

## Puzzles et équadécomposabilité des polygones plans(\*)

Jean-Pierre Friedelmeyer(\*\*)

La construction des puzzles est une activité ludique autant que formatrice en géométrie, à tous les niveaux d'enseignement. Elle pose aussi des problèmes théoriques de fond qui alimentent encore aujourd'hui la réflexion et la recherche de certains mathématiciens. L'un des thèmes étudiés concerne ce que l'on désigne du nom un peu savant d'équadécomposabilité des polygones plans qui est en pratique simplement la résolution du problème suivant : étant donnés plusieurs polygones plans de même aire, les découper chacun selon les mêmes parties triangulaires ou polygonales en nombre fini. En voici un exemple à partir d'un pentagone régulier, un carré et un triangle (figure 1) :

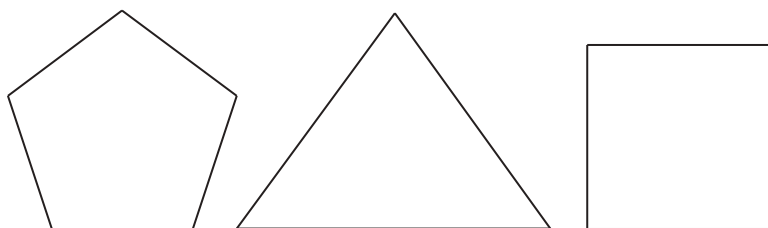


figure 1

dont une équadécomposabilité globale en 11 morceaux est donnée par la figure 2 :

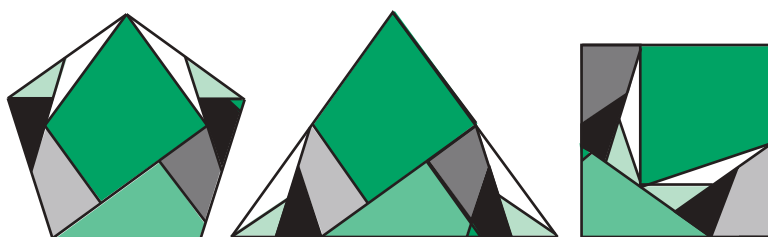


figure 2

Dans la pratique, pour déterminer l'équadécomposabilité d'un nombre quelconque de polygones de même aire, il suffit de l'avoir mise en évidence par paire de polygones puis de superposer les décompositions. Ainsi la décomposition commune des trois polygones de la figure 2 est obtenue par la superposition de deux décompositions du triangle, l'une avec le pentagone (figure 3), l'autre avec le carré (figure 4) :

(\*) La plupart des figures de cet article sont accessibles en couleur, avec une animation qui peut aider à leur compréhension, sur le site <http://stoikeia.free.fr>. Pour plus d'information, voir la rubrique de Gérard Kuntz, Mathématiques en environnement multimédia, incluse dans ce numéro.

(\*\*) [jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr](mailto:jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr)



figure 3

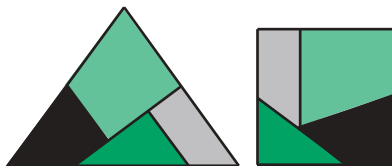


figure 4

Le principe de la superposition est donné par la figure 5 : la décomposition selon les  $A_i$  et celle selon les  $B_j$  donnent, en les superposant, une nouvelle décomposition selon les  $C_k$  qui contient les deux décompositions précédentes.

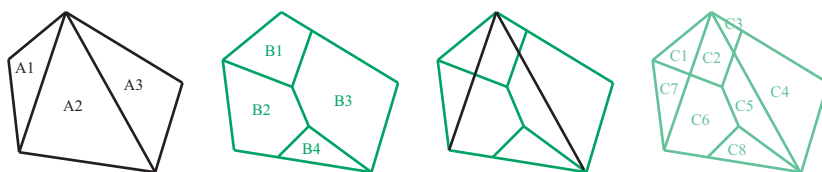


figure 5

Pour être plus précis, donnons les définitions suivantes :

- Les polygones considérés sont dans un plan euclidien et  $G$  est un groupe d'isométries de ce plan.
- Deux polygones sont pseudo-disjoints si leur intersection est constituée uniquement de segments.
- Deux polygones  $P$  et  $Q$  sont équidécomposables selon le groupe  $G$  d'isométries s'il existe un nombre fini de polygones  $A_i$  pseudo-disjoints deux à deux, un même nombre de polygones  $B_j$  pseudo-disjoints deux à deux et un même nombre d'isométries  $f_k$  de  $G$  telles que  

$$P = \cup A_i ; Q = \cup B_j ; \text{ et pour tout } i, f_i(A_i) = B_i, \text{ au besoin après un réarrangement des indices.}$$
- Alors, la relation d'équidécomposabilité selon  $G$  est une relation d'équivalence (notée quelquefois  $\approx$  dans la suite), ce dont nous laissons au lecteur le soin de le démontrer.

N.B. Dans la suite, lorsque nous parlerons simplement d'équidécomposabilité sans préciser le groupe  $G$ , c'est que celui-ci est le groupe des déplacements du plan.

Un domaine particulièrement intéressant et attrayant, dont l'étude n'a pourtant été faite systématiquement qu'au milieu du 20<sup>e</sup> siècle, est l'équidécomposabilité selon le groupe des translations (notée **T**-décomposabilité dans la suite). En voici deux exemples, le premier sur le même carré mais dans deux positions distinctes (figure 6), le second entre un hexagone et un carré (figure 7).

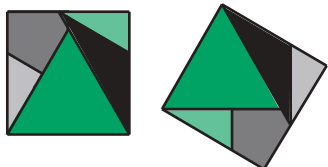


figure 6

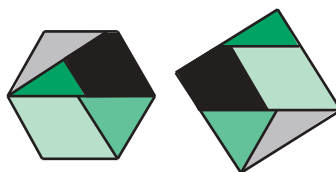


figure 7

Diverses questions se posent alors, les unes concernant l'existence, les autres la construction effective de la décomposition de deux polygones plans, étant entendu qu'une première condition absolument nécessaire est d'avoir même aire. Nous appellerons équivalents deux polygones de même aire. D'où les questions :

- Étant donnés deux polygones d'un plan de même aire, et un groupe d'isométries  $G$  de ce plan, existe-t-il toujours une équidécomposabilité de ces polygones selon  $G$  ?

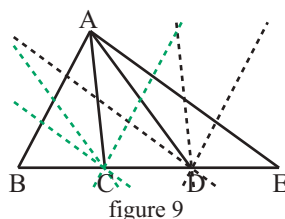
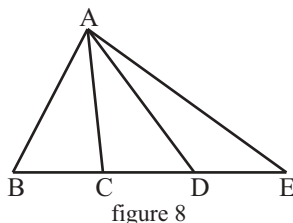
La réponse est oui si  $G$  est le groupe de toutes les isométries du plan. La démonstration en a été faite en 1832 par Farkas Bolyai<sup>(1)</sup> et l'année suivante par un officier prussien nommé Gerwien [1]. Cette dernière présente l'avantage sur l'autre d'être constructive, c'est-à-dire qu'elle donne les moyens effectifs et pratiques de réaliser concrètement cette équidécomposabilité pour deux polygones quelconques.

- Si pour un groupe  $G$  la réponse est non, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes d'équidécomposabilité selon ce groupe (par exemple pour l'équidécomposabilité translatrice) ? ; puis donner des méthodes de réalisation pratique de cette équidécomposabilité selon ce groupe. Ce n'est qu'en 1951 qu'une réponse a été donnée à ce second ensemble de questions, par deux mathématiciens suisses H. Hadwiger et P. Glur [2]. En fait, dans leur article, Hadwiger et Glur étudient d'abord l'équidécomposabilité selon le groupe réunissant les symétries centrales et les translations (notée **ST**-équidécomposabilité) et démontrent que deux polygones plans sont toujours **ST**-équidécomposables.

Dans ce qui suit, nous allons donner successivement quelques constructions simples d'équidécomposabilité pour familiariser le lecteur avec les méthodes de Gerwien, Hadwiger et Glur. Puis nous présenterons leurs idées essentielles pour démontrer la **ST**-équidécomposabilité et la **T**-équidécomposabilité.

### A. Une idée simple mais efficace de Gerwien : la construction de parallèles.

1. La **ST**-équidécomposabilité est simple à mettre en évidence pour un nombre quelconque de triangles ayant tous même sommet et des bases égales et accolées sur une droite (figure 8, avec 3 triangles :  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ). Par chaque sommet de la base, sauf les sommets extrêmes, traçons une parallèle à chacun des côtés issus de  $A$ , soit ici, trois parallèles par chacun des points  $C$ ,  $D$  (figure 9).



(1) Ami et correspondant de Gauss, père de Janos Bolyai, plus célèbre, qui est l'un des inventeurs de la géométrie non euclidienne.

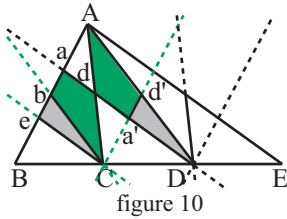


figure 10

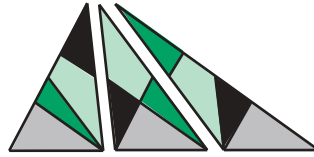


figure 11

Ces parallèles déterminent avec les côtés des trois triangles d'autres triangles ou polygones. On montre facilement que

- 1) s'ils ont un sommet commun situé sur l'un des côtés des triangles initiaux, ce sommet est centre de symétrie (ex.  $abCd$  et  $a'd'Ad$  sont symétriques par rapport à  $d$ ),
- 2) s'ils n'ont aucun sommet commun sur ces côtés (sauf ceux des bases) ils se correspondent dans une translation (ex.  $bCe$  et  $d'Da'$  se correspondent par la translation de vecteur  $\overline{CD}$ ). Nous appellerons procédé n° 1 ce type de décomposition.

2. Le même usage des parallèles est opératoire pour deux triangles ayant une base commune et leur sommets de part et d'autre de cette base commune (figure 12).

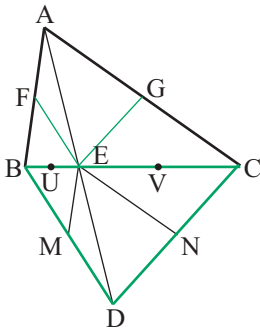
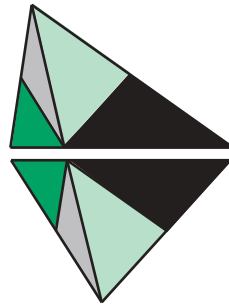


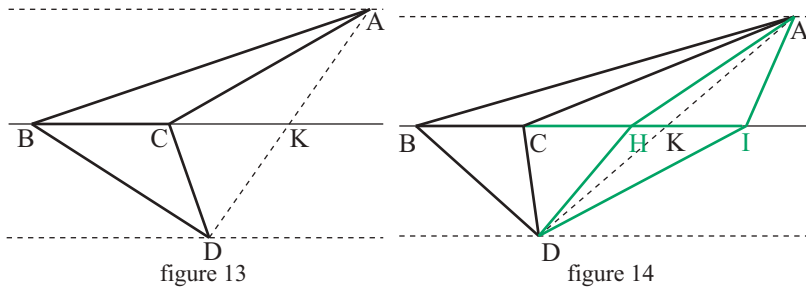
figure 12



Soient  $ABC$  et  $DBC$  les deux triangles ;  $E$  l'intersection de la droite joignant les sommets  $A$  et  $D$  avec la base commune. Dans le triangle  $ABC$  menons par  $E$  les parallèles  $(EF)$  et  $(EG)$  aux côtés du triangle  $DBC$  ; dans le triangle  $DBC$  menons par  $E$  les parallèles  $(EM)$  et  $(EN)$  aux côtés du triangle  $ABC$ . Soit  $U$  le milieu de  $[BE]$  et  $V$  celui de  $[EC]$ . Alors les triangles ayant un côté sur une base se correspondent dans une symétrie centrale (de centre  $U$  ou  $V$ ). Ceux qui n'ont qu'un sommet sur la base se correspondent dans une translation (de vecteur  $\overline{AE}$  ou  $\overline{ED}$ , ou leurs opposés). Nous appellerons procédé n° 2 ce type de décomposition.

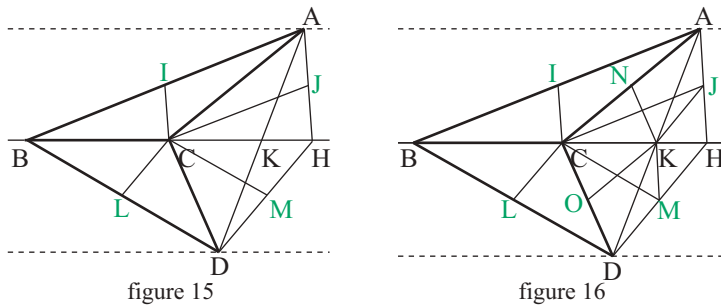
3. Il y a cependant une difficulté dans ce second cas ; c'est que le point  $E$  n'est pas forcément situé entre  $B$  et  $C$  comme dans la figure 13.

Cette dernière situation peut néanmoins se ramener à la précédente, en accolant des triangles de même base situés entre les même parallèles, jusqu'à aboutir à un triangle débordant le point  $K$  (figure 14).



Il suffit après cela de superposer les deux décompositions obtenues par les procédés 1° et 2°. Dans la pratique, la figure devient vite complexe par la multiplication rapide du nombre de polygones réalisant la décomposition. C'est pourquoi nous traiterons un exemple ne nécessitant que l'adjonction d'un triangle pour dépasser l'intersection de (AD) avec la base (BC).

Dans ce cas, la décomposition des deux triangles accolés ACH et ABC, d'une part, DCH et DCB d'autre part, par le procédé n° 1 est très simple, rajoutant les milieux I, J, L, M (figure 15). Le procédé n° 2 appliqué aux triangles ACH et DCH, rajoute les milieux N et O. (figure 16).



Il faut maintenant encore superposer les deux découpages des triangles ACH et DCH. Pour cela il suffit d'appliquer la symétrie de centre E milieu de [CK] pour les segments contenus dans les triangles symétriques CKN et CKO, et les translations de vecteur  $\overrightarrow{DK}$  et  $\overrightarrow{AK}$ , respectivement, pour les segments contenus dans les triangles KOD et KDM, (respectivement ANK et AJK). (figure 17). Cela nous donne ici un total de 10 triangles ou polygones pour réaliser l'équidécomposition des triangles ABC et DBC. Pour cela, il suffit de ramener ces composants dans les triangles ABC et DBC, par translation ou par symétrie centrale, selon la disposition des parties obtenues par le procédé n° 1 (figure 18).

De cette manière les polygones isométriques NPQRS et OTUVW sont envoyés par symétrie respectivement dans les triangles ABC et DBC. Par contre pour les triangles isométriques JQL et UDM, le premier est envoyé par translation dans le triangle ABC alors que le second est envoyé par symétrie dans le triangle DBC.

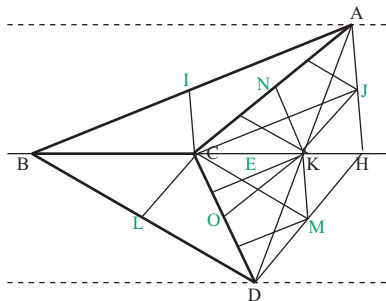


figure 17

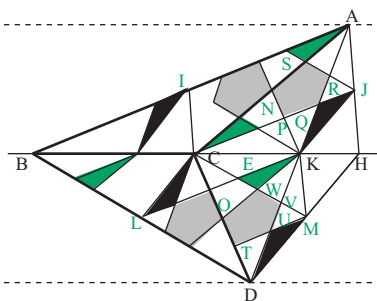


figure 18

En effectuant les transformations pour tous les polygones et triangles composants on obtient finalement l'équidécomposabilité des triangles ABC et DBC en 11 éléments, qu'on peut regrouper en six seulement, en regroupant les morceaux qui sont contigus (figure 19).

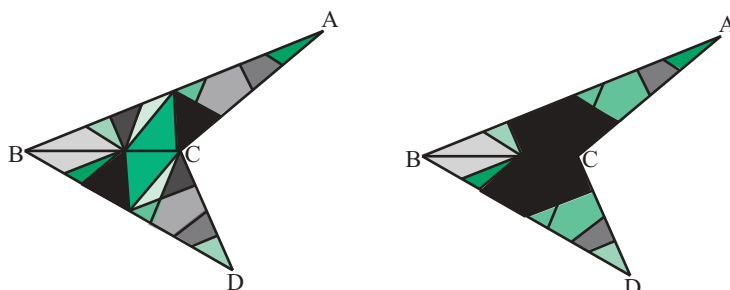


figure 19

**4. Exercice.** Soient donnés deux triangles ABC et ADE de même base et de même hauteur (figure 20). Trouver une **ST**-décomposition de ces deux triangles en les mêmes morceaux triangulaires ou polygonaux (figure 21).

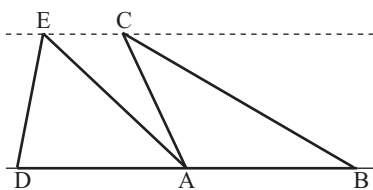


figure 20

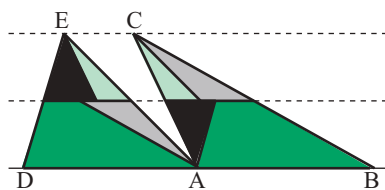


figure 21

Comme certaines (au moins) des pièces communes auront des côtés portés par les côtés des triangles de départ, il paraît opportun de tracer par les sommets de l'un et l'autre triangle des parallèles aux côtés de l'autre, ce qui peut se traduire aussi par des translations amenant certains sommets à coïncider (figure 22). Par ailleurs, la droite des milieux peut jouer un rôle, ces milieux pouvant être centre de symétrie pour certaines pièces éléments (figure 23). Ces deux idées suffisent ici à trouver la décomposition. La démarche de Gerwien s'appuie sur ces idées simples, mais cherche évidemment à mettre en place une méthode générale et systématique de décomposition de deux ou plusieurs polygones équivalents que nous ne traiterons pas ici.

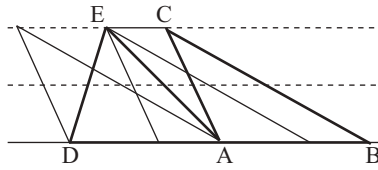


figure 22

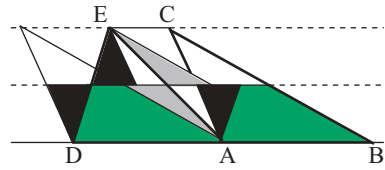


figure 23

## B. Deux rectangles sont toujours T-équidécomposables.

L'équidécomposabilité translatrice est plus contraignante que l'équidécomposabilité générale selon le groupe de toutes les isométries car elle doit également prendre en compte la position relative des polygones considérés dans le plan.

1. Prenons par exemple d'abord deux rectangles dont les côtés sont parallèles. Dans ce cas une décomposition translatrice est relativement simple à mettre en place.

Mais il n'est peut-être pas inutile de rappeler comment construire deux rectangles dont certaines dimensions sont imposées. Soit ABCD un premier rectangle donné et soit à construire un rectangle équivalent dont l'une des dimensions soit BE, que nous plaçons dans le prolongement de [AB] (figure 24).

Soit H l'intersection de (DC) avec la perpendiculaire à (AB) en E et I l'intersection de (BH) avec (AD). Traçons la parallèle à (AB) par I, qui coupe (BC) en G et (EH) en F ; alors on démontrera facilement que BGFE est le rectangle cherché.

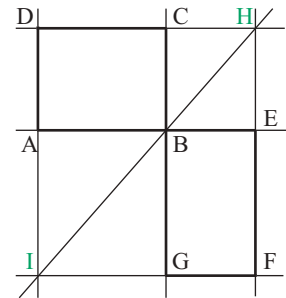


figure 24

Plaçons les deux rectangles équivalents ABCD et AEGF de façon qu'ils aient un sommet commun A (et toujours les côtés parallèles, figure 25).

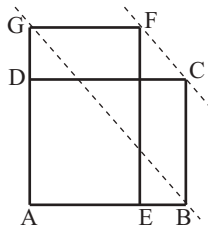


figure 25

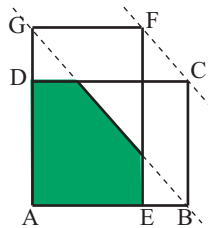


figure 26

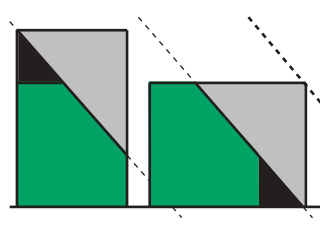


figure 27

Alors (GB) et (FC) sont parallèles (pourquoi ?) et nous donnent la T-équidécomposabilité des deux rectangles (figures 26 et 27). Cependant il peut arriver que la méthode ne marche pas, lorsque la droite (GB) ne coupe pas le côté [DC] dans la partie commune aux deux rectangles, comme dans la figure 28. Il suffira dans ce cas de démultiplier le rectangle commun autant de fois qu'il est nécessaire, jusqu'à dépasser le milieu du côté horizontal (figure 29) et l'on est ramené alors au cas précédent (figure 30).

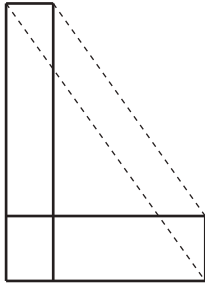


figure 28

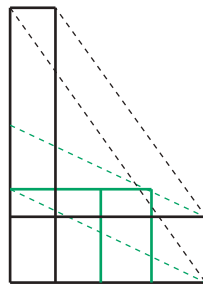


figure 29



figure 30

2. Pour traiter le cas de deux rectangles équivalents mais en position quelconque, Hadwiger et Glur commencent par démontrer l'équidécomposabilité translative d'un rectangle et d'un parallélogramme de même base, situés entre les mêmes parallèles. Celle-ci peut être très simple (figure 31) ou plus compliquée (figure 33), selon que la projection orthogonale des côtés obliques sur l'une ou l'autre base tombe à l'intérieur ou à l'extérieur de cette base. Dans ce second cas (figure 33), on « redressera » de proche en proche le parallélogramme selon le principe de la figure 32.



figure 31



figure 32

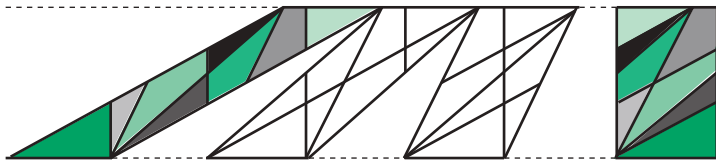


figure 33

Décomposition qui peut finalement se simplifier en regroupant les polygones identiques et contigus (figure 34) ; ce qui donne une autre idée de décomposition, plus simple, et consistant à découper des tranches parallèles de la largeur du rectangle.

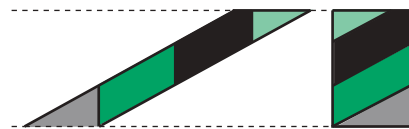


figure 34

3. Puis est étudiée l'équidécomposabilité translative de deux rectangles équivalents quelconques  $R$  et  $R'$ . Le principe consiste à utiliser la transitivité en construisant :

1. les parallélogrammes équivalents  $P$  et  $P'$ , compris entre les mêmes bases que les rectangles,
2. une direction<sup>(2)</sup> sur laquelle les bases des rectangles  $R$  et  $R'$  se projettent selon des segments de même longueur, et sur lesquels on construira des rectangles égaux

(2) Sur la figure 35, soient  $[ad]$  et  $[nm]$  les deux bases,  $m'$  tel que  $\overline{dm'} = \overline{nm}$ . Alors la direction cherchée, définie par  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , est perpendiculaire à  $\overline{am'} = \overline{ad} + \overline{dm'}$  puisque  $\overline{dm'} = \overline{nm}$ .



$R_1$  et  $R'_1$  et, bien sûr, équivalents à  $R$  et  $R'$ . (figure 35)

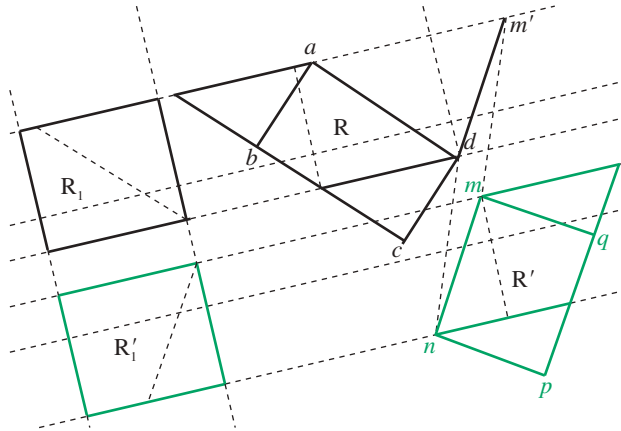


figure 35

Il suffit alors d'appliquer les équivalences  $R \approx P \approx R_1 \approx R'_1 \approx P' \approx R'$ , et de les traduire en décompositions géométriques que l'on superpose au fur et à mesure. (figures 36 et 37)

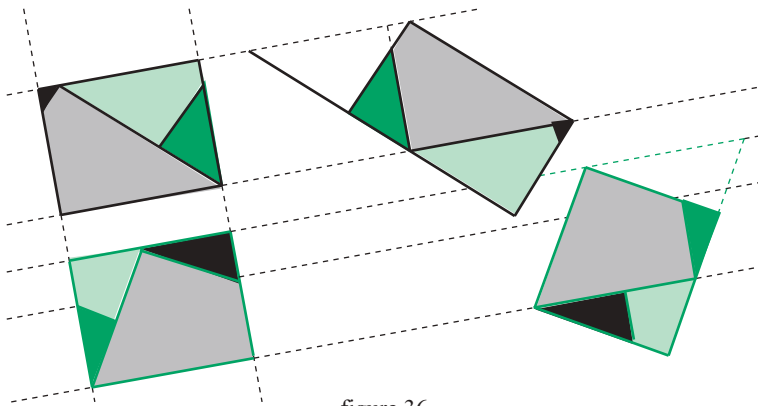


figure 36

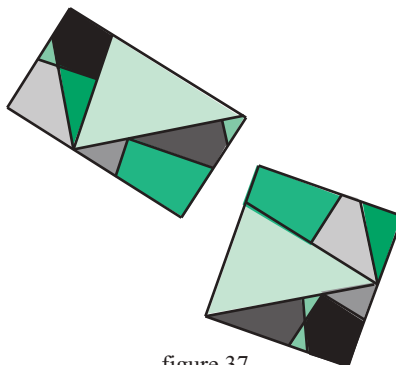


figure 37

#### 4. Un triangle et un rectangle sont toujours ST – équidécomposables.

En effet, un triangle quelconque est ST-équidécomposable avec un rectangle dépendant de ce triangle, selon la construction de la figure 38. Mais comme nous venons de le voir, ce rectangle est lui-même T-équidécomposable avec n'importe quel autre rectangle. Par transitivité, le triangle est ST-équidécomposable avec n'importe quel rectangle, car il est clair que la T-équidécomposabilité implique la ST-équidécomposabilité. En particulier il est équidécomposable avec le carré qui lui est égal en aire.

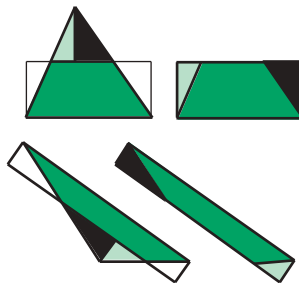


figure 38

C'est à partir de ce résultat que Hadwiger et Glur démontrent que **deux polygones de même aire sont toujours ST-équidécomposables**. La démonstration de ce théorème est assez longue et surtout trop complexe pour être présentée ici (voir [2]). Nous pouvons par contre donner des indications sur un résultat concernant la T-équidécomposabilité.

#### C. Condition nécessaire et suffisante pour que deux polygones équivalents soient T – équidécomposables.

Pourquoi deux rectangles quelconques équivalents sont-ils translativement équidécomposables, alors qu'on essaierait en vain une telle décomposition sur deux triangles quelconques, équivalents mais non isométriques ?

Pour répondre à cette question, Hadwiger et Glur introduisent une fonction  $L$  dépendant à la fois des directions et des longueurs des côtés des polygones considérés. Plus précisément, pour chaque côté, considérons le couple formé par sa longueur et l'angle qu'il fait avec une direction fixe. Les côtés sont orientés de telle façon que le périmètre soit parcouru en gardant l'intérieur du polygone à sa gauche. Leur angle est mesuré de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ , dans le sens trigonométrique. Pour un polygone  $A$ , introduisons la fonction  $S_A$  qui, à une direction faisant un angle  $\theta$ , associe le réel  $S_A(\theta)$  égal à la somme des longueurs des côtés du polygone  $A$  correspondant à l'angle  $\theta$  et la fonction  $L_A$  définie par  $L_A(\theta) = S_A(\theta) - S_A(\theta + \pi)$ . Il est clair que cette fonction est nulle pour un rectangle, quelle que soit la direction de côté choisi. Mais le théorème important, démontré dans l'article de Hadwiger et Glur est le suivant :

**Théorème : Deux polygones équivalents  $A$  et  $B$  sont translativement équidécomposables si et seulement si pour tout  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  on a  $L_A(\theta) = L_B(\theta)$ .**

Que la condition soit nécessaire est simple à comprendre. Supposons que le polygone  $A$  soit décomposé en deux polygones  $B$  et  $C$  et comparons les deux fonctions  $L_A$  et  $L_B + L_C$ . Il suffit de regarder ce qui se passe pour un côté donné. Si  $c$  est un côté de  $B$ , mais pas de  $C$ , il intervient de la même façon dans  $L_A$  et  $L_B$ , et n'intervient pas dans  $L_C$ . Si  $c$  est un côté commun à  $B$  et  $C$ , il est parcouru dans un sens sur  $B$  (angle  $\theta$ ) et dans le sens opposé sur  $C$  (angle  $\theta + \pi$ ), ce qui fait que ses contributions à

$L_B$  et  $L_C$  sont opposées. Dans tous les cas, les deux fonctions  $L_A$  et  $L_B + L_C$  sont égales. Cette égalité se généralise évidemment à un nombre quelconque fini de polygones  $A_i$  composant le polygone  $A$ . Et le fait que la fonction  $L_P$  est invariante par translation de  $P$  permet alors de conclure.

La condition suffisante est nettement moins évidente à établir. Pour qui voudrait s’y attaquer, donnons l’étape intermédiaire utilisée par Hadwiger et Glur qui démontrent d’abord le théorème suivant.

**Théorème :** Un polygone  $A$  pour lequel  $L_A(\theta) = 0$  pour tout  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  est T-équidécomposable avec un carré de même aire.

Des exemples sont évidemment donnés par des carrés isométriques (figure 6) ou par des polygones formés chacun de couples de côtés égaux et parallèles (figure 7 ; voir la construction dans [3]). Un autre bel exemple est donné par Hadwiger dans le puzzle de Périgal bien connu qui démontre le théorème de Pythagore (figure 39).

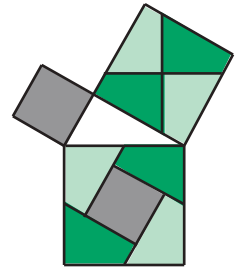


figure 39

Ils donnent aussi, sans autre indication, un exemple moins immédiat car non constitué de couples de côtés parallèles, au moyen de deux trapèzes bien choisis. Nous avons cherché à les construire avec des longueurs uniquement entières, ainsi que celles des polygones éléments. La figure 40 montre le résultat obtenu, sur lequel on vérifiera aisément l’égalité des fonctions  $L$  correspondantes.

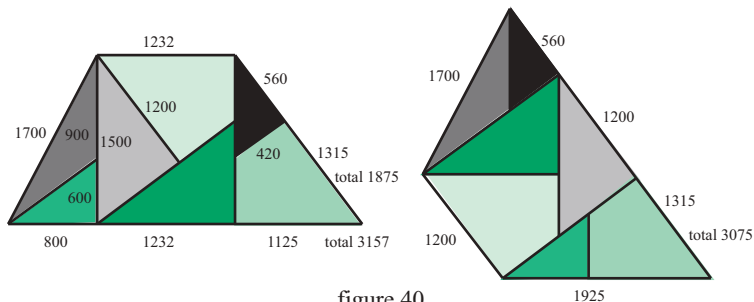


figure 40

## Conclusion.

De nombreux autres résultats resteraient à mettre en place et le sujet est potentiellement très riche en activités pour la classe, à différents niveaux :

- Si l’on se place dans le groupe général des déplacements du plan, on a ce résultat plus simple à démontrer que ceux mis en place par Hawiger et Glur ci-dessus, que deux polygones équivalents sont toujours équidécomposables. Comme nous l’avons dit au début de cet article, la démonstration en a été faite par Gerwien qui donne en même temps la construction effective. On trouvera dans [4] la méthode et des exemples précis d’équidécomposition de deux polygones quelconques du plan selon la méthode de Gerwien. C’est elle aussi qui a servi pour trouver le puzzle pentagone – triangle – carré de la figure 2.

- Les mêmes questions se posent dans l'espace, et plus généralement dans un espace de dimension  $n$  quelconque. Elles ont été à la base de l'un des 23 problèmes (le 3<sup>e</sup>) que Hilbert a posé à la communauté des chercheurs lors du congrès international des mathématiciens à Paris en 1900. Le lecteur intéressé par ces généralisations consultera avec profit la référence au troisième problème de Hilbert [5].
- Enfin nous ne saurions passer sous silence les livres de récréations mathématiques qui restent des mines d'idées sur ce genre de problématique, tels que [6] et [7].

### Bibliographie.

[1] GERWIEN P., *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke* Journal für die reine und angewandte Mathematik, (*Journal de Crelle*), Tome 10, Berlin, 1833, p. 228 à 234.

[2] HADWIGER H. et GLUR P. *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*, Elemente der Mathematik, Band VI, Nr 5, p. 97 à 120, Basel, 1951.

[3] IREM de Strasbourg, *Activités géométriques pour le collège et le lycée, présentées dans une perspective historique*, Vol. I., 1996.

[4] FRIEDELMEYER J-P, *Équidécomposabilité des polygones plans*, L'OUVERT, revue de la régionale APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg, n° 117, déc. 2008.

[5] BOLTJANSKII V. *Hilbert's Third Problem*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[6] FOURREY E., *Curiosités géométriques*, Vuibert, Paris, 1920.

[7] FREDERICKSON G., *Dissections : Plane and Fancy*, Cambridge University Press, 1997.