

Analyse comparée de deux sujets traités par des ateliers

Pierre Grihon(*)

Mon propos est de comparer deux sujets MEJ qui ont donné lieu à des exposés et des articles ayant un contenu mathématique consistant. Aucun des deux n'était en relation avec la recherche actuelle, et on ne pouvait pas attendre des élèves de découverte sensationnelle : on savait plus ou moins ce qu'ils pouvaient trouver. Cela n'est pas gênant : ce qui compte c'est que les élèves soient en situation de recherche, exploitent leurs idées et élaborent leurs propres méthodes. C'est d'ailleurs là que réside le principal écueil quand on pose des sujets complètement résolus : les professeurs doivent résister à l'envie bien naturelle d'orienter les élèves vers des pistes dont ils savent qu'elles « débouchent ».

Premier sujet

Combien de points faut-il pour définir une courbe ?

Ce sujet a été posé en 2006 à des élèves de première S et terminale S. À première vue, c'est un sujet passionnant, dont nous savons en tant que professeur qu'il a beaucoup de « profondeur ».

1) Début de la recherche

Le groupe a commencé par des cas très simples : droite et segment. Ensuite, très vite, ils ont pensé à la parabole dont ils avaient entendu parler en cours. Ils ont rapidement vu qu'il fallait au moins trois points non alignés, mais qu'en général cela ne suffisait pas et qu'en revanche dans un repère bien choisi cela suffisait. Ils ont alors trouvé l'équation cartésienne de la parabole sans grande difficulté. Ils ont appris, sans doute par un professeur, qu'il existait une définition géométrique. Ils ont donc mis en relation cette définition et l'équation cartésienne trouvée précédemment.

2) Premiers piétinements

L'étude de la parabole a pris un mois environ et a été exposée au premier séminaire. Ensuite, pendant plusieurs séances, le groupe a cherché quelles courbes ils pouvaient explorer.

Les autres coniques ne les ont pas trop tentés. Ils voulaient en fait étudier des courbes quelconques...

Le découragement gagnait. Après concertation avec le chercheur, deux pistes balisées étaient possibles : l'interpolation de Lagrange ou les courbes de Bézier.

L'interpolation ressemblait en plus compliquée à la parabole. On a donc décidé de les orienter vers Bézier. Mais ils ne pouvaient pas en quelques semaines « découvrir »

(*) Lycée Montaigne, Bordeaux. pgrihon@free.fr

tous seuls le principe de ces courbes. Il a donc fallu le leur expliquer.

3) Redémarrage

Après cela, ils ont exploré les cas avec deux, puis trois points et ont buté sur la généralisation.

Il a fallu là-aussi leur donner un coup de pouce. Les élèves de TS avaient un avantage et ce sont eux qui ont élaboré la preuve de la formule.

On espérait qu'ils pourraient ensuite mettre cela en application sur ordinateur, mais ils n'avaient pas vraiment les compétences en Géoplan ; c'est donc un professeur qui l'a fait.

4) Réalisations

Finalement, leur exposé avait de la substance et la mise en œuvre sur Géoplan était très spectaculaire. Cela a donc été de ce point de vue une réussite. L'article a été écrit et diffusé sur le site de MEJ très rapidement car il était impeccable.

5) Bilan

On est revenu du congrès très satisfaits de nous et des élèves...

Mais en discutant avec ces derniers, il a fallu déchanter. Une grande partie d'entre eux avait participé à l'atelier l'année d'avant et avait étudié des marches aléatoires sur la droite et dans le plan, sans aucune connaissance en probabilité, puisqu'ils étaient en seconde. Ils avaient développé des outils certes bien classiques en terminale, mais entièrement seuls et en avaient retiré une légitime fierté.

Leur frustration était patente. Je rapporte leur réflexion qui résume bien ce que je veux exprimer : « Vous nous avez tout dit, nous n'avons fait qu'exécuter ».

Avec le recul, ce sujet est un excellent sujet de TPE, mais pas un bon sujet de recherche MEJ.

Le bilan n'en est donc pas négatif d'un point de vue mathématique, car les élèves ont appris beaucoup de choses.

On trouvera dans l'Annexe 1 un extrait significatif du travail des élèves.

Deuxième sujet

Dans une ville côtière, les rues sont toutes nord-sud ou est-ouest et la distance entre deux carrefours voisins est toujours la même. La plage est au sud-est. Pour aller à la plage depuis sa maison, Paul prend une pièce et à chaque carrefour tire à pile ou face. S'il obtient pile, il prend la rue vers le sud, sinon il prend la rue vers l'est. Il arrive à la plage après n lancers. Combien de chemins possibles peut-il faire ? Combien de chances a-t-il d'arriver en un point donné de la plage ?

Ce sujet a été posé en 2007 à des élèves de seconde, qui n'avaient donc aucune connaissance en dénombrement et probabilités.

Bien entendu, ce sujet est du niveau du cours de TS et on peut trouver qu'il n'est pas bien dans l'esprit « math en jeans ».

Mais l'objet de cet article est de montrer que les élèves peuvent faire acte de recherche

sur un tel sujet, aussi bien que sur un sujet ouvert.

Cela suppose que le groupe constitue un « système isolé », sans aide extérieure autre que celle, contrôlée, des professeurs et du chercheur et que les élèves ne cèdent pas à la tentation de puiser des informations sur Internet par exemple. L'expérience prouve que c'est toujours le cas : ils n'éprouvent aucune envie de rompre le pacte qu'ils ont plus ou moins implicitement avec nous et avec eux-mêmes. On est bien dans une toute autre logique que celle du cours traditionnel.

1) Début de la recherche

Comme les y invitait le sujet, les élèves ont commencé par chercher le nombre total de chemins et ont tout naturellement essayé des petites valeurs de n . Ils ont très vite constaté qu'ils trouvaient des puissances de 2. Leur méthode de comptage pour passer par exemple de 4 à 5 les a mis sur la piste de « l'hérédité ». Comme ils ne connaissaient pas le principe de récurrence, ils m'ont demandé si le fait de prouver cette hérédité démontrait leur conjecture.

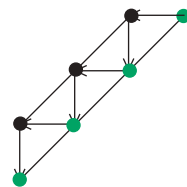
Je leur ai donc parlé de ce principe. Mais ils avaient juste besoin de savoir si c'était une vraie démonstration.

2) Découverte des coefficients binomiaux

Après avoir patiemment calculé les nombres de chemins arrivant à un point donné de la côte pour $n \leq 20$, en utilisant toujours le même principe (voir schéma ci-contre) ils ont

conjecturé les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ et, c'est là que

nous avons été assez épatés, ils ont conjecturé $\binom{n}{k}$ qu'ils



ont ensuite démontré par récurrence (qu'ils commençaient à bien maîtriser !)

3) Généralisation à la binomiale de paramètres n et p

Ayant achevé leur travail alors qu'il restait deux mois, ils ont voulu compliquer en jouant aux dés au lieu de pile ou face. Ils ont alors eu une idée très originale : distinguer les chemins (toujours au nombre de 2^n) menant à la plage, des « suites de dés » différentes pour y parvenir en jouant.

Si par exemple, on décide que 1 ou 2 nous font aller à l'Est et 3,4,5,6 vers le Sud, les deux suites de dés 1,2,4,4,5 et 2,1,3,4,6 donnent le même itinéraire.

Ils ont donc trouvé 6^n suites de dés différentes. Donc en multipliant leur nombre $\binom{n}{k}$

de chemins pour arriver à un point donné par le nombre de suites de dés y menant, soit $4^k 2^{n-k}$, et en divisant par 6^n ils ont obtenu la formule connue !

Ayant remarqué alors qu'elle pouvait s'écrire $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où p représentait pour

eux la chance d'aller vers l'Est, ils n'ont pas eu de mal à terminer leur généralisation (intuitive) à une pièce de monnaie quelconque.

Ce qui est intéressant dans cette démarche est qu'ils n'utilisent à aucun moment l'indépendance des tirages dont ils ignorent évidemment le sens mathématique, mais uniquement du dénombrement et l'hypothèse (non formulée) d'équiprobabilité des suites de dés.

Ci-joint en annexe 2 un extrait de l'article écrit par les élèves et uniquement par eux.

Conclusion

Il est clair que le premier sujet est plus ambitieux que le deuxième et surtout plus « ouvert ».

Mais leur mise en œuvre a montré que le véritable acte de recherche a été réalisé dans le deuxième : il a fallu pour cela que l'équipe d'enseignants joue le jeu de bout en bout en ne dirigeant pas les élèves dans telle ou telle voie.

En posant des sujets encore ouverts où les professeurs n'en savent pas plus que leurs élèves, les chercheurs peuvent faciliter ce type de réussite. Mais, outre le fait que les sujets ouverts accessibles à des élèves ne sont pas nombreux, ils peuvent s'avérer décevants si les élèves se trouvent trop vite à court d'inspiration et qu'il soit alors nécessaire de les aider pour sauver l'année.

Annexe 1

Combien faut-il de points pour définir une courbe ?

Lycée Sud-Médoc / Lycée Montaigne

Fanny Patin, Mélodie Durnez, Perrine Enjalbert,
Amélie Lassalle, Baudoin Auzou, Guillaume Camelot,
Luc Darmé, Antoine Carof

en partenariat avec Rémi Abgrall (Université Bordeaux 1)

1. Présentation du sujet

1.1. Le sujet mathématique

Le sujet choisi tient en une seule phrase :

Combien faut-il de point pour déterminer une courbe ou une surface ?

Nous nous sommes surtout intéressés au cas des courbes, délaissant le cas des surfaces qui semble bien plus vaste et plus complexe.

1.2. Les applications concrètes d'une telle démarche

La question à laquelle nous allons essayer de répondre est d'un certain intérêt dans le domaine de l'informatique, au niveau des fichiers graphiques.

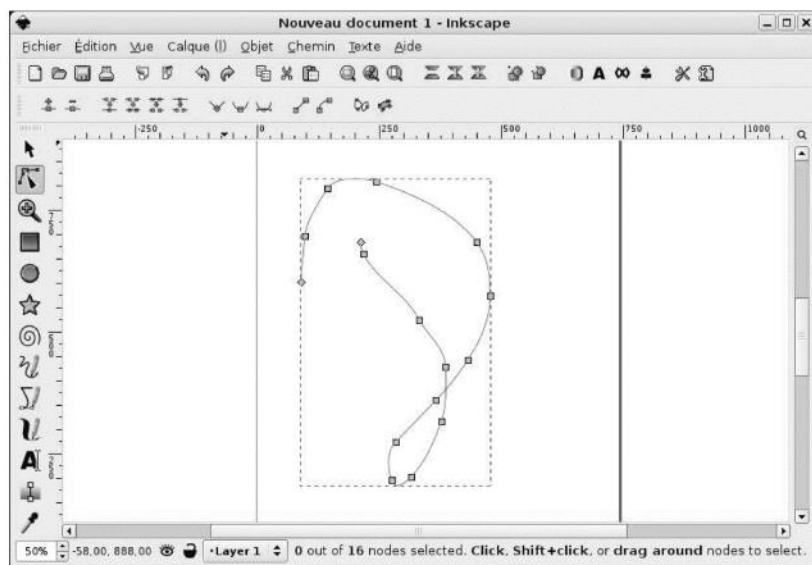
En effet, au niveau d'un ordinateur, les graphiques sont présents sous deux formats : le format **bitmap** et le format **vectorel**.

Le format **bitmap** est le format le plus basique que l'on peut utiliser en informatique. Il s'agit en fait de décrire une image pixel par pixel. Ainsi une droite de couleur noire est codée au niveau informatique comme un ensemble de pixels de couleur noire. De même pour un cercle ou toute autre figure. La seule manière d'agir dessus est donc de modifier l'image pixel par pixel. C'est ce que propose par exemple le logiciel *Paint* fourni par *Microsoft* dans son système d'exploitation *Windows*.

Le mode **vectorel** fait appel à une description géométrique des éléments d'une figure. Ainsi un cercle sera codé par les coordonnées de son centre et son rayon. Lorsque l'on agit sur la figure, on agit tout simplement sur les paramètres de cette figure. Le dessin vectoriel fait appel aux ressources d'un ordinateur pour dessiner le cercle. La modification des paramètres du cercle entraîne le recalcul des différents pixels à afficher.

La manipulation ou la modification d'une image est donc plus intuitive et plus aisée si celle-ci est stockée au format vectoriel.

La figure ci-dessous présente la description d'un tracé dans le cas d'un format vectoriel. Il est ainsi possible d'influer sur ce tracé par les différents points de contrôle qui apparaissent au niveau du tracé. Il est même possible d'en faire apparaître d'autres.



2. Le cas des courbes simples

Nous avons décidé de commencer par étudier des courbes simples. Pour chacune de ces courbes, nous avons cherché à trouver combien de points étaient nécessaires pour la définir (qu'ils appartiennent ou non à la courbe, et par deux approches différentes : algébrique et géométrique).

On cherche à savoir : combien faut-il de points au minimum pour caractériser des courbes classiques ?

2.1. Cas d'une droite

Deux points suffisent à caractériser une droite.



2.2. Cas d'un segment

Là encore, deux points suffisent.



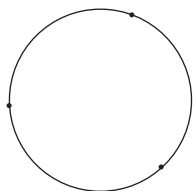
2.3. Cas d'une demi-droite

Deux points suffisent. Cependant ils n'ont pas le même rôle.



2.4. Cas d'un cercle

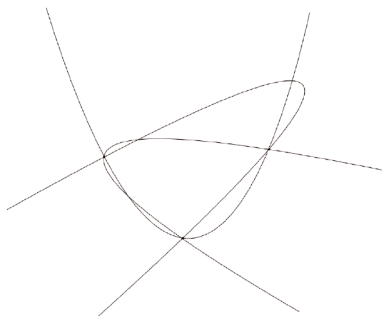
On a besoin de trois points, le cercle étant alors circonscrit au triangle formé par ces trois points.



On peut aussi caractériser un cercle par la donnée de son centre et d'un de ces points. Mais, dans ce cas, un des deux points a un rôle bien particulier.

2.5. Cas d'une parabole

Trois points ne suffisent pas pour caractériser une parabole.



En fait, on a une infinité de paraboles passant par trois points fixes.

On va cependant voir que si l'on fixe un repère, il y a alors une seule parabole passant par ces trois points et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

3. Paraboles

3.1. Paraboles dans le plan, dans un repère

3.2. Détermination de l'équation de la parabole passant par trois points

Par suggestion d'un de nos professeurs, on a décidé de chercher à déterminer mathématiquement l'équation d'une parabole passant par trois points donnés, à partir de leurs coordonnées. On considère donc le plan \mathcal{P} muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soient trois points de ce plan, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ et $C(x_3; y_3)$. On cherche à déterminer l'équation d'une parabole passant par ces trois points.

Ceci n'est possible que si $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$ et $x_3 \neq x_1$.

On supposera cette condition satisfaite et on cherche donc une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

a , b et c sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

Les solutions sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} a = \frac{x_2 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_2 + x_1 y_2 + x_3 y_1 - x_2 y_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ b = \frac{-x_2^2 y_3 + x_1^2 y_3 + x_3^2 y_2 - x_1^2 y_2 - x_3^2 y_1 + x_2^2 y_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ c = \frac{x_1 x_2^2 y_3 - x_1^2 x_2 y_3 - x_1 x_3^2 y_2 + x_1^2 x_3 y_2 + x_2 x_3^2 y_1 - x_2^2 x_3 y_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{cases}$$

3.3. Parabole définie par un point et une droite

On cherche à déterminer l'équation d'une parabole, non plus à partir de points appartenant à la parabole, mais à partir d'un point distinct de la parabole et d'une droite. En effet, une parabole peut aussi être définie comme étant l'ensemble des points à égale distance d'un point appelé foyer et d'une droite.

3.3.1. Définition géométrique d'une parabole

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $F(a, b)$, $M(x, y)$ et la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = k$. L'ensemble des points M situé à égale distance du point F et de la droite (\mathcal{D}) est une parabole que l'on notera (\mathcal{C}) . On sait donc que $d(M, (\mathcal{D})) = d(M, F)$ donc $d(M, (\mathcal{D}))^2 = d(M, F)^2$.

3.3.2. Pour calculer $d(M, (\mathcal{D}))^2$

On calcule en fait la distance entre M et son projeté orthogonal M' sur (\mathcal{D}) . Comme la droite (\mathcal{D}) a pour équation $y = k$, M et M' ont même abscisse, et donc $d(M, (\mathcal{D})) = |y - k|$. On a donc $d(M, (\mathcal{D}))^2 = |y - k|^2 = (y - k)^2 = y^2 - 2ky + k^2$.

3.3.3. Pour calculer $d(M, F)^2$

$$d(M, F)^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2.$$

3.3.4. En définitive

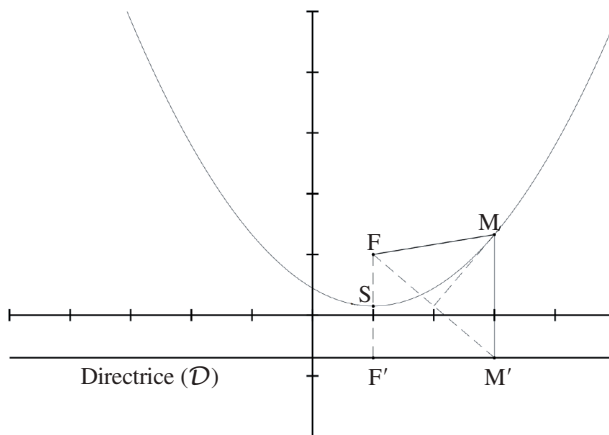
L'égalité $d(M, (\mathcal{D}))^2 = d(M, F)^2$ se traduit par

$$y^2 - 2ky + k^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2.$$

Si on résout cette dernière équation en y , on obtient :

$$\begin{aligned} & y^2 - 2ky + k^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2 \\ \Leftrightarrow & -2ky + k^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by \\ \Leftrightarrow & -2ky + 2by = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - k^2 \\ \Leftrightarrow & y(-2k + 2b) = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - k^2 \\ \Leftrightarrow & y = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - k^2}{2b - 2k} \\ \Leftrightarrow & y = \frac{(a - x)^2 + (b - k)(b + k)}{2(b - k)} \\ \Leftrightarrow & y = \frac{(a - x)^2}{2(b - k)} + \frac{(b + k)}{2}. \end{aligned}$$

3.3.5. Analyse du résultat



Équation de la parabole : $y = \frac{(a - x)^2}{2(b - k)} + \frac{(b + k)}{2}$.

$\frac{b+k}{2}$ correspond à l'ordonnée du milieu S de [FF'] avec F' projeté orthogonal de F sur la droite (D). Il s'agit du sommet de la parabole.

$(a-x)^2$ est l'éloignement de M par rapport à F (mesuré au niveau de leurs abscisses).

$2(b-k)$ nous donne l'orientation de la parabole :

- Si $k > b$, alors $b - k < 0$ et donc la parabole est croissante puis décroissante.
- Si $k < b$, alors $b - k > 0$ et donc la parabole est décroissante puis croissante.

3.3.6. Écriture du résultat selon l'écriture usuelle de l'équation d'une parabole :

$$\begin{aligned} y &= \frac{(a-x)^2}{2(b-k)} + \frac{(b+k)}{2} \\ &= \frac{x^2 - 2ax + a^2}{2(b-k)} + \frac{(b+k)}{2} \\ &= \frac{1}{2(b-k)}x^2 - \frac{a}{b-k}x + \frac{a^2}{2(b-k)} + \frac{(b+k)}{2} \\ &= \frac{1}{2(b-k)}x^2 - \frac{a}{b-k}x + \frac{a^2 + b^2 - k^2}{2(b-k)}. \end{aligned}$$

Soit donc une écriture sous la forme $y = Ax^2 + Bx + C$.

3.3.7. Calcul des coordonnées du foyer et de l'équation de la directrice à partir de l'équation $y = Ax^2 + Bx + C$

On identifie les différents coefficients intervenant dans les équations. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2(b-k)} \\ B = \frac{-a}{2(b-k)} \\ C = \frac{a^2 + b^2 - k^2}{2(b-k)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{-B}{2A} \\ \frac{B}{2A} = B(b-k) \quad (*) \\ C = \frac{a^2}{2(b-k)} + \frac{b+k}{2} \quad (**) \end{array} \right.$$

L'équation (*) donne $k = b - \frac{1}{2A}$ et l'équation (**) donne en utilisant l'égalité

obtenue juste avant : $b = C - \frac{B^2 - 1}{4A}$.

On a donc finalement :

$$a = \frac{-B}{2A}, \quad b = C - \frac{B^2 - 1}{4A}, \quad k = C - \frac{B^2 + 1}{4A}.$$

4. Bézier

Parallèlement à cela, nos professeurs nous ont parlé des courbes de Bézier, aussi nous avons suivi cette piste.

Une courbe de Bézier répond exactement aux exigences de la problématique. En effet, elle est définie par quelques points dont seulement deux appartiennent à la courbe. Mais surtout, le déplacement de ces points entraîne au niveau de la courbe une modification tout à fait logique, ce qui en fait un outil très intuitif au niveau du dessin. Ainsi cet outil est présent dans tout logiciel de dessin vectoriel.

Elle fut découverte par Pierre Bézier (1910 - 1999), ingénieur à la régie Renault.

4.1. Biographie de Bézier

Pierre Bézier, ingénieur français, a proposé des équations de courbes paramétrables de façon visuelle. Il a réalisé ses travaux dans le cadre du développement de logiciels de CAO au sein de la régie Renault. Il est mondialement célèbre pour les courbes qui portent son nom.

Fils et petit-fils d'ingénieurs, il a également choisi cette profession et s'est engagé dans le génie mécanique à l'École des Arts et Métiers de Paris, où il a reçu son diplôme d'ingénieur en 1930. Au cours de la même année, il entra à l'École Supérieure d'Électricité (Supélec) et obtint en 1931 un second diplôme d'ingénieur, cette fois en électricité.

Quelques 46 années plus tard, en 1977, il recevra son doctorat en mathématiques de l'Université de Paris.

4.2. Première introduction aux courbes de Bézier

On va considérer un cas simple : la courbe de Bézier construite à partir de quatre points distincts A, B, C et D.

La construction qui va suivre a seulement pour but de préciser le plus simplement possible comment se construit une courbe de Bézier. Il n'est pas ici question de définir rigoureusement cet objet géométrique.

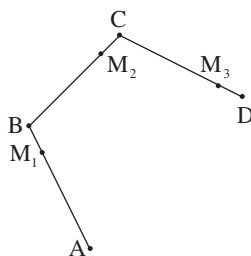
Soient donc A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux. On considère un point M_1 mobile sur le segment [AB].

On construit le point M_2 du segment [BC] tel que

$\frac{AM_1}{AB} = \frac{BM_2}{BC}$. Le point M_2 est donc situé

proportionnellement à BC à la même distance de B que M_1 l'est de A proportionnellement à AB.

De même, on construit sur le même principe le point M_3 du segment [CD]. On obtient ainsi la configuration ci-contre :



La construction se poursuit en plaçant sur le segment $[M_1M_2]$ un point M_{12} tel que

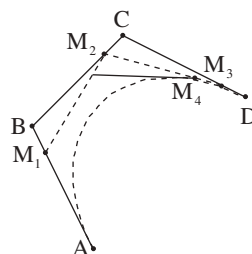
$\frac{M_1M_{12}}{M_1M_2} = \frac{AM_1}{AB}$.

De même, on construit sur le segment $[M_2M_3]$ un point M_{23} vérifiant là encore une égalité de rapport.

Il reste alors à construire sur le segment $[M_{12}M_{23}]$ un

point M_4 qui vérifie lui aussi $\frac{M_{12}M_4}{M_{12}M_{23}} = \frac{AM_1}{AB}$. On

obtient donc la configuration ci-contre :



Lorsque le point M_1 se déplace sur le segment $[AB]$, toute la construction se modifie.

La courbe de Bézier est en fait le lieu que parcourt le point M_4 lorsque le point M_1 se déplace le long du segment $[AB]$. La courbe de Bézier est ce que l'on appelle un lieu géométrique.

4.3. Construction rigoureuse de la courbe de Bézier

La construction rigoureuse de la courbe de Bézier fait appel à la notion de barycentre. On donne ici la définition du barycentre de deux points A et B.

Si a et b sont deux réels tels que $a + b \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que

$a\overline{GA} + b\overline{GB} = \vec{0}$. Ce point unique s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), les réels a et b étant ce que l'on appelle des coefficients de pondérations.

Si a et b changent de valeur, le barycentre lui aussi change. Cependant, il reste toujours aligné avec les points A et B.

De plus, si O est un point quelconque du plan, on a $(a + b)\overline{OG} = a\overline{OA} + b\overline{OB}$. Nous allons donc reprendre la construction précédente en utilisant les barycentres.

4.3.1. Cas de la construction avec trois points

Soient trois points A, B et C distincts deux à deux. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$. On construit le point M_1 barycentre des points (A, t) et (B, $1-t$). Ce barycentre a du fait du choix des coefficients de pondération la particularité d'être sur le segment $[AB]$. On construit de même le point M_2 comme barycentre des points pondérés (B, t) et (C, $1-t$). Il reste alors à construire le point M_3 barycentre des points pondérés (M_1, t) et ($M_2, 1-t$). Lorsque t varie entre 0 et 1, le point M_1 parcourt le segment $[AB]$, le point M_2 parcourt le segment $[BC]$ et le point M_3 parcourt le segment $[M_1M_2]$. Le lieu que parcourt le point M_3 est la courbe de Bézier construite à partir des points A, B et C.

Si O est un point quelconque du plan (par exemple l'origine d'un repère), on a

$$(t + 1 - t)\overline{OM_3} = \overline{OM_3} = t\overline{OM_1} + (1 - t)\overline{OM_2}.$$

Mais on a $(t + 1 - t)\overline{OM_1} = \overline{OM_1} = t\overline{OA} + (1 - t)\overline{OB}$ et $\overline{OM_2} = t\overline{OB} + (1 - t)\overline{OC}$.

Donc on obtient finalement en remplaçant dans la première expression $\overline{OM_1}$ et $\overline{OM_2}$ par leur expression en fonction des vecteurs \overline{OA} , \overline{OB} et \overline{OC} :

$$\overline{OM_3} = t^2\overline{OA} + 2t(1 - t)\overline{OB} + (1 - t)^2\overline{OC}.$$

4.3.2. Cas de la construction avec quatre points

Soient quatre points A, B, C et D distincts deux à deux. Soit alors t un réel de l'intervalle $[0,1]$. On introduit alors les barycentres suivants :

- M_1 est le barycentre de (A,t) et $(B,1-t)$.
- M_2 est le barycentre de (B,t) et $(C,1-t)$.
- M_3 est le barycentre de (C,t) et $(D,1-t)$.
- M_{12} est le barycentre de (M_1,t) et $(M_2,1-t)$.
- M_{23} est le barycentre de (M_2,t) et $(M_3,1-t)$.
- M_4 est le barycentre de (M_{12},t) et $(M_{23},1-t)$.

La courbe de Bézier définie par les quatre points A, B, C et D est donc le lieu géométrique que parcourt le point M_4 lorsque t passe de 0 à 1. Comme pour le cas

précédent, il est possible d'obtenir une égalité vectorielle exprimant \overline{OM}_4 en fonction des vecteurs \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} et \overline{OD} . Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\overline{OM}_4 &= t\overline{OM}_{12} + (1-t)\overline{OM}_{23} \\ &= t(t\overline{OM}_1 + (1-t)\overline{OM}_2) + (1-t)(t\overline{OM}_2 + (1-t)\overline{OM}_3) \\ &= t^2\overline{OM}_1 + 2t(1-t)\overline{OM}_2 + (1-t)^2\overline{OM}_3 \\ &= t^2(t\overline{OA} + (1-t)\overline{OB}) + 2t(1-t)(t\overline{OB} + (1-t)\overline{OC}) + (1-t)^2(t\overline{OC} + (1-t)\overline{OD}) \\ \overline{OM}_4 &= t^3\overline{OA} + 3t^2(1-t)\overline{OB} + 3t(1-t)^2\overline{OC} + (1-t)^3\overline{OD}.\end{aligned}$$

4.3.3. Généralisation et formule caractérisant une courbe de Bézier

Ainsi O étant un point fixe (par exemple l'origine d'un repère), dans le cas d'une courbe de Bézier définie à l'aide de trois points A, B et C, M un point du plan appartient à cette courbe si et seulement si il existe $t \in [0,1]$ tel que

$$\overline{OM} = t^2\overline{OA} + 2t(1-t)\overline{OB} + (1-t)^2\overline{OC}.$$

Dans le cas d'une courbe de Bézier définie à partir de quatre points A, B, C et D, un point M appartient à cette courbe si et seulement si il existe $t \in [0,1]$ tel que

$$\overline{OM} = t^3\overline{OA} + 3t^2(1-t)\overline{OB} + 3t(1-t)^2\overline{OC} + (1-t)^3\overline{OD}.$$

Il est possible de conjecturer la formule caractérisant une courbe de Bézier définie à l'aide de n points.

Ainsi, on peut reconnaître dans les deux formules précédentes les coefficients du binôme de Newton. En effet, si on assimile t à a et $1-t$ à b , on voit apparaître une « identité remarquable » :

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= t^2\overline{OA} + 2t(1-t)\overline{OB} + (1-t)^2\overline{OC} \\ &= \underline{a^2}\overline{OA} + \underline{2ab}\overline{OB} + \underline{b^2}\overline{OC} \\ \overline{OM} &= t^3\overline{OA} + 3t^2(1-t)\overline{OB} + 3t(1-t)^2\overline{OC} + (1-t)^3\overline{OD} \\ &= \underline{a^3}\overline{OA} + \underline{3a^2b}\overline{OB} + \underline{3ab^2}\overline{OC} + \underline{b^3}\overline{OD}\end{aligned}$$

Dès lors, on peut prévoir les différents coefficients en utilisant le triangle de Pascal. Il s'agit d'une pyramide de nombres où chaque nombre (à l'exception du premier) est la somme des deux nombres directement au-dessus. On obtient ainsi :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 n=1 & & & & & & 1 & & & & & \\
 n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 n=4 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 n=5 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Or on peut à l'aide d'une formule exprimer en fonction de la ligne n et de sa position dans une ligne, un nombre quelconque de ce triangle de Pascal. Cette formule est :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

De ce fait, on peut en déduire une formule caractérisant une courbe de Bézier définie par n points A_i (i variant de 0 à $n - 1$). Cette formule est donnée ci-dessous

$$\overline{OM}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} \overline{OA}_k.$$

4.4. Démonstration par récurrence de l'expression de la courbe de Bézier

La courbe de Bézier est donc un ensemble de points. Ces points sont en fait les points M_n définis par la relation suivante lorsque t varie entre 0 et 1 :

$$P_n : \overline{OM}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} \overline{OA}_k.$$

Cette relation définit donc une courbe de Bézier construite avec n points. On pose pour les besoins de la démonstration $b = t$ et $a = 1 - t$.

4.4.1. Initialisation

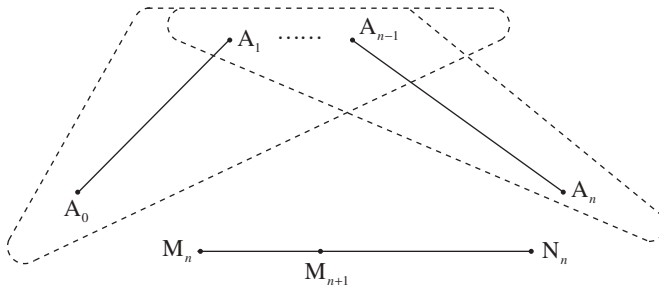
Pour trois points A_0, A_1 et A_2 non alignés comme vu dans l'exemple, on a

$$\begin{aligned}
 \overline{OM}_3 &= \binom{2}{0} a^2 \overline{OA}_0 + \binom{2}{1} ab \overline{OA}_1 + \binom{2}{2} b^2 \overline{OA}_2 \\
 &= (1-t)^2 \overline{OA}_0 + 2t(1-t) \overline{OA}_1 + t^2 \overline{OA}_2.
 \end{aligned}$$

Le résultat est identique à celui trouvé dans l'exemple sans formule donc P_3 est vraie.

4.4.2. Hérité

On suppose qu'il existe $n > 3$ tel que P_n soit vraie, on va alors démontrer que P_{n+1} est vraie aussi. On réalise pour cela la construction suivante :



Donc on a :

$$\begin{aligned}\overline{OM_n} &= \binom{n-1}{0} a^{n-1} \overline{OA_0} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b \overline{OA_1} \\ &+ \dots + \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k \overline{OA_k} + \dots + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1} \overline{OA_{n-1}} + \emptyset, \\ \overline{ON_n} &= \emptyset + \binom{n-1}{0} a^{n-1} \overline{OA_1} \\ &+ \dots + \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^{k-1} \overline{OA_k} + \dots + \binom{n-1}{n-2} b^{n-2} a \overline{OA_{n-1}} + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1} \overline{OA_n}.\end{aligned}$$

On calcule donc $\overline{OM_{n+1}}$ en faisant le barycentre de M_n et N_n respectivement affectés des coefficients a et b .

$$\begin{aligned}a \overline{OM_n} &= \binom{n-1}{0} a^n \overline{OA_0} + \binom{n-1}{1} a^{n-1} b \overline{OA_1} \\ &+ \dots + \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k \overline{OA_k} + \dots + \binom{n-1}{n-1} a b^{n-1} \overline{OA_{n-1}} + \emptyset, \\ b \overline{ON_n} &= \emptyset + \binom{n-1}{0} a^{n-1} b \overline{OA_1} \\ &+ \dots + \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k \overline{OA_k} + \dots + \binom{n-1}{n-2} b^{n-1} a \overline{OA_{n-1}} + \binom{n-1}{n-1} b^n \overline{OA_n}.\end{aligned}$$

En additionnant termes à termes les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{OM_{n+1}} &= a \overline{OM_n} + b \overline{ON_n} = \binom{n}{0} a^n \overline{OA_0} + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} \right] a^{n-1} b \overline{OA_1} \\ &+ \dots + \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] a^{n-k} b^k \overline{OA_k} + \dots + \binom{n-1}{n-1} b^n \overline{OA_n}.\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{OM}_{n+1} = \binom{n}{0} a^n \overline{OA_0} + \binom{n}{1} a^{n-1} b \overline{OA_1} + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \overline{OA_k} + \dots + \binom{n}{n} b^n \overline{OA_n}.$$

Ce qui s'écrit

$$\overline{OM}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \overline{OA_k}$$

donc P_{n+1} est vraie.

4.4.3. Conclusion

On vient donc de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\overline{OM}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k \overline{OA_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-t)^{n-1-k} t^k \overline{OA_k}.$$

4.4.4. Annexe à la Démonstration par récurrence

Preuve de $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}.$$

Or

$$(p-1)!(n-p)! = (p-1)!(n-1-p)!(n-p)$$

et

$$p!(n-1-p)! = (p-1)!(n-1-p)!p.$$

Donc

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{(p-1)!(n-1-p)!(n-p)p} = \frac{(n-1)!n}{(p)!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

5. Conclusion

Ainsi donc, les courbes permettent de répondre d'une façon très satisfaisante à la problématique posée. C'est l'origine de leur succès puisque celles-ci se retrouvent implémentées dans de très nombreux outils (logiciels de dessin vectoriel mais aussi logiciels de CAO). La démarche peut aussi se généraliser à l'espace avec des surfaces définies sur le même principe. Il s'agit de Carreaux de Bézier ou Patch de Bézier.