

La comparaison des nombres décimaux

Comprendre les difficultés, aider à les surmonter

Éric Roditi(*)

Les nombres décimaux sont indispensables au citoyen pour estimer la valeur d'un bien ou d'une mesure, sauf celle du temps qui fait encore exception... Les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux ont produit des connaissances sur les représentations et les procédures des élèves (BROUSSEAU, DOUADY, PERRIN-GLORIAN, GRISVARD & LÉONARD), des ingénieries d'enseignement (BROUSSEAU, DOUADY & PERRIN-GLORIAN) et des descriptions des pratiques enseignantes (BOLON, RODITI). Dans le programme d'étude français, l'enseignement des décimaux a évolué, il n'est pas postérieur à celui des fractions, il n'en est pas non plus indépendant. Néanmoins, les difficultés d'apprentissage persistantes des élèves de 11 ans montrées par les évaluations nationales nous ont conduit à nous interroger sur l'intervention en classe, non plus sur de nouvelles situations à proposer, mais sur des modalités d'aides qui pourraient être apportées aux élèves.

Cette interrogation a donné lieu à une recherche en didactique des mathématiques. Nous en présentons les résultats obtenus et les conséquences que nous envisageons pour la formation et pour l'enseignement.

1. Références théoriques, Problématique et méthodologie

La théorie des champs conceptuels de VERGNAUD, très utilisée en didactique des mathématiques, définit un concept par les situations qui lui donnent du sens (la référence), les invariants sur lesquels repose l'efficacité des schèmes (le signifié), et les formes langagières et non langagières qui lui sont associées (le signifiant). Selon cette théorie, pour tout sujet, les nombres réfèrent aux situations qu'il a rencontrées. Les travaux spécifiques sur l'apprentissage des nombres naturels montrent l'importance de distinguer les aspects sémantiques (valeur des nombres, exacte ou approchée) et syntaxiques (écriture des nombres). Dans la continuité de ces résultats, nous admettons que l'aspect sémantique des nombres décimaux porte à la fois *sur la valeur exacte du nombre et sur ses approximations*.

Ainsi, nous admettons que connaître un nombre décimal, c'est connaître non seulement sa valeur avec ses différentes représentations (orale, iconique, décimale), mais aussi le situer par rapport aux autres, y compris dans des situations où le nombre est une mesure. Trois questions se posent : 1) Quelles sont les procédures mises en œuvre dans la comparaison des nombres décimaux ? 2) Quelles sont les relations entre la capacité à comparer les nombres décimaux et la capacité à les représenter (monnaie, règle graduée, ...) ? 3) Comment évoluent les difficultés avec

(*) eric.roditi@free.fr

l'âge ? Nous faisons l'hypothèse que les élèves en difficulté pour comparer des nombres décimaux privilégient l'aspect syntaxique lié à leur représentation décimale (écriture) et qu'ils peinent à les situer les uns par rapport aux autres, par leur valeur approximative ou par la mesure qu'ils expriment dans une situation.

La méthodologie mise en œuvre repose sur des questionnaires et des entretiens individuels. Un premier questionnaire informatisé et chronométré a été soumis à 40 adultes devant comparer un nombre décimal variable au nombre fixe 0,56. Les temps de réponses ont été interprétés pour rendre compte des procédures mises en œuvre dans cette activité.

Un second questionnaire a été proposé à 400 élèves âgés de 10 à 25 ans. Il porte sur des activités de comparaison de nombres décimaux, dans des contextes de mesure ou en dehors. Il propose aussi des tâches de représentation des nombres décimaux avec de la monnaie ou sur un graphique. Les analyses croisées des questions ont permis d'interpréter les difficultés des élèves et de suivre leur évolution avec l'âge.

Des entretiens individuels ont été menés avec les élèves dont les résultats au questionnaire précédent étaient inférieurs à la moyenne, avec une différence supérieure à deux écarts-types. Ces élèves devaient comparer des nombres décimaux et confronter leurs procédures, d'une part à des représentations des nombres décimaux à comparer qu'ils devaient produire, et d'autre part à des raisonnements corrects ou erronés qui leur étaient soumis. Un pré-test et un post-test ont été réalisés pour évaluer l'effet de ces entretiens.

2. Analyse des réponses aux questionnaires

Analysons les résultats des deux questionnaires, celui proposé aux adultes pour mieux comprendre l'activité de celui qui compare deux décimaux et celui proposé aux élèves pour identifier les difficultés d'apprentissage.

Le rôle de la perception approximative dans la comparaison des nombres

Des travaux menés en psychologie, rappelés par FAYOL dans son livre *L'enfant et le nombre*, ont montré que lorsqu'un contenu est organisé linéairement par une relation d'ordre (ordre des nombres, des lettres ou des événements), toute tâche de jugement portant sur l'ordre de deux éléments de ce contenu fait apparaître un effet dit de « distance symbolique ». HINRICHS, YURKO et HU ont mesuré le temps de réaction et les erreurs commises dans une tâche de comparaison de nombres variables au nombre fixe 55. Ils obtiennent des résultats montrant qu'il faut, par exemple, plus de temps pour comparer 53 et 55 que pour comparer 82 et 55. L'activité d'un sujet ne se décrit donc pas par un algorithme selon lequel on commence par comparer les chiffres de dizaines puis, en cas d'égalité, on compare les chiffres des unités.

Le questionnaire informatisé que nous avons proposé à 40 adultes demandait de comparer un nombre décimal variable au nombre fixé 0,56. Il ne reposait pas seulement sur des comparaisons de nombres décimaux ayant deux décimales, si bien que les résultats obtenus sont plus complexes que ceux cités sur les entiers à deux chiffres. Il apparaît que le temps de réponse subit des variations autour d'une tendance générale liée à l'effet distance. Ces variations proviennent de différents facteurs

comme le nombre de chiffres des décimaux à comparer ou le nombre de leurs décimales. Il apparaît donc que, dans une activité de comparaison, un traitement sémantique est mis en œuvre simultanément à un traitement syntaxique qui permet la lecture des nombres.

Les difficultés d'apprentissage des élèves

Comme l'avaient observé COMITI et NEYRET, le second questionnaire confirme l'utilisation par certains élèves d'un traitement inadapté de l'écriture décimale conduisant par exemple à affirmer que 3,14 est supérieur à 3,5 au motif que 14 est supérieur à 5. Nous avons aussi retrouvé la règle implicite montrée par GRISVARD et LÉONARD : lorsque deux décimaux ont la même partie entière, le nombre le plus petit est celui dont la partie décimale comporte le plus de chiffres. Mais cette règle est appliquée par les jeunes élèves, aucun élève ne l'applique en lycée professionnel. Tout se passe comme si cette deuxième règle se construisait pendant l'enseignement, pour pallier les erreurs commises en utilisant la première, mais qu'elle disparaissait une fois quitté le collège.

D'autres types de résultats apparaissent. Les erreurs sont plus fréquentes lorsque la comparaison est demandée *en dehors de tout contexte où les nombres expriment des mesures*, ce qui tend à confirmer notre hypothèse sur les difficultés des élèves. La confrontation des résultats obtenus pour les comparaisons de nombres donnés par écrit avec ceux obtenus pour les comparaisons de nombres donnés oralement montre que la présentation orale accroît la difficulté de la comparaison. Les élèves qui savent représenter les nombres décimaux, par exemple sur une règle ou encore sur une droite numérique, réussissent beaucoup mieux les tâches de comparaison que les autres élèves, montrant ainsi l'importance de situer les nombres pour mieux les appréhender. Enfin, les élèves de 16-18 ans réussissent mieux que les jeunes, pourtant en choisissant les élèves âgés en lycée professionnel, nous avons plutôt eu affaire à des élèves qui étaient en difficulté en collège. La capacité à comparer des nombres décimaux évolue donc favorablement avec l'âge et l'utilisation de ces nombres dans des contextes variés. Cependant, il reste des élèves en difficulté parmi les plus âgés, une intervention apparaît donc indispensable.

En conclusion de cette étude, trois axes sont retenus pour concevoir un scénario d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux : proposer des situations écrites où les nombres décimaux peuvent être lus et pas seulement entendus ; favoriser un traitement sémantique des écritures numériques en demandant aux élèves d'exprimer les nombres par différents registres de représentation, et en leur demandant de donner une approximation des nombres utilisés ; faire expliciter et critiquer des procédures de comparaison.

3. Comment aider les élèves en difficulté ? Une expérimentation

Une enseignante associée à la recherche a expérimenté le dispositif d'aide avec onze élèves de collège : ceux dont les erreurs aux comparaisons de deux décimaux donnés à l'écrit étaient les plus massives.

La première séance commence par un court questionnaire de comparaisons de deux décimaux. Il s'agit pour l'enseignante de travailler avec l'élève à partir de ses

productions. Pour chaque réponse produite, l'enseignante engage l'élève à représenter les nombres comparés. Différents supports de représentation sont proposés : des pièces de monnaie (en lien avec les fractions décimales), des graduations, des carrés quadrillés comme ceux proposés dans le questionnaire. En outre, du papier blanc, une règle graduée et une paire de ciseaux sont mis à disposition des élèves pour conduire à la comparaison de longueurs. Afin de motiver la représentation des nombres et que l'élève l'utilise pour comparer, l'enseignante pose une question à l'élève, en fonction de sa réponse au questionnaire court du début de séance. Ces questions sont toutes prévues dans le scénario. Lorsque l'élève s'empare du matériel pour représenter les nombres à comparer, l'enseignante suggère de commencer par une approximation. Ainsi, par exemple, pour comparer 8,7 et 8,14, si l'élève choisit d'utiliser une graduation, l'enseignante incitera l'élève à dire si 8,7 est plus près de 8 ou de 9, de même pour 8,14. La réponse de l'élève n'est pas commentée : l'enseignante engage l'élève à poursuivre la représentation.

Voyons maintenant quelles sont les questions posées, c'est-à-dire comment l'enseignante motive la représentation des nombres décimaux et son utilisation pour les comparer. Poursuivons avec l'exemple de la comparaison de 8,7 et 8,14 ; l'élève devait entourer le plus grand des deux nombres. Si l'élève entoure le bon nombre, l'enseignante lui dit : « L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ? Comment pourrais-tu faire pour voir qui a raison avec le matériel qui est là ? » Si l'élève a entouré le mauvais nombre, l'enseignante cherche d'abord à faire expliciter la procédure de l'élève, puis l'amène à représenter les nombres et à utiliser ses représentations pour raisonner. Si l'élève n'arrive pas à bien expliciter sa démarche, l'enseignante lui suggère la règle implicite qu'il a probablement utilisée : « Un élève m'a expliqué que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ? » Lorsque l'élève reconnaît sa démarche, l'enseignante lui propose une procédure contradictoire : « Un autre élève comme toi avec qui je travaillais m'a dit que 7 dixièmes c'était pareil que 70 centièmes, et que 70 étant plus grand que 14, c'était 8,7 qui était plus grand que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ? Comment pourrais-tu faire, avec le matériel qui est là, pour voir qui a raison ? ».

Il ne s'agit donc pas de « refaire » le cours. À aucun moment elle ne rappelle les méthodes enseignées pour comparer deux décimaux, au contraire, elle les met en discussion en introduisant son propos par « L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que... ». Ainsi l'élève ne peut pas préjuger l'exactitude du raisonnement proposé.

Cette expérimentation montre l'efficacité d'un travail qui porte simultanément sur les représentations des nombres décimaux (monnaie, graduation, etc.), sur leur comparaison et sur la mise en relation de la justification et de la représentation. Le pourcentage d'erreurs du pré-test au post-test passe de 15% à 0,5% avec un écart significatif au seuil de 5%.

Conclusion

Cette recherche a montré que la procédure de comparaison des nombres décimaux ne repose pas seulement sur un traitement de l'écriture décimale, alors que l'enseignement propose souvent cette seule approche. Elle a montré aussi qu'une aide conduisant les élèves à mettre en relation la représentation décimale des nombres et différentes procédures pour, dans différentes situations, les situer entre eux ou appréhender leur distance, pourrait s'avérer efficace pour qu'ils surmontent leurs difficultés.

Ce type d'interventions permet d'échapper au modèle trop caricatural selon lequel le bon enseignant serait celui qui propose une bonne situation, et qui se tait pour laisser les élèves construire leurs connaissances par la seule réalisation des tâches proposées avec la situation. Modèle que l'enseignant peut tenir un moment, lorsque les élèves se confrontent avec le problème mathématique, modèle aussi dont l'enseignant doit pouvoir sortir avec une autre alternative que celle du cours magistral.

Bibliographie

- BOLON, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*. Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 5.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- COMITI, C. & NEYRET, R. (1979). À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N*, 18, 5-20.
- DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1986). *Liaison école-collège : Nombres décimaux*. Brochure n° 62. Paris : IREM de Paris 7.
- FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- GRISVARD, C. & LÉONARD, F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin vert APMEP*, 327, 47-60.
- HINRICHS, J.V., YURKO, D.S. & HU, J.M. (1981). Two-digit number comparison : Use of place information. *Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance*, 7 (4), 890-901.
- NEYRET, R. (1979). Décimaux. *Grand N*, 17, 5-20.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x*, 10, 5-29.
- RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques – Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.
- RODITI, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre. *Spirale*, (36), 37-52.
- RODITI E. (2007), La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n° 12, p. 55-81.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.