

Numération et calendrier en Sixième

Travail commun entre un professeur de collège et un de post-bac

Catherine Winisdoerffer et Jean Lefort(*)

Une grande partie de ce travail a été présenté par l'un d'entre nous (J.L.) dans un atelier des journées APMEP de Besançon. On en trouvera le détail sur http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Document_atelier_51_Lefort.pdf

Réflexions préalables par C.W.

La construction des connaissances requiert un temps très différent de celui nécessaire à l'exposé du corpus de savoirs visés : le temps de recherche et d'expérimentation, le temps des conjectures, des vérifications, des validations, le temps des échanges contradictoires, de la formulation explicite des procédures et de leur justification.

Dans le cadre du passage à l'an 2000, j'ai conduit dans une classe de Sixième une réflexion sur les calendriers et la façon d'écrire les dates, donc les nombres. Ce travail fut basé sur la pédagogie de l'apprentissage centrée sur l'activité commune de l'élève, du professeur et du référent scientifique en la personne de J.L.

Il s'est agi de faire produire par petits groupes de deux à quatre élèves la présentation d'un calendrier que chacun aura décidé d'étudier et/ou la présentation d'un système d'écriture des nombres. L'élève devient ainsi simultanément l'acteur de son apprentissage et l'auteur de sa nouvelle connaissance.

La démarche repose sur les trois piliers suivants :

- 1) L'aspect mathématique.
 - Le temps cyclique et les unités de mesure.
 - La notion d'intervalle.
 - Le concept de fraction.
 - Des algorithmes simples.
- 2) L'aspect interdisciplinaire.
 - La recherche documentaire.
 - L'aspect historique et le lien avec l'histoire des sciences.
 - L'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves.
 - L'emploi de différentes formes d'expressions autres que la langue usuelle (nombres, figures, tableaux, schémas dans différentes langues telles le russe, l'hébreux, l'arabe, ...) et usage, pour certains élèves, des moyens actuels de traitement de l'information et de la communication.

(*) Catherine Winisdoerffer [winiscat@yahoo.fr] ;
Jean Lefort [jlefort.apmep@wanadoo.fr]

3) Le bonheur d'apprendre.

Tous les lundis, pendant une année, les élèves de sixième ont abordé une partie de leur programme de mathématiques sous un autre angle et un fil conducteur fort.

Ce bonheur d'apprendre a pu prendre des formes multiples :

- Exercer son intelligence dans une activité qui satisfait la curiosité, qui permet de s'affirmer par la victoire sur la difficulté, qui apporte une information ou une solution sur des questions d'enfance restées jusqu'alors sans réponse.
- Apprendre en s'amusant lorsque la séquence pédagogique revêt un aspect ludique.
- Créer en s'exprimant et se positionnant vis à vis de ses camarades.
- Coopérer à une création collective.

Le rôle du référent scientifique par J.L.

Quand Catherine Winisdoerffer m'a contacté par l'intermédiaire d'un ami commun pour intervenir dans sa classe de sixième, j'ai tout de suite relevé le défi. Enseignant en poste-bac mais ayant une expérience de soutien scolaire auprès des dix-douze ans au sein d'une association, j'ai pensé être capable de ne pas trop passer au dessus de la tête des élèves et C.W. a su me recadrer quand le besoin s'en est fait sentir et c'est tout l'intérêt de ce travail commun.

Il faut noter que la présence d'un intervenant extérieur dope le travail des élèves. Ils veulent montrer tout ce dont ils sont capables et ont fait de gros efforts pour s'adapter à des méthodes qui sont loin d'être scolaires.

La question initiale provenait d'une demande des élèves à laquelle C.W. ne savait répondre que de façon partielle : Comment se calcule la date de Pâques⁽¹⁾ ?

Sachant d'une part que cette date repose sur le mouvement de la Lune et du Soleil et d'autre part que les élèves avaient étudié par groupes divers calendriers, j'ai proposé d'élargir la question à l'étude du mouvement de la Lune et à la découverte d'un calendrier musulman historique. Cela a conduit à la proposition suivante de séances communes.

- 1) Calcul de la durée d'une lunaison et de sa moyenne sur deux ans.
 - La soustraction de jours, heures, minutes.
 - Calcul d'une moyenne.
 - Transformation des jours, heures, minutes en jour décimal.
- 2) Construction d'un calendrier lunaire.
 - Durée d'une année lunaire de douze mois.
 - Quand faut-il ajouter un jour à l'année de 354 jours ?
 - La découverte d'un rythme approximatif de 8 ans.
 - Étude d'un calendrier historique, d'après un manuscrit de Qazwini (vers 1250).

(1) Pour la définition exacte de la date de Pâques, on peut consulter J. LEFORT, *La saga des calendriers*, Belin, 1999.

- 3) La date de Pâques.
- Le rythme des dimanches.
 - Une règle historique approximative.
 - Utilisation d'un algorithme.

Chaque séance se devait de durer l'heure de classe et était programmée une fois toutes les deux semaines à peu près.

Les enjeux par C.W.

L'hétérogénéité de nos classes peut être une chance si elle est utilisée pour mettre sous tension le désir d'apprendre. C'est tout simplement motiver l'élève en l'impliquant personnellement, en mobilisant son intelligence, bien sûr, mais aussi tous ses sens. En renforçant ainsi son sentiment d'avoir découvert, appréhendé et compris une notion nouvelle, on est certain d'avoir pérennisé ce nouveau savoir chez l'élève.

Ce sont sur ces bases, que les séances ont été bâties, et ce sont donc tout naturellement autour de questions que se sont posées les élèves que va progresser notre travail commun, les élèves, l'enseignant, le référent scientifique.

- Qui posa la première question « Quelle heure est-il ? » ?
- Pourquoi existe-t-il des calendriers différents ?
- Pourquoi la date de Pâques varie-t-elle ?
- Quelle est l'origine du nom des jours ?
- Étude de l'écriture du nombre 365 en lien avec les différentes civilisations concernées par les calendriers étudiés (égyptien, maya, grec, romain, chinois, européen au Moyen Âge).

En fonction de son centre d'intérêt, de son niveau de développement cognitif et affectif, de sa culture de référence, chaque élève va se positionner pour approfondir une de ces questions.

Ainsi Nadir et Hülya vont-elles proposer à leurs meilleures amies de travailler avec elles sur le calendrier musulman, de même Vincent, juif pratiquant, formera un petit groupe pour approfondir des documents sur le calendrier juif. Six élèves fort intrigués de découvrir que les noms des jours avaient une origine bien précise, parfois semblable ou différente d'un pays à l'autre, ont voulu continuer de poursuivre leur étonnement en travaillant sur l'étymologie des mois révolutionnaires.

Tous auront un apport théorique, ciment de notre travail en commun en lien avec le programme de sixième et conformément aux instructions générales pour l'enseignement des mathématiques au collège :

... L'enseignement des mathématiques au collège favorise le développement des capacités de travail personnel de l'élève, et de son aptitude à chercher, à communiquer, et à justifier ses affirmations.

Une distinction claire doit être établie entre :

- les activités prescrites par les programmes, qui doivent être aussi riches et diversifiées que possible ;
- les connaissances exigibles, qui sont beaucoup plus restreintes que ce qui se fait en classe ;

– les activités complémentaires éventuelles sur tel ou tel point.

Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes.

Les freins par C.W.

La rencontre entre l'élève et les mathématiques peut se faire hors du contexte scolaire, et des éléments de ce contexte social extérieur à l'école influenceront alors les représentations des élèves vis-à-vis des mathématiques. Cette rencontre se fait généralement en situation de classe, gérée par un seul professeur, avec certaines habitudes et des attentes implicites de la part de chacun, enseignant comme élèves et parents. Or ici, nous étions dans un dispositif peu ordinaire. Chaque élève a derrière lui tout un environnement spécifique, un milieu où vont être échangées ou non les informations rapportées de la classe, un milieu favorable ou désapprobateur de l'action menée. En particulier, des réflexions de parents surpris par cette approche particulière de traiter le rôle de la numération dans un exemple quotidien : celui de la date malgré le fait opportun du passage à l'an 2000. L'élève confronté à la représentation « classique » de ses parents sera alors plus ou moins coopérant avec notre démarche et montrera une certaine résistance. Cela se traduira dans l'oubli des documents qu'il devait apporter, d'où des dysfonctionnements pour un groupe lors de la rédaction finale mais toutefois aboutie. « La relation d'enseignement est plus véritablement un duel ; un affrontement est essentiel à l'acte commun de l'enseignement et de l'enseigné » (Paul Ricœur). On peut comprendre cependant que certains parents puissent préférer un enseignement plus directif.

Quelques travaux d'élèves

On trouvera en annexe les documents suivants :

Document 1 : *Le calcul des durées des lunaisons.*

Document 2 : *Le calendrier perpétuel de Qazwini*⁽²⁾.

L'apport du référent dans la classe par J.L.

1) Étude des lunaisons

Il me paraissait évident que l'ordre d'apparition des phases de la Lune n'était pas connu et c'est bien ce qu'à révélé la question puisqu'environ la moitié des élèves a proposé la mauvaise suite des phases. J'en profite pour préciser le vocabulaire : nouvelle Lune, pleine Lune, premier et dernier quartier, Croissant.

Comme les élèves ont vu que dans certains calendriers les mois commencent à la nouvelle Lune, je leur distribue un tableau des nouvelles Lunes pour les années 1999 et 2000 à charge pour eux de calculer la durée de chaque lunaison⁽³⁾. Chaque élève

(2) On trouvera un document en couleurs sur le site de l'APMEP cité au début de l'article.

(3) On peut trouver dates et heures des phases de la Lune, mois par mois, sur le site du bureau des longitudes :

http://www.imcce.fr/page.php?nav=fr/ephemerides/astronomie/phases_lune/index.php

calcule au moins une lunaison ce qui n'est pas une mince affaire surtout s'il y a des retenues. L'erreur attendue est de soustraire systématiquement le plus petit nombre du plus grand et de travailler ainsi pour les heures et pour les minutes séparément, les jours ayant soit un traitement manuel en raison de l'inégalité de durée des mois, soit un a priori de 29. Mêmes les plus lents ont fini par comprendre, avec l'exemple de la durée entre aujourd'hui 18 h et demain 7 h, comment se débrouiller pour calculer juste. Les plus rapides ont fait plusieurs calculs.

Je distribue le corrigé global pour faire le calcul de la moyenne. Différentes stratégies sont mises en œuvre : il faut d'abord additionner séparément les jours, les heures et les minutes (ici l'ordre importe peu), puis transformer les minutes en heures, faire la retenue sur les heures, puis ajouter les heures et les transformer en jours et faire la retenue sur les jours. Il faut ensuite faire la moyenne. On notera qu'il est plus facile de faire les calculs pour 1999 que pour 2000 et dans ce dernier cas, seuls les meilleurs ont réussi le calcul. Je termine en donnant la moyenne des deux années 29 j 12 h 4 min.

Ensuite la classe est priée d'observer et de commenter le tableau obtenu. La pulsion entre un maximum et un minimum est rapidement découverte et son rythme presque annuel aussi. Grosse déception sur le fait que ce ne soit pas vraiment régulier ! Mais cela me permet de faire comprendre pourquoi la moyenne des lunaisons sur un grand nombre d'années est de 29 j 12 h 44 min et non celle qu'ils ont calculée.

La dernière question est la transformation de cette lunaison moyenne en jour décimal pour faciliter les calculs ultérieurs. Question excessivement difficile où il m'a fallu donner bien des coups de pouce mais avec l'impression que les élèves avaient été heureux d'arriver au résultat : $29 \text{ j } 12 \text{ h} = 29,5$ cela c'est facile, mais 44 minutes ??? Certains plus malins me disent que 45 min c'est $\frac{3}{4}$ d'heure soit 0,75 h. Excellente idée mais il faut ensuite transformer cela en jour. Et il reste enfin à retrancher une minute et pour cela il faut savoir combien il y a de minutes dans la journée. On arrive finalement à 29,530 555 que je corrige en 29,530 588 car nous n'avons pas tenu compte des secondes ce qui est admis sans difficulté.

2) Un calendrier musulman historique

Le calendrier musulman actuel repose sur un cycle de trente ans ce qui m'a semblé générer des calculs un peu trop long. Je me suis donc rabattu sur un calendrier ancien utilisé au XIII^e siècle de notre ère et qui repose sur un cycle de huit ans. Il s'agit de faire découvrir ce cycle en effectuant des arrondis.

Une année dite lunaire comporte douze lunaisons et tous trouvent que cela fait 354,367 056 jours. Comme une lunaison fait à peu près 29 jours et demi, je propose que les mois alternent 30 et 29 jours. Combien cela fera-t-il de jours dans une année et je demande un calcul mental, ce qui paraît un exercice difficile pour beaucoup. Des malins devinent, au vu du résultat précédent, que cela fera 354 jours. D'autres séparent les calculs en six mois de 30 j et six de 29 soit $30 - 1$. D'autres enfin calculent $12 \times 30 - 6$. Tous reconnaissent que c'était facile.

On s'attaque ensuite au rythme des années. Je propose de calculer la durée exacte de deux, trois, ... huit années de douze lunaisons et de comparer avec la durée de deux,

trois, ... huit années de 354 jours pour voir quand il faut ajouter un jour à l'année pour ne pas dépasser une erreur d'un jour. Pour cela je construis avec eux le tableau suivant :

année	de 12 lunaisons	de 354 jours	correction
1 an	354,367 056	354	0 jour
2 ans	708,734 112	708	0 jour
3 ans	1 063,101 168	1 062	1 jour
4 ans	1 417,468 224	1 416	(1 jour)
5 ans	1 771,835 280	1 770	(1 jour)
6 ans	2 126,202 336	2 124	1 + 1 = 2 jours
7 ans	2 480,569 392	2 478	(2 jours)
8 ans	2 834,936 448	2 832	?

Les élèves n'estiment pas nécessaire de porter la correction à trois jours pour la huitième année. Je leur demande de le faire et de me dire pourquoi. Ce qui ne pose pas de difficulté.

La dernière partie de la séance consiste en la projection de l'image d'un manuscrit arabe d'Al-Qazwini (vers 1250) et qui représente un calendrier perpétuel. Je le présente sous forme d'une énigme : ils sont archéologues et lors de fouilles ils viennent de découvrir cette page ; ils s'interrogent sur sa signification. Que voient-ils ?

Cette question les dérouta largement, car elle n'est pas scolaire et qu'aucun ne connaît l'arabe. J'insiste en précisant qu'il s'agit de faire, dans un premier temps, une simple description. Cela les rassure et conduit à douze secteurs, neuf anneaux concentriques, l'anneau le plus externe en couleur. Je leur dis alors qu'il faudrait voir les mots qui apparaissent. C'est un travail qu'il n'est pas possible de faire sur écran et qu'il serait fastidieux de faire en classe. C'est pourquoi je précise que sur les huit anneaux internes il y a seulement sept mots différents et douze autres mots sur l'anneau externe. Cela leur dit-il quelque chose ? Bien sûr que oui !

Je fais remarquer que les 2 835 jours des huit années lunaires font un nombre exact de semaines (405) et qu'il est donné le nom du premier jour de chaque mois de l'année pour chacune des huit années du cycle puis je fournis une traduction.

3) La date de Pâques

C.W. avait bien fait les choses en laissant dans la classe de ces grands calendriers en cartons pour une dizaine d'années consécutives. On pouvait facilement vérifier que Pâques se trouvait toujours le premier dimanche après la première pleine Lune du printemps, c'est-à-dire après le 21 mars. Pour calculer la date de Pâques, il faut donc connaître le mouvement de la Lune et le rythme des dimanches.

D'où la première question : Si une année commune (365 jours) commence un lundi 1^{er} janvier, au bout de combien d'années est-on sûr de retrouver un lundi 1^{er} janvier d'une année commune ? Deux réponses fusent immédiatement : 4 et 7 ans. Il faut vérifier qu'elles sont fausses et voir pourquoi. Curieusement après avoir démontré qu'une année commune c'est 52 semaines plus un jour et que le 31 décembre est le

même jour que le 1^{er} janvier, la nouvelle réponse est alors 6 ans ! Je demande alors combien de jours on gagne en 4 ans et la réponse correcte (5) arrive très vite. Il faut alors calculer combien de fois 4 ans sont nécessaires pour obtenir un nombre entier de semaines. La valeur 7×4 est très vite découverte (je sais bien que cette réponse est fautive dans le calendrier grégorien, mais je n'en ai cure en sixième).

Pour terminer je fournis l'algorithme ci-dessous pour le calcul de la date de Pâques et leur demande de l'appliquer pour dans trois ans (de manière à ce qu'ils ne puissent pas tricher en regardant sur leur agenda)⁽⁴⁾. Ce ne sont pas les formules à plusieurs variables qui les gênent, ils en connaissent d'autres comme l'aire du triangle, mais l'écriture telle que $19a$ que je corrige rapidement en $19 \times a$ en expliquant pourquoi je ne mets pas le signe \times comme dans 19 mètres... et la notion de reste qui est confondue avec la partie décimale donnée par la calculatrice. C'est l'occasion de rappeler la définition de la division euclidienne.

diviser	par	quotient	reste
année m	19		a
m	100	b	c
b	4	d	e
$b + 8$	25	f	
$b - f + 1$	3	g	
$19a + b - d - g + 15$	30		h
c	4	i	j
$32 + 2e + 2i - h - j$	7		k
$a + 11h + 22k$	451	ℓ	
$h + k - 7\ell + 114$	31	m'	n

Si $m' = 3$ alors Pâques est le $n + 1$ mars.

Si $m' = 4$ alors Pâques est le $n + 1$ avril.

Pour conclure

Nous avons dû prendre en compte ces représentations différentes du rapport au savoir enseigné et créer une unité autour de nous. C'est cette unité qui nous a permis de poursuivre nos séances et garantir que la différence ne soit pas vécue sur le mode de l'exclusion. Grâce à cette unité et notre complémentarité dans le traitement des connaissances apportées, chaque élève, dans la classe, a pu se sentir respecté puisque chacun a apporté sa part au travail commun, se percevoir comme ayant le droit de ne pas tout comprendre puisque les deux adultes n'avaient pas les mêmes connaissances, le droit de ne pas y arriver aussi aisément que ses camarades puisque l'originalité de certains travaux mettait tous les élèves sur le même plan, et pourtant chacun, dans le même temps, demeura sous la tension d'une démarche, d'une exigence de savoir et apporta sa part dans la rédaction du document commun finalisé qui comporte une quarantaine de pages.

(4) Des explications sur l'obtention de cet algorithme sont données dans l'ouvrage cité de J. Lefort.

Après un semestre de fonctionnement, en dehors de la production de travaux mentionnés ci-dessus qui était l'objectif fondamental, diverses ouvertures sont à mentionner :

- une ouverture pluridisciplinaire, vers l'histoire bien sûr, mais aussi vers le français et les TICE ; cette dimension nous semble importante et peut déjà intervenir à ce niveau de classe comme dans le cadre des itinéraires de découverte en collège, ainsi que des TPE en lycée ;
- une confrontation permanente entre les niveaux primaire et collège qui nous permet de mieux apprécier la progression et les difficultés des élèves dans l'acquisition des notions et des techniques calculatoires des mesures de temps ;
- une plus grande familiarisation avec les techniques informatiques ; à noter que l'évolution rapide des techniques dans ce secteur permettrait aujourd'hui bien d'autres développements (initiation au traitement de texte, utilisation de logiciels d'astronomie ou de dessin, recherche de documentation sur Internet, ...).

Finalement en dehors de l'échange et du bénéfice mutuel que chacun d'entre nous a retiré de ce travail commun, nous avons le sentiment d'avoir ainsi permis à l'élève de construire un nouveau rapport au savoir enseigné : d'une part accepter de ne pas tout comprendre, de ne pas travailler au même rythme qu'un autre camarade ou de ne pas acquérir exactement le même contenu ni le même niveau de contenu qu'un camarade de sa classe et d'autre part savoir utiliser toutes ses connaissances (appries ou non en classe) dans des situations nouvelles et peu scolaires, de faire partager à d'autres (à commencer par ses parents) son nouveau savoir ce qui lui permet de se projeter dans l'avenir.

Si « pour beaucoup d'enfants, le mot problème est associé à l'idée de nombre et non à l'idée de recherche : le résoudre, ce n'est pas réfléchir, c'est combiner entre eux des nombres sans savoir ni pourquoi ni comment... l'adulte demande des opérations, l'enfant en donne... »⁽⁵⁾, le travail proposé l'aura peut-être initié à confronter avec ses pairs de nouvelles connaissances, c'est-à-dire qu'il sera prêt à suivre le conseil de Gaston BACHELARD « Remplacer le savoir fermé et statique par une connaissance ouverte et dynamique »⁽⁶⁾.

(5) F. JAULIN-MANNONI, *Les quatre opérations, base des mathématiques*, ESF, Paris.

(6) Gaston BACHELARD, *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin.

ANNEXE

Document 1 : Le calcul des durées des lunaisons

b) Table des nouvelles lunes des années 1999 et 2000

Instant des nouvelles lunes

1999		durée	2000		durée
17 janvier	15 h. 46 min		6 janvier	18 h. 14 min	
		29 j 14R 53 min			29 j 10R 49 min
16 février	6 h. 39 min		5 février	13 h. 3 min	
		29 j 12R 9 min			29 j 16R 14 min
17 mars	18 h. 48 min		6 mars	5 h. 17 min	
		29 j 9R 34 min			29 j 12R 55 min
16 avril	4 h. 22 min		4 avril	18 h. 12 min	
		29 j 7R 43 min			29 j 10R 0 min
15 mai	12 h. 5 min		4 mai	4 h. 12 min	
		29 j 6R 58 min			29 j 8R 2 min
13 juin	19 h. 3 min		2 juin	12 h. 14 min	
		29 j 7R 24 min			29 j 7R 6 min
13 juillet	2 h. 24 min		1 juillet	19 h. 20 min	
		29 j 8R 45 min			29 j 7R 6 min
11 août	11 h. 9 min		31 juillet	2 h. 25 min	
		29 j 10R 58 min			29 j 7R 59 min
9 septembre	22 h. 2 min		29 août	10 h. 19 min	
		29 j 13R 22 min			29 j 9R 34 min
9 octobre	11 h. 34 min		27 septembre	19 h. 53 min	
		29 j 16R 19 min			29 j 12R 5 min
8 novembre	3 h. 53 min		27 octobre	7 h. 58 min	
		29 j 18R 39 min			29 j 15R 13 min
7 décembre	22 h. 32 min		25 novembre	23 h. 11 min	
		29 j 19R 47 min			29 j 18R 11 min
6 janvier 00	18 h. 14 min		25 décembre	17 h. 22 min	
	<i>total</i>	354 j 2R 28 min		<i>total</i>	353 j 23R 3 min
	<i>moyenne</i>	29 j 10R 14 min		<i>moyenne</i>	29 j 11R 56 min

Marciano
Vincent

Document 2 : *Le calendrier perpétuel de Qazxini*