 = 0$.

(voir Figure 16). Ces 9 points sont alignés 3 par 3, voici les 12 droites définies par ces 9 points :

$$(p_1p_1'p_1''): x = 0, \qquad (p_1'p_2p_3'): 2x + e^{-2i\frac{\pi}{3}}y = 1,$$
$$(p_2p_2'p_2''): y = 0, \qquad (p_1'p_2'p_3): e^{-i\frac{\pi}{3}}x + e^{-2i\frac{\pi}{3}}y = 1,$$
$$(p_3p_3'p_3''): x = 1, \qquad (p_1'p_2''p_3''): e^{i\frac{\pi}{3}}x + e^{-2i\frac{\pi}{3}}y = 1,$$
$$(p_1p_2p_3): 2x + y = 1, \qquad (p_1''p_2p_3''): 2x + e^{2i\frac{\pi}{3}}y = 1,$$
$$(p_1p_2'p_3''): e^{-i\frac{\pi}{3}}x + y = 1, \qquad (p_1''p_2'p_3): e^{-i\frac{\pi}{3}}x + e^{-2i\frac{\pi}{3}}y = 1,$$
$$(p_1p_2''p_3'): e^{i\frac{\pi}{3}}x + y = 1, \qquad (p_1''p_2''p_3): e^{i\frac{\pi}{3}}x + e^{2i\frac{\pi}{3}}y = 1.$$

4.3. Annexe 3 : Quelques différences entre le plan réel et le plan complexe

L'existence d'un contre-exemple complexe prouve qu'une solution du problème de Sylvester A ou du problème dual A*, repose sur d'autres propriétés que les seules propriétés d'incidence : ces propriétés sont spécifiques au plan réel, elles n'existent plus dans le plan complexe.

On rappelle tout d'abord que le corps $\mathbb{R}$ est ordonné tandis que $\mathbb{C}$ ne l'est pas, les points d'une droite complexe sont alignés mais pas ordonnés, ce qui est une première différence fondamentale. Il y en a d'autres que nous allons détailler plus loin.

4.3.1. Différence topologique

Une droite affine partage le plan affine réel en deux régions disjointes, tandis qu'une droite complexe ne partage pas le plan complexe $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, en deux régions. On peut interpréter cela en raisonnant sur les dimensions : une droite complexe est un $\mathbb{R}$-sous-espace de dimension 2 dans le plan complexe qui est un $\mathbb{R}$-espace de dimension 4, il faut un $\mathbb{R}$-sous-espace de dimension 3 pour partager le plan complexe.

On peut aussi voir cela à l'aide de la fonction affine

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto ax + by + c,$$

où $(a,b) \neq (0,0)$. Cette fonction change de signe en s'annulant lorsqu'on traverse la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Par conséquent cette dernière droite partage le plan $\mathbb{R}^2$ en deux demi-plans.

En revanche, si l'on raisonne avec une fonction $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, il n'y a plus de signe et le passage par 0 n'est plus une obligation pour trouver un chemin allant d'un point (x_1,y_1) à un autre (x_2,y_2) tel que

$$ax_1 + by_1 + c = -ax_2 - by_2 - c.$$

Un exemple simple, avec la fonction exponentielle : on a à la fois pour tout z complexe,

$$e^z \neq 0 \text{ et } e^{i(z+\pi)} = -e^{iz}.$$

Par suite, une formule analogue à celle d'Euler-Poincaré liant le nombre de droites, le nombre de points d'intersection des droites et de régions du plan limités par ces droites, n'existe pas dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

4.3.2. Alignement dans le sens complexe

La notion de distance entre les points existe bien dans le plan complexe $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, mais l'égalité

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$$

caractérise l'alignement des points A, B, C sur une droite réelle, pas sur une droite complexe.

Reprenons les trois points de l'exemple ci-dessus :

$$p_1(0,1),\ p_1'\left(0,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right),\ p_1''\left(0,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right),$$

qui sont alignés sur la droite d'équation $x = 0$.
On peut calculer les trois distances :

$$p_1p_1' = \left|1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3},$$

$$p_1p_1'' = \left|1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3},$$

$$p_1'p_1'' = \left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3}.$$

On voit que trois points du plan complexe $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ peuvent être équidistants et alignés c'est-à-dire, situés sur la même droite complexe.

4.3.3. Angle dans le plan complexe

La notion d'angle peut être envisagée.
Aura-t-on un angle nul (ou un angle plat) entre deux vecteurs colinéaires du plan complexe ?.
A priori, les vecteurs unitaires d'une droite vectorielle complexe forment un cercle unité, ils sont colinéaires par hypothèse. Doit-on décider que l'angle entre deux vecteurs colinéaires du plan complexe est l'angle nul ou le même que celui entre deux vecteurs du plan réel (une droite vectorielle du plan complexe est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2) ?

Pour voir les choses autrement, on sait que la notion d'angle dans le plan euclidien réel est liée à la notion de rotation dans ce plan : la matrice de la rotation ϕ, telle que l'image du vecteur unitaire u est le vecteur unitaire $v = \phi(\mathrm{u})$ (dans une base orthonormée), est une matrice spéciale orthogonale de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

L'angle α associé à cette matrice ou cette rotation est l'angle du couple de vecteurs unitaires (u,v).

Soit maintenant (u,v) un couple de vecteurs unitaires dans le plan affine complexe $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ muni du produit scalaire hermitien. Alors la matrice de « l'isométrie positive » ϕ telle que l'image du vecteur u est le vecteur $v = \phi(\mathrm{u})$ (dans une base orthonormée) est une matrice spéciale unitaire de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ici a, b sont des nombres complexes tels que

$$a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

En posant

$$|a| = \cos\alpha, \quad |b| = \sin\alpha,$$

avec $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, cette matrice s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1}\cos\alpha & -e^{-i\theta_2}\sin\alpha \\ e^{i\theta_2}\sin\alpha & e^{-i\theta_1}\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Cette écriture fait apparaître trois angles,

$$\alpha, \quad \theta_1 = \arg(a), \quad \theta_2 = \arg(b).$$

Pour définir l'angle formé par droites droites du plan vectoriel complexe, on peut utiliser toute une classe d'isométries telles que l'image de la première droite soit la deuxième : on choisit un vecteur unitaire de la première droite, son image est l'un des vecteurs unitaires de la deuxième.
Ce qui revient à dire qu'un « angle » de deux droites complexes est défini à l'aide de deux angles réels ; l'un des trois angles, l'angle du couple de vecteurs (u,v) précédemment défini, disparaît. Si par exemple $u = (1,0)$ est le premier vecteur de la base alors $v = (a,b)$. Quitte à remplacer v par le vecteur unitaire colinéaire $e^{-i\theta_1} v$, on peut supposer que

$$\theta_1 = \arg(a) = 0.$$

On peut aussi relier la notion d'angle entre deux vecteurs unitaires u et v à celle de l'aire du triangle Δ défini par ces vecteurs, cette aire étant

$$\text{Aire}(\Delta) = \frac{1}{2}\sin\left(\widehat{u,v}\right).$$

Pour le calcul d'aire, on vous invite à passer à la section suivante.

On remarque, en conclusion, que, dans tous les cas, on perd l'additivité des angles, comme lorsqu'on mesure des angles de dièdres dans l'espace vectoriel $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$.

4.3.4. Aire dans le plan complexe

La notion d'aire est une notion réelle, il est difficile de lui donner un sens complexe.

On peut naturellement faire comme si le plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ était l'espace $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$. On sait alors, grâce aux « cas d'égalités des triangles », que l'aire d'un triangle Δ ne dépend que des longueurs a, b, c des trois côtés de Δ. D'après la formule de Héron d'Alexandrie, valable dans tout espace euclidien (qui découle du théorème d'Al-Kashi), on a :

$$\text{Aire}(\Delta) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ est le demi-périmètre de Δ.

Partant des coordonnées de trois points (x_A,y_A), (x_B,y_B) (x_C,y_C) dans un repère orthonormé du plan réel $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, une autre méthode de calcul de l'aire du triangle consiste a utiliser la valeur absolue d'un produit vectoriel $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$ où

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}.$$

Cette formule a encore un sens pour des coordonnées complexes, en remplaçant la valeur absolue par un module. Elle caractérise les triangles plats, dont les trois sommets sont alignés, par une aire nulle.
Cela revient à dire que l'aire du triangle Δ défini par les vecteurs u et u' appartenant à $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, tels que $u = (z_1,z_2)$ et $u' = (z'_1,z'_2)$ est

$$\text{Aire}(\Delta) = \frac{1}{2}\left|\det \begin{pmatrix} z_1 & z'_1 \\ z_2 & z'_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Cette formule a un avantage : elle définit une aire invariante par une isométrie vectorielle, c'est-à-dire par un endomorphisme unitaire du plan complexe muni du produit scalaire hermitien. En effet,
lorsqu'on remplace le couple (u,u') par son image $(v,v') = (\phi(u),\phi(u'))$ par l'endomorphisme ϕ, on trouve par cette formule la même aire pour les triangles isométriques définis par (u,u') et (v,v'), parce que le déterminant de ϕ a pour module 1.

Certains géomètres définissent l'aire de ce triangle Δ à partir d'une 2-forme de Kähler[9]

$$\text{Aire}(\Delta) = \frac{1}{2}\left|\text{Im}\left(z_1\overline{z'_1} + z_2\overline{z'_2}\right)\right|.$$

On peut remplacer les vecteurs $u = (z_1,z_2)$ et $u' = (z'_1,z'_2)$ de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ par leurs images

$$v = \left(az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2\right),$$
$$v' = \left(az'_1 - \bar{b}z'_2, bz'_1 + \bar{a}z'_2\right)$$

par l'endomorphisme de matrice spéciale unitaire

(9) Nous remercions Sylvestre Gallot qui nous a signalé l'importance de cette définition. Nous remercions également Bernard Genevès pour son aide dans la rédaction de ce paragraphe.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Ici a, b sont des nombres complexes tels que

$$a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} &\left(az_1 - \overline{b}z_2\right)\overline{\left(az_1' - \overline{b}z_2'\right)} + \left(bz_1 + \overline{a}z_2\right)\overline{\left(bz_1' + \overline{a}z_2'\right)} \\ &= \left(a\overline{a} + b\overline{b}\right)z_1\overline{z_1'} + 0z_1\overline{z_2'} + 0\overline{z_1'}z_2 + \left(b\overline{b} + a\overline{a}\right)z_2\overline{z_2'} \\ &= z_1\overline{z_1'} + z_2\overline{z_2'}. \end{aligned}$$

De même si on utilise une transformation unitaire de matrice

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\overline{z_1'} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} z_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\overline{z_2'} = z_1\overline{z_1'} + z_2\overline{z_2'},$$

ce qui implique la conservation des aires par n'importe quelle transformation unitaire du plan complexe.

Quelques applications de cette formule pour des calculs d'aires de triangles définis par les vecteurs u et u' :

** Si $u' = ku$, k réel, alors $k z_1\overline{z_1'} + k z_2\overline{z_2'}$ est un réel et l'aire est nulle, les trois points du triangle sont alignés au sens réel.*

** Si $u' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u$, les vecteurs u et u' sont colinéaires, donc les trois points du triangle sont alignés au sens complexe, l'aire vaut*

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}\right)\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\sin\theta\right|\|u\|^2.$$

C'est donc l'aire d'un triangle isocèle dont, les côtés de même longueur mesurent $\|u\|$ et sont séparés par un angle de mesure θ. C'est la mesure qu'on obtiendrait par la première méthode avec la formule de Héron.

** Si on prend $u = (1,1)$ et $u' = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$ alors*

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) = 0.$$

On obtient donc une aire nulle alors que les vecteurs u et u' sont non colinéaires dès que $\alpha \neq k\pi$, k entier.

Dans tous les cas, si les points B, C, D sont alignés, ces formules ne donneront aucune relation entre les aires des triangles ABC, ACD, ABD, comme lorsqu'on mesure les aires des faces des polyèdres dans l'espace euclidien réel $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$.

On rencontre également des obstacles similaires dès que l'on passe à un corps fini.

Références

[1] P. Borwein, W. O. J. Moser, « A survey of Sylvester's problem and its generalizations.» *Aequationes Math.* 40 (1990) 111-135.

[2] L. Bouttier, M. Zaidenberg, « Le problème de Sylvester », *Quadrature* 67 (2008) 8-20.

[3] P. Erdös, « Problem 4 065 », *Am. Math. Mon.* 50 (1943) 65.

[4] H. Hadwiger, H. Debrunner, *Combinatorial geometry in the plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1964.

[5] J.J. Sylvester, « Mathematical Question 11 85l », Educational Times 59 (1893) 98.

[6] Volume II des 200 premiers problèmes de l'APMEP, Géométrie, 74-77, Brochure 93, 1994.