Le cerveau calculateur(*)

Stanislas Dehaene(**)

Parmi les trois piliers de notre enseignement que sont la lecture, l'écriture et le calcul, la connaissance des mathématiques est peut-être la plus complexe, parce qu'elle implique une composante conceptuelle significative. Il est facile de tester le calcul, mais que signifie maîtriser le « concept de nombre » ? Quand peut-on dire qu'un enfant a « compris » une notion mathématique ? Et les études scientifiques aident-elles à comprendre comment les mathématiques devraient être enseignées ?

Ces dernières années, la psychologie de l'enfant et les neurosciences ont commencé à projeter quelque lumière sur la nature de l'un des constituants les plus élémentaires des connaissances mathématiques, le concept de nombre, et sur la façon dont il se développe avec l'expérience scolaire. Cette compréhension, quoique encore fragmentaire, a beaucoup d'implications pour l'enseignement. Nous commençons à comprendre certains déterminants qui font que certains élèves font tout leur possible en mathématiques alors que d'autres s'en désintéressent. Et surtout, nous pouvons proposer des outils pratiques de remédiation qui, lorsqu'ils sont mis en œuvre précocément, ont un impact significatif sur les enfants présentant une dyscalculie ou d'autres difficultés en mathématiques élémentaires.

Naissons-nous sans le nombre ?

La recherche influente de Piaget, résumée dans *La genèse du nombre chez l'enfant* (Piaget & Szeminska, 1941), suggérait initialement que les enfants d'âge préscolaire n'avaient pas de représentation du nombre stable et invariante, et que les connaissances en arithmétique émergeaient lentement, en tant que construction logique. Les expériences de Piaget paraissaient fournir une base empirique solide à la conclusion que toute compréhension arithmétique faisait défaut aux jeunes enfants. Son résultat le plus connu est l'échec de la « conservation du nombre » chez l'enfant avant l'âge de 4 ou 5 ans. Avant cet âge, les enfants semblaient ne pas comprendre que le nombre est une propriété des ensembles qui demeure invariante à travers divers changements. Pour tester la conservation du nombre, Piaget montrait à un enfant deux rangées également espacées de, disons, six vases et six fleurs, en correspondance biunivoque. Lorsqu'on le questionnait, l'enfant répondait spontanément qu'il y en avait « le même nombre ». Cependant, lorsque Piaget étalait la rangée de fleurs de façon qu'elle devienne plus longue que l'autre rangée, et quoique le nombre n'ait de toute évidence pas été affecté par cette manipulation, l'enfant répondait alors qu'il y avait plus de fleurs que de vases. L'enfant ne semblait pas réaliser que le déplacement des objets laissait leur nombre inchangé. Dans la terminologie piagétienne, il ne « conservait pas le nombre ».

(*) Traduit de l'anglais par Bernard Parzysz.

(**) Professeur au Collège de France, directeur de l'unité INSERM-CEA de Neuro-Imagerie Cognitive ; stanislas.dehaene@gmail.com

Même à un âge plus avancé, autour de sept ans, Piaget trouva que des enfants qui réussissaient dans la conservation du nombre échouaient à d'autres tests de logique mathématique. Par exemple, lorsqu'on leur montrait six roses et deux tulipes et qu'on leur demandait : « Y a-t-il plus de roses ou plus de fleurs ? », la plupart répondaient qu'il y avait plus de roses que de fleurs ! C'était comme s'ils ignoraient un principe élémentaire de la théorie des ensembles : une partie ne peut avoir plus d'éléments que l'ensemble lui-même.

Selon la théorie de Piaget, les connaissances mathématiques se construisent lentement. Les très jeunes enfants débutent dans la vie sans aucun concept d'objet, d'ensemble, de nombre cardinal, d'addition ou de soustraction. Chacune de ces idées, selon Piaget, était une conquête de l'esprit logique de l'enfant, alors qu'il se détachait progressivement de ses interactions sensori-motrices et identifiait progressivement les règles logiques sous-jacentes.

Le constructivisme de Piaget reste très populaire chez les enseignants, et il est hors de doute que certaines mathématiques impliquent un lent processus d'induction (même si leur base cérébrale demeure inconnue). Cependant le point de départ de Piaget était erroné. Les enfants de débutent pas dans la vie sans concepts mathématiques. Les recherches ultérieures ont montré que plusieurs des tests de Piaget étaient biaisés, parce qu'ils impliquaient un dialogue verbal sophistiqué qui était tout simplement hors de portée pour l'âge de l'enfant. En outre, ils trompaient souvent les enfants en nécessitant l'inhibition d'une réponse évidente quoique incorrecte, alors que les enfants n'avaient pas encore les capacités exécutives de haut niveau nécessaires. Quand des tests non verbaux plus simples étaient utilisés, même des enfants de 2 ou 3 ans réussissaient dans la conservation du nombre (pour une revue, voir Dehaene, 1997). Par exemple, lorsqu'on remplaçait les rangées d'objets par des rangées de bonbons M & M's et que les enfants n'avaient le droit d'atteindre que l'une des deux rangées, ils ne se laissaient plus leurrer par des changements de la longueur des rangées, mais cherchaient à atteindre le plus grand nombre, suggérant que même un enfant de 2 ans peut comprendre la constance du nombre face à des changements sans rapport avec lui.

Même les très jeunes enfants comprennent le nombre

Dans les années 1970, les travaux de Rochel Gelman et Randy Gallistel, résumés dans *La compréhension du nombre de l'enfant* (1978), ont contribué à renverser la vue piagétienne. Gelman et Gallistel ont montré que même les enfants d'âge préscolaire ont des intuitions en arithmétique. Au cours de simples « tours de magie » dans lesquels, par exemple, un plateau portant deux objets en perdait subitement un sans cause apparente, ils réagissaient spontanément à ces changements inattendus en montrant de la surprise.

De fait, la réaction de surprise s'avéra extrêmement utile en orientant vers des expériences avec des enfants encore plus jeunes, y compris de moins d'un an. À cet âge, la surprise peut être quantifiée empiriquement en mesurant combien de temps l'enfant reste à regarder ce qu'on lui montre. Si les enfants trouvent le spectacle nouveau ou inattendu, ils réagissent en le regardant plus longtemps. À l'aide de ce simple dispositif on a pu mettre en évidence que même des bébés de quelques mois pouvaient montrer qu'ils possédaient des capacités numériques. Un nombre important d'études comportementales, utilisant des paradigmes d'habituation ou de violation de l'attente, ont désormais révélé chez les très jeunes enfants une claire sensibilité au nombre.

Par exemple, des enfants de six mois peuvent discriminer quand le nombre d'éléments d'un ensemble de points passe de façon inattendue de 8 à 16, ou vice versa (Xu & Spelke, 2000). Dans ces expériences, une grande variété de contrôles expérimentaux assurent que la discrimination ne saurait être basée sur des paramètres non numériques, tels que la taille des objets, la densité ou la surface totale : seule une sensibilité au nombre peut expliquer les résultats.

Même des bébés de six mois peuvent repérer un changement inattendu du nombre d'éléments d'un ensemble.

Dans d'autres expériences, de jeunes enfants ont même détecté des violations dans des événements d'addition ou de soustraction approchées. Par exemple, voyant qu'on cachait cinq objets derrière un écran et qu'on en ajoutait ensuite cinq, ils s'attendaient à voir dix objets et manifestaient de la surprise quand l'écran disparaissait et ne révélait que cinq objets.

Un concept fondateur : le nombre approximatif

La variable clé qui permet aux jeunes enfants de réussir de tels tests est le rapport entre nombre attendu et nombre inattendu. Le rapport doit être assez élevé (par exemple, 8 objets contre 16) pour que les enfants remarquent que quelque chose ne va pas et que le nombre a changé, ou n'est pas ce qu'il devrait être. Pour des bébés de six mois il faut un rapport de 1 à 2, alors que, quelques mois plus tard, à l'âge de neuf mois, un rapport de 1 à 1,5 suffit (par exemple, 8 contre 12). Ainsi, et de façon cruciale, ces expériences ne révèlent qu'une compréhension du nombre *approximatif* chez le jeune enfant.

La précision de ce système est au départ tout à fait grossière, mais elle s'améliore progressivement durant l'enfance, jusqu'à atteindre le niveau adulte d'environ 15 % de précision, ce qui signifie que, en tant qu'adultes, nous sommes capables de discriminer sans compter des nombres tels que 12 par rapport à 14, ou 100 par rapport à 115. Le raffinement de la précision du système du nombre approximatif semble jouer un rôle essentiel dans le développement numérique. Quand on la mesure chez des adolescents, la précision de l'approximation numérique prédit le degré de succès des enfants dans des tests standard de capacités mathématiques (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008). Des enfants ayant des difficultés constantes dans les apprentissages mathématiques, en l'absence d'autre faiblesse sensorielle ou cognitive, montrent une précision drastiquement faible du système de nombre approximatif : à l'âge de 10 ans, ils ne discriminent des nombres qu'au niveau d'un enfant de 4 ans.

Ces observations confortent une hypothèse simple : le système du nombre approximatif se situe au fondement de la construction ultérieure des concepts arithmétiques de plus haut niveau (Dehaene, 1997). Nous débutons tous dans la vie avec une capacité fondamentale à estimer le nombre d'éléments d'un ensemble, et à combiner de tels nombres approximatifs dans des opérations simples d'addition, de soustraction et de comparaison. Ces capacités fondamentales sont, en fait, héritées de notre évolution. Durant notre passé évolutionniste, la capacité à quantifier des ensembles de congénères et d'objets alimentaires a été utile pour notre survie. Ceci est, en fait, présent de façon visible chez différentes autres espèces animales, des dauphins aux rats, aux pigeons, aux lions ou aux singes. Par exemple, sans aucun entraînement, des lions sauvages qui en rencontrent un autre groupe évaluent immédiatement combien ils sont, et ils décident d'attaquer ou de se replier en comparant ces deux nombres.

Une preuve que le système du nombre approximatif fournit tôt aux enfants une intuition du nombre qui est essentielle pour leur future compréhension de l'arithmétique à l'école, provient d'une étude récente sur les enfants d'âge préscolaire. Gilmore, McCarthy & Spelke (2007) ont posé à des enfants de 5 et 6 ans des problèmes tels que : « Sarah a 21 bonbons, elle en reçoit 30 de plus, John a 34 bonbons, qui en a le plus ? ». Les enfants n'avaient jamais reçu d'enseignement sur des nombres de cette taille, ni sur les concepts d'addition et de soustraction. Néanmoins, ils ont spontanément réussi mieux que par l'effet du pur hasard (de 60 à 75 %) dans ces tests arithmétiques complexes, indépendamment de leur origine socio-économique.

La performance était approchée et dépendait du rapport des deux nombres, ce qui indique clairement qu'elle reposait sur le système du nombre approximatif. De façon importante, la variabilité de la performance chez les enfants était prédictive de leur réussite dans le cursus scolaire. Ainsi, la capacité à approximer fournit aux enfants une « intuition » pour des problèmes qu'ils n'ont jamais rencontrés auparavant et une grosse avance pour l'arithmétique.

La capacité innée à approximer fournit aux enfants une intuition pour des problèmes qu'ils n'ont jamais rencontrés auparavant et une grosse avance pour l'arithmétique

Même en tant qu'adultes, nous continuons à nous reposer sur le système du nombre approximatif dans diverses tâches arithmétiques qui toutes mettent en jeu une évaluation rapide ou le « sens du nombre ». Par exemple, quand nous décidons lequel de deux nombres écrits en chiffres arabes est le plus grand, notre rapidité, et même nos erreurs, dépendent de la distance entre les deux nombres : nous allons plus vite pour comparer 31 à 65 que 59 à 65. Quand nous vérifions une opération arithmétique, telle que 24 + 13 = 97, nous pouvons dire rapidement, sans calculer, qu'elle est fausse, pour autant que le degré de fausseté se détecte facilement par simple approximation. Et quand nous évaluons des prix, nos jugements sont également approchés ou basés sur des pourcentages. En résumé, le système du nombre approximatif est essentiel à chaque fois que nous faisons appel à notre intuition rapide de la taille numérique.

Un système cérébral pour le nombre approximatif

Au cours des dix dernières années, nous avons fait des progrès considérables dans la compréhension des systèmes cérébraux qui sous-tendent le système fondateur du nombre approximatif. Grâce aux techniques d'imagerie cérébrale, une aire cruciale pour le sens du nombre a été identifiée. Elle se situe dans le haut de la partie postérieure des deux hémisphères, au sein du lobe pariétal, dans une fissure corticale appelée sulcus intrapariétal. Une raison pour laquelle cette région est considérée comme cruciale est qu'elle s'active chaque fois que nous pensons à un nombre, qu'il soit prononcé ou écrit, sous forme de mot ou en chiffres arabes, ou même simplement lorsque nous examinons un ensemble d'objets en pensant à sa cardinalité. Elle s'active aussi indépendamment de la tâche que nous avons à effectuer avec le nombre : addition, soustraction, multiplication, comparaison, et même la simple vue de l'écriture d'un nombre ou d'un ensemble d'objets suffit à l'activer.

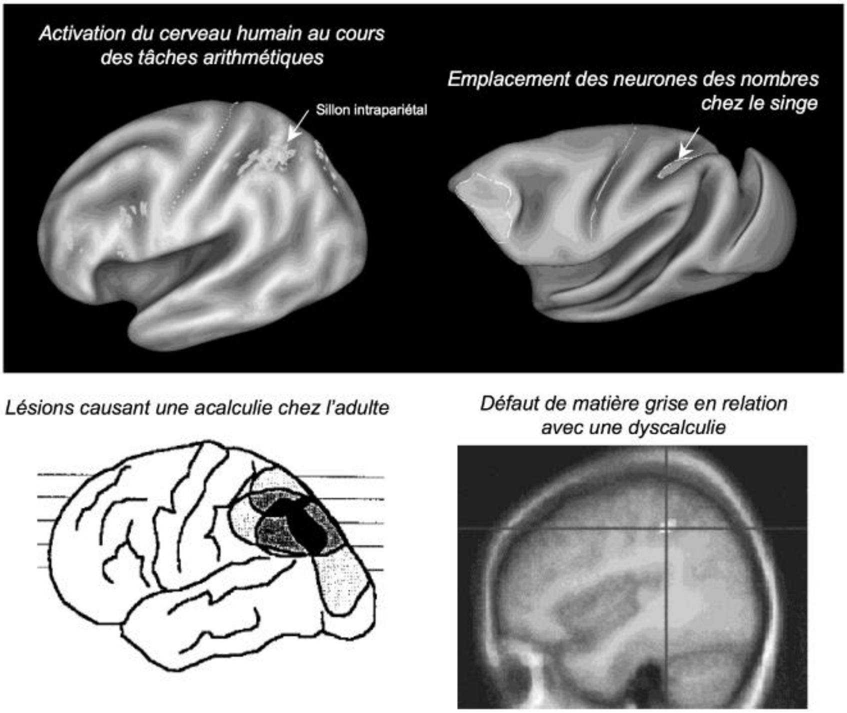

Figure 1. Le sulcus intrapariétal est une zone essentielle pour le traitement des nombres. Elle s'active systématiquement lorsque nous calculons (en haut à gauche) et, chez le singe, contient des neurones accordés sur des nombres (en haut à droite). Des lésions dans son voisinage peuvent être cause de dyscalculie chez l'adulte (en bas à gauche), et on constate des anomalies neuronales dans cette zone chez certains enfants présentant une dyscalculie développementale (en bas à droite, d'après Isaacs et al., 2001).

Une autre raison de penser que la région intrapariétale est centrale pour le traitement du nombre est que l'intensité de l'activation est directement liée à la difficulté de la tâche à accomplir. Par exemple, en prenant des nombres plus grands, nous pouvons augmenter la difficulté des problèmes d'addition, de soustraction ou de multiplication, et il en va de même pour l'activation de la région intrapariétale. De même, en rapprochant deux nombres tels que 59 et 61, nous pouvons rendre plus difficile pour les sujets de décider lequel est plus grand. Et, de nouveau, l'activation intrapariétale augmente parallèlement aux temps de réponse. La région intrapariétale peut même s'activer pour un nombre *subliminal*, c'est-à-dire un nombre qui est présenté si rapidement qu'il n'est même pas perçu par les participants. Ainsi, cette région du cerveau semble nous fournir une évaluation non consciente de la taille du nombre, du type qui sous-tend notre capacité immédiate, spontanée, à reconnaître que quelque chose est faux dans $24 + 13 = 97$.

Les recherches sur les singes ont conduit à une compréhension plus fine de la façon dont le nombre est encodé dans cette région cervicale. Une découverte remarquable est que, individuellement, les neurones s'excitent préférentiellement pour un nombre donné. On peut par exemple trouver un neurone qui préfère la vue de 3 objets, ou l'audition de 3 sons, et s'excite de façon optimale dès que le singe voit ou mémorise la quantité 3. Le même neurone s'excite beaucoup moins en présence d'un seul objet ou de 5 objets.

Une découverte remarquable est que les neurones sont excités préférentiellement pour un nombre donné.

En outre, ces neurones présentent une courbe d'accord voisine : c'est pour 3 objets que le neurone de notre exemple est le plus excité ; il l'est un peu moins pour 2 ou 4 objets, et beaucoup moins pour 1 et 5. Bien sûr, notre concept de la quantité 3 ne repose pas simplement sur un seul neurone. Il semble exister des centaines de milliers de tels neurones, répartis dans plusieurs centimètres de cortex, qui forment collectivement un « code de population » pour les nombres approximatifs, c'est-à-dire que le nombre est codé par la fraction des neurones qui sont excités à un moment donné, ainsi que par ceux qui ne le sont pas.

Une dernière raison qui nous fait penser que cette aire joue un rôle fondateur est que, lorsqu'elle est handicapée par une lésion cérébrale, il peut en résulter des difficultés importantes dans le traitement du nombre (particulièrement quand la lésion se situe dans l'hémisphère gauche). Chez l'adulte, ce syndrome est connu sous le nom d'*acalculie*, et peut être assez sévère pour empêcher le calcul de $7 - 5$. De façon frappante, un syndrome similaire de *dyscalculie développementale* existe chez certains enfants. Ces enfants peuvent très bien avoir une intelligence normale, quoiqu'ils semblent manquer de l'intuition de ce que signifient les nombres et, en conséquence, sont à la traîne par rapport aux autres dans plusieurs mesures de discrimination numérique, d'intuition arithmétique et de compréhension automatique de la numération arabe. Il existe plusieurs variétés de dyscalculie, incluant des difficultés à mémoriser les tables de multiplication ou à calculer des opérations à plusieurs chiffres. Mais un sous-type au moins comporte clairement une difficulté conceptuelle à associer un sens quantitatif à l'écriture des nombres en chiffres arabes. L'imagerie cérébrale a révélé que certains de ces enfants souffrent d'une activation réduite ou d'un défaut de matière grise dans la région intrapariétale droite ou gauche, à l'endroit précis qui est activé au cours des tâches arithmétiques chez les sujets normaux (pour une revue, voir Dehaene, Molko, Cohen & Wilson, 2004). Des lésions cérébrales pré- ou périnatales, parfois dues à une cause génétique, semblent induire une désorganisation précoce de cette région du cerveau, déficit précoce qui semble avoir un effet en cascade sur le développement numérique ultérieur.

Les multiples représentations corticales du nombre

Il serait cependant erroné de penser que l'arithmétique repose entièrement sur une seule région cérébrale, qui agirait comme un « module » uniquement dédié au nombre. Il n'y a pas de modules dans le cortex.

Même dans ce point chaud du cortex intrapariétal, la densité des neurones codant les nombres ne dépasse jamais 15 % environ. Les autres neurones, entremêlés dans la même région, s'occupent du mouvement, du toucher, de la taille, de la position ou d'autres variables (comme nous le verrons plus loin, ceci peut expliquer les interactions et les confusions qui se produisent entre nombre et taille ou position).

Il serait erroné de penser que l'arithmétique repose entièrement sur une seule région cérébrale, qui agirait comme un « module » uniquement dédié au nombre.

Une organisation à triple code

De façon plus cruciale, et bien que la région intrapariétale joue un rôle fondateur dans le développement arithmétique, elle ne serait jamais capable d'opérer sans l'aide de nombreux autres circuits cérébraux . Lorsque nous observons un ensemble d'objets et évaluons leur nombre, une chaîne de zones corticales, depuis le cortex visuel primaire jusqu'au cortex intrapariétal, est impliquée dans l'extraction progressive du nombre et l'exclusion des paramètres non pertinents tels que la taille des objets, leur forme ou leur position. Quand nous voyons un nombre écrit comme *quinze*, d'autres régions appartenant au système langagier de l'hémisphère gauche sont impliqués dans le décodage orthographique, lexical et phonologique du mot. Ce n'est qu'après que le mot a été identifié au sein de ce système alphabétique appris qu'il peut être associé à une quantité spécifique au sein du cortex intrapariétal. De même, lorsque nous voyons une écriture arabe comme 15, d'autres aires visuelles décodent son contenu chiffré avant de lui faire correspondre la quantité correspondante. Il y a ainsi une organisation à « triple code », dans laquelle trois réseaux cérébraux, ceux des quantités, de la numération verbale et de la numération arabe, communiquent entre eux, de sorte qu'en tant qu'adultes nous pouvons rapidement passer d'une représentation à l'autre.

Cette organisation à triple code a des conséquences essentielles pour notre compréhension du développement numérique. Il y a des indices que le système de la quantité approximative est présent très tôt, particulièrement dans la région intrapariétale droite où même des bébés de 3 mois présentent une activation au cours de tests numériques simples.

Trois réseaux cérébraux différents, pour les quantités, la numération verbale et la numération arabe, communiquent entre eux lorsque nous évaluons le nombre d'éléments d'un ensemble d'objets.

Ces indices confortent l'idée que le sens du nombre ne repose pas sur un lent processus d'induction ou le constructivisme piagétien, mais est en grande partie défini sur une base génétique. Cependant, les systèmes relatifs à la numération verbale ou arabe ne peuvent manifestement pas être hérités ; ce sont des inventions culturelles récentes, spécifiques de notre monde occidental, qui nécessitent un apprentissage.

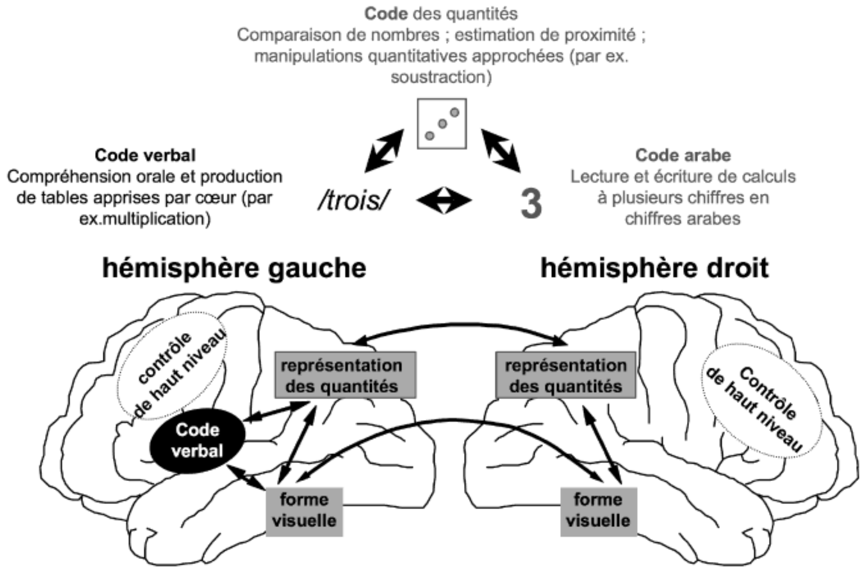

Figure 2. Vue schématique du modèle du triple code pour le traitement des nombres. Trois représentations cardinales, réalisées chacune par un réseau cérébral distinct, sous-tendent notre capacité à manipuler les nombres dans les formats verbal, arabe ou quantitatif, et à passer rapidement d'un code à l'autre selon la tâche demandée.

Aussi, selon ce point de vue, le développement numérique consiste, pour une large part, en la consolidation de liens automatisés efficaces entre les représentations corticales des nombres sous des formes variées. En tant qu'adultes, nous nous mouvons rapidement en tous sens entre les formes écrite, parlée ou approchée d'un nombre donné, sans même remarquer que nous permutons entre différents systèmes cérébraux. Chez les enfants, cependant, les connexions sont beaucoup moins efficaces, et elles mettent des années à s'automatiser. Au niveau cérébral, les méthodes d'imagerie indiquent que l'entraînement arithmétique développe à la fois le système du nombre approximatif, particulièrement dans la région intrapariétale gauche, et les autres représentations symboliques des nombres qui reconnaissent leur forme verbale.

Un objectif important de l'éducation arithmétique devrait être d'accroître l'aisance dans les intuitions numériques, jusqu'à ce que des intuitions comme 3 + 4 ou 16 − 8 deviennent aussi rapides et efficaces qu'elles le sont lorsqu'on présente à un jeune enfant les ensembles d'objets correspondants.

Un objectif important de l'éducation arithmétique devrait être d'accroître l'aisance dans les intuitions numériques

Développer des recettes pour le calcul

Un autre objectif important de l'éducation arithmétique consiste en le développement de recettes efficaces ou d'algorithmes de calcul. Au niveau cérébral, différents types de calculs paraissent reposer sur des systèmes cérébraux partiellement distincts au sein de l'architecture à triple code. Par exemple, pour rapporter un fait multiplicatif comme $3 \times 9 = 27$, nous utilisons principalement le code verbal qui emmagasine ces faits sous forme d'associations verbales (« trois fois neuf font vingt-sept »), de façon très semblable aux poèmes et aux prières. Il en résulte qu'ils sont codés dans une langue spécifique, ne se transfèrent pas facilement dans l'autre langue chez les bilingues, et peuvent être effacés par des lésions de l'hémisphère gauche qui rendent le patient aphasique ou handicapé langagier. Réciproquement, lorsque nous effectuons une soustraction comme $12 - 5 = 7$, nous nous reposons sur le système arabe pour traiter spatialement les symboles, et sur le système des quantités pour récupérer la quantité correspondante. Ainsi, des lésions du cortex intrapariétal peuvent causer une déficience pour la soustraction mais épargner les faits multiplicatifs.

L'implication pour l'éducation arithmétique est que beaucoup de systèmes cérébraux différents, de même que les cheminements qui les relient entre eux, doivent être entraînés avant que l'enfant ne soit à l'aise en arithmétique. Il n'est pas nécessaire d'étendre l'entraînement à la multiplication à la soustraction ou à la comparaison. En outre, pour chaque problème, l'enfant doit découvrir quelle stratégie cognitive et quel système cérébral sont les plus utiles. Un certain nombre de raccourcis doivent également être identifiés (par exemple, trouver la réponse à $6 + 3 - 3 = ?$ sans calcul). Au départ, le calcul est une procédure qui demande beaucoup d'efforts et une concentration intense, des choix stratégiques et la mise en œuvre de ressources mémorielles. Ces facteurs se reflètent dans l'intense activation du cortex préfrontal, qui est la grande étendue du cerveau située juste derrière le front, particulièrement développée chez les humains, comparativement aux autres primates. Le cortex préfrontal est une région du cerveau qui s'est développée récemment et qui joue un rôle essentiel dans notre capacité à concevoir et à mettre en œuvre des stratégies nouvelles, non routinières. De façon cruciale, il agit comme une unique ressource centrale qui ne peut être partagée entre différentes tâches, et est par conséquent responsable du fait que nous ne pouvons pas effectuer à la fois plusieurs opérations qui demandent des efforts importants. L'automatisation des opérations arithmétiques libère la ressource centrale du cortex préfrontal. Quand un enfant ou un adulte acquiert de l'expertise dans une tâche, la somme d'activité du cortex préfrontal diminue et est progressivement remplacée par l'activation de systèmes cérébraux plus automatiques, à l'arrière de la tête.

Un autre objectif de l'éducation est de libérer l'esprit de l'enfant pour des problèmes plus complexes par l'acquisition d'un haut degré d'aisance dans les opérations arithmétiques de base.

Avant qu'une telle automatisation n'intervienne, les ressources préfrontales de l'enfant sont totalement absorbées par les mécanismes du calcul et ne peuvent être consacrées à d'autres aspects importants, comme de vérifier la pertinence d'une solution ou le sens de l'ensemble du problème. Ainsi, un troisième objectif important de l'éducation est de libérer l'esprit de l'enfant pour des problèmes plus complexes, par l'acquisition d'un haut degré d'aisance et d'automaticité dans les opérations arithmétiques.

La construction du nombre exact

L'exposition à des symboles numériques tels que le mot *dix-sept* ou le symbole 17 fait beaucoup plus qu'interconnecter des systèmes qui préexistent dans le cerveau. Il faut se rappeler que, chez le petit enfant comme chez l'animal, le système des quantités n'est qu'approximatif, c'est-à-dire qu'il discrimine les nombres d'après leur rapport, et par conséquent ne peut discriminer des nombres très voisins comme 17 et 18. Il se trouve que seuls les humains comprennent la différence catégorielle qui existe entre des nombres consécutifs, quelque grands qu'ils soient. Cette connaissance est évidemment essentielle en mathématiques, par exemple pour décider que 17 est premier tandis que 18 ne l'est pas.

La compréhension du nombre exact n'émerge pas spontanément, mais dépend de l'éducation. La démonstration de cette assertion repose sur des études psychologiques menées auprès d'adultes de cultures lointaines de l'Amazonie, comme les Munduruku (Pica, Lemer, Izard & Dehaene, 2004). La langue munduruku ne possède que quelques noms de nombres (jusqu'à cinq). Ces mots ne sont pas utilisés pour compter et ne peuvent pas être récités à la suite comme une comptine. En outre, ils ne semblent pas avoir de signification précise. Le mot pour cinq, par exemple, peut être utilisé pour n'importe quoi de 4 à environ 9 objets, suggérant qu'il signifie quelque chose comme « une cinquaine » ou « une poignée » (ce qui est sa traduction littérale). En l'absence d'un système de comptage, les Munduruku semblent uniquement mettre en jeu le système du nombre approximatif que nous partageons avec d'autres espèces animales. Ils ont de fait élaboré des intuitions arithmétiques et peuvent effectuer des calculs approchés avec de grands nombres d'objets, bien au-delà de l'étendue de leur vocabulaire, mais ils ne peuvent anticiper le résultat d'opérations exactes comme $7-5$.

Les adultes Munduruku nous font penser à quoi ressemblerait notre système arithmétique, n'étaient les nombreux moyens que nos cultures ont inventés, tels que les mots pour compter, le comptage sur les doigts ou le boulier. En l'absence de ces moyens, notre arithmétique ne serait qu'approchée et non pas exacte. Dans les premières années de leur vie, les enfants occidentaux se comportent comme les Munduruku, mais ils dépassent rapidement ces limitations et évoluent vers un système numérique exact quand ils sont confrontés à un système de comptage. Cette très importante transition développementale survient lentement, entre les âges de 2 ans 1/2 et 4 ans, lorsque l'enfant commence à acquérir la routine du comptage. La compréhension des mots pour compter vient de manière séquentielle : d'abord le mot un, puis le mot deux, et ainsi de suite. Ainsi, durant plusieurs mois, un enfant peut-il connaître le sens du mot un, par exemple en faisant montre d'une capacité à fournir un seul objet ou à nommer un ensemble ayant un seul objet. Cependant, le même enfant peut ne pas connaître le sens des mots deux et trois, par exemple en saisissant un nombre d'objets aléatoire lorsqu'on lui demande d'en fournir deux (Wynn, 1992).

Les enfants apprennent lentement à associer aux mots *un*, *deux*, *trois* et *quatre* les quantités correspondantes, un mot après l'autre, jusqu'à ce que, à un moment donné, ils réalisent que chaque mot correspond à un nombre différent. Six mois peuvent être nécessaires pour qu'ils comprennent que les noms de grands nombres tels que six, huit et dix correspondent à des quantités distinctes, et commencent à saisir leur relation d'ordre (Le Corre & Carey, 2007). Ce n'est pas avant l'âge de 5 ans qu'ils comprennent qu'un mot tel que *huit*, s'il s'applique à un ensemble, continue à s'appliquer lorsque les objets sont déplacés, mais cesse de s'appliquer si on les augmente de 1, si on les double ou si on les divise par 2. Ainsi, la connaissance verbale de l'enfant reste initialement en arrière de son sens du nombre (comme le suggère, en fait, l'échec des enfants dans de nombreux tests piagétiens). Cependant, une fois qu'il maîtrise pleinement la correspondance entre nombres verbalisés et quantités, son concept du nombre semble changer radicalement. Il conceptualise alors les nombres comme des entités discrètes dont chaque catégorie se distingue de celle qui la suit dans la série.

La transition vers les nombres exacts

À l'heure actuelle, personne ne comprend les mécanismes sous-tendant cette transition vers les nombres exacts. La théorie dominante est que la capacité à suivre la trace d'objets individuels joue un rôle essentiel. Je me réfère ici à encore un autre système de représentation, le *système de suivi des objets*. Même les jeunes enfants semblent capables de suivre la trace d'un à trois objets dans l'espace, et par conséquent distinguent de façon catégorique si un, deux ou trois objets sont présents devant eux, sans souffrir de la limitation du rapport qui caractérise le système du nombre approximatif (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004). Notre système visuel, chez l'enfant tout comme chez l'adulte, paraît incorporer un système de pistage qui suit la trace d'un à trois objets.

Parce que ce système est exact, et bien qu'il ne soit disponible que pour de très petits nombres, il peut aider l'enfant à inférer le sens exact de tous les nombres. Quand un enfant compte, il peut découvrir que chaque nouvel élément compté conduit à l'occupation d'une « case » de mémoire supplémentaire. et qu'il augmente également la quantité représentée dans le système du nombre approximatif. D'une manière ou d'une autre, la compréhension de ces correspondances déclenche une induction sur tous les nombres : l'enfant réalise soudain qu'à chaque mot du comptage correspondra toujours une quantité différente. On ne comprend pas encore très bien non plus comment ce changement conceptuel se traduit pas une modification cérébrale au sein des réseaux neuronaux du cerveau, mais la théorie actuelle est que le cerveau humain éduqué peut contenir des neurones codant des nombres *précis*, accordés finement sur un nombre exact, au lieu des neurones grossièrement accordés que l'on trouve chez les autres primates.

Réunir le nombre et l'espace

Un dernier aspect de l'intuition numérique humaine, qui semble être fortement influencé par l'éducation et l'arrière-plan culturel est le lien entre le nombre et l'espace. Cette concordance joue un rôle essentiel en mathématiques. Chaque fois que nous *mesurons* une longueur, nous admettons que les nombres peuvent s'appliquer aux étendues spatiales. La géométrie – littéralement, mesure de la terre – est précisément fondée sur cette prémisse, de même que beaucoup de concepts mathématiques de haut niveau, comme les nombres irrationnels, les coordonnées cartésiennes, la droite réelle et le plan complexe. Les recherches psychologiques et neurobiologiques indiquent que le concept d'« espace numérique » ou de « droite numérique » a des racines très profondes dans le cerveau. Chez la plupart des humains adultes, la simple présentation d'un nombre en écriture arabe provoque automatiquement un biais spatial, à la fois dans la réponse motrice et dans l'orientation de l'attention (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993).

Même quand nous effectuons une tâche aussi simple que décider si un nombre est pair ou impair, ou s'il est plus grand ou plus petit que 5, nous répondons plus vite lorsque les petits nombres demandent une réponse du côté gauche et les grands nombres une réponse du côté droit que lorsqu'on utilise la correspondance inverse. L'association des grands nombres au côté droit de l'espace est complètement inconsciente, bien qu'elle puisse devenir consciente chez de rares individus, qui « voient » littéralement les nombres comme des étendues dans un espace à 2 ou 3 dimensions, particularité connue sous le nom de synesthésie nombre-espace.

Le concept de ligne numérique a des racines très profondes dans le cerveau.

La direction de la correspondance nombre-espace est culturellement déterminée. Elle varie avec la direction d'écriture ; c'est ainsi que la droite numérique mentale va de la gauche vers la droite chez les sujets occidentaux, mais de la droite vers la gauche chez les sujets arabes ou hébreux. Cependant, le concept selon lequel le nombre est analogue à un espace possède des racines plus profondes et universelles. Même les Munduruku, qui vivent dans la jungle amazonienne et n'ont qu'un accès très restreint à l'éducation, comprennent spontanément que les nombres sont en correspondance avec l'espace d'une façon régulière (Dehaene, Izard, Spelke & Pica, 2008).

Quand nous calculons, les intuitions de la droite numérique augmentent et biaisent même notre compréhension des opérations d'addition et de soustraction. Un code spatial et un sens du mouvement sont automatiquement activés au cours de l'arithmétique mentale (Knops, Thirion, Hubbard, Michel & Dehaene, 2009). Lorsque les sujets approximent la somme ou la différence de deux nombres, leurs estimations dépassent les réponses correctes, comme s'ils allaient « trop loin », vers les grands nombres au cours de l'addition et vers les petits nombres au cours de la soustraction. En outre, lorsqu'ils choisissent une réponse parmi plusieurs résultats plausibles présentés sur un écran d'ordinateur, les sujets présentent un biais spatial orienté vers les choix qui apparaissent du côté supérieur droit de l'écran pour l'addition, et du côté supérieur gauche pour la soustraction.

Ces interactions entre nombre et espace semblent avoir leur origine dans le cortex pariétal. Le système quantitatif, dans la région intrapariétale du cortex, se situe remarquablement près, voire même chevauche, d'autres régions du cerveau qui interviennent dans le codage de dimensions spatiales telles que taille, position et direction du regard (Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005). Lorsqu'un nombre est montré, l'activation pariétale induite par sa quantité s'étend aux aires impliquées dans le codage spatial, et elle le fait de façon importante : les petits nombres créent une plus grande activation de l'hémisphère droit, qui code la partie gauche de l'espace, tandis que les grands nombres créent une plus grande activation de l'hémisphère gauche, qui code la partie droite de l'espace. Quand nous faisons une addition, l'activation semble se mouvoir vers le cortex qui code le côté droit de l'espace, comme si nous déplacions littéralement notre attention du nombre initial vers une région située à droite sur la droite numérique (Knops et al., 2009).

La raison de l'accent mis sur ces relations nombre-espace est qu'elles trahissent un aspect universel de l'apprentissage humain : le *recyclage* d'anciens circuits cérébraux évolutifs au service de nouveaux mécanismes culturels. Nous réutilisons littéralement des composants qui sont déjà structurés par l'évolution et en faisons un usage nouveau, quoique apparenté. Ici, les concepts de nombre et d'arithmétique s'étendent à des circuits anciens consacrés à l'espace et aux mouvements oculaires… Dans un ouvrage récent, j'ai décrit comment l'acquisition de la lecture fait aussi usage d'anciens circuits dévolus à la reconnaissance d'objets (Dehaene, 2009). Dans un cas comme dans l'autre, nous pouvons comprendre à la fois l'ampleur des intuitions des enfants, mais aussi les difficultés auxquelles ils doivent faire face lors de l'apprentissage, en réalisant qu'ils essaient de faire entrer de nouveaux concepts dans de vieilles chaussures. Pour eux, l'idée que le nombre est analogue à l'espace est une idée très intuitive. D'autres idées, comme celle qu'une fraction (deux nombres) est aussi un nombre, peuvent être trés contre-intuitives, car elles ne s'accordent avec aucun concept préexistant et nécessitent beaucoup plus de recyclage.

Même la correspondance du nombre vers l'espace paraît subir un changement considérable au cours du développement arithmétique, développement qui est, lui aussi, essentiel pour une compréhension approfondie de l'arithmétique. Quoique les correspondances nombre-espace soient présentes chez tous les humains, même en dehors de toute éducation, la forme de cette correspondance change au cours de l'éducation (Siegler & Hopfer, 2003). Quand on leur demande de désigner l'emplacement correct d'un nom de nombre oralisé sur un segment de droite étiqueté depuis 1 à gauche jusqu'à 100 à droite, même les élèves de maternelle comprennent la tâche et se comportent de façon non aléatoire, plaçant systématiquement les petits nombres à gauche et les grands nombres à droite. Néanmoins, ils ne distribuent pas les nombres régulièrement, de façon linéaire. Ils attribuent plutôt davantage de place aux petits nombres, établissant ainsi une correspondance comprimée. Par exemple, ils placent 10 aux environs du milieu de l'intervalle de 1 à 100, comme s'ils répondaient en utilisant une échelle logarithmique. Cette échelle est, bien sûr, tout à fait celle qu'on attend d'un système approximatif basé sur les rapports de nombres : il y a le même rapport entre 1 et 10 qu'entre 10 et 100. Mes collègues et moi avons récemment observé le même phénomène chez les Munduruku, même chez des sujets adultes et même dans l'intervalle 1 – 10 (Dehaene et al., 2008). Les Munduruku ont de fortes intuitions sur les correspondances nombre-espace, puisqu'ils peuvent systématiquement mettre en correspondance des nombres sur un segment. Cependant, leurs réponses sont espacées de façon logarithmique, de telle sorte qu'ils placent 3 ou 4 au milieu entre 1 et 10.

De façon frappante, cependant, lorsque les enfants sont soumis à la culture et à l'éducation occidentales, un saut depuis la correspondance logarithmique vers une correspondance linéaire apparaît. Soudain, l'enfant comprend que des nombres consécutifs doivent être régulièrement espacés, et il commence à répondre d'après l'échelle linéaire classique (la seule qui permette des mesures faciles). Ce changement conceptuel intervient tout à fait tard dans le développement, entre le CP et le CM1, et dépend de l'expérience de l'élève et de l'étendue des nombres testés. Une telle compréhension va de pair avec la compréhension des nombres exacts. Bien sûr, la compréhension linéaire est corrélée à la réussite aux tests scolaires mathématiques standard, et l'entraînement de l'une améliore l'autre. Il apparaît ainsi que la conceptualisation des nombres comme une sorte d'espace, et la compréhension de la linéarité de cet espace, sont des jalons essentiels dans le développement cognitif de l'arithmétique.

Conclusion : implications pour l'éducation

Dans cet article, j'ai insisté sur la façon dont les compétences en arithmétique de l'enfant sont fondées sur une représentation fondatrice du nombre approximatif qui est héritée de notre passé évolutionniste et repose sur la région intrapariétale du cortex cérébral. Cependant, j'ai aussi insisté sur le fait que le développement arithmétique repose, pour une large part, sur la capacité à interconnecter cette représentation quantitative avec d'autres représentations du nombre, verbale ou arabe, ainsi que sur le recyclage de régions corticales voisines impliquées dans la représentation de l'espace. La réalisation, de façon très aisée et automatisée, d'interactions entre ces représentations est un objectif essentiel de l'éducation, tant pour elle-même (notamment parce qu'elle raffine nos concepts et conduit à une représentation *exacte* et *linéaire* du nombre) que parce qu'elle libère les ressources mémorielles à toute main de notre cortex préfrontal pour d'autres usages.

On peut mettre en œuvre toutes sortes de moyens pour améliorer cette interconnection développementale des représentations mentales. Jouer à des jeux simples, comme des jeux de comptage, des jeux de boulier ou des jeux de société faciles comme le jeu de l'oie, peut être fort efficace pour entraîner le système de la numération. Des expériences contrôlées ont montré que les enfants qui sont entraînés à l'aide de tels jeux bénéficient d'une compréhension plus précoce des relations linéaires entre le nombre et l'espace, et montrent des bénéfices généralisés et durables dans l'arithmétique scolaire. De tels jeux semblent particulièrement utiles quand on y a recours à un âge très précoce et chez des enfants de milieu défavorisé, qui semblent particulièrement exposés à des déficits en arithmétique. En gardant ces découvertes à l'esprit, mon laboratoire a développé et testé un jeu vidéo, la *Course aux nombres* (www.unicog.org/NumberRace), qui est spécialement conçu pour consolider les liens entre les trois représentations cardinales des nombres (quantitative, verbale, arabe) et améliorer la compréhension spatiale des nombres (Wilson, Revkin, Cohen, Cohen & Dehaene, 2006).

Références

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense*. New York, Oxford University Press.

Dehaene, S. (2009). *Reading in the brain*. New York, Penguin Viking.

Dehaene, S., Bossini, S. & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology : General*, 122, 371-396.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E. & Pica, P. (2008). Log or linear ? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, 320 (5880), 1217-1220.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. & Wilson, A.J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14 (2), 218-224.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Science*, 8 (7), 307-314.

Gelman, L. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge MA : Harvard University Press.

Gilmore, C.K., McCarthy, S.E. & Spelke, E. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature*, 447 (7144), 589-591.

Halberda, J., Mazzocco, M.M. & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455 (7213), 665-668.

Hubbard, E.M., Piazza, M., Pinel, P. & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6 (6), 435-448.

Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E., Michel, V. & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. À paraître.

Le Corre, M. & Carré, S. (2007). One, two, three, four, nothing more : an investigation of the conceptual sources of the verbal counting system. *Cognition*, 105 (2), 395-438.

McCrink, K. & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, 15 (11), 776-781.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V. & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, 306 (5695), 499-503.

Siegler, R.S. & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantities. *Psychological Science*, 14 (3), 237-243.

Wilson, A.J., Revkin, S.A., Cohen, D., Cohen, L. & Dehaene, S. (2006). An open trial assessment of the "Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavior and Brain Function*, 2 (1), 20.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220-251.

Xu, F. & Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74 (1), B1-B11.