Le problème de Tammes

Pierre Legrand(*)

1. Origine

1.1. Un problème de botanique

Le botaniste hollandais Tammes découvrit, en étudiant les grains de pollen, que ces grains(1), approximativement sphériques, portent des orifices dont la répartition présente une certaine régularité, en ce sens qu'ils semblent aussi éloignés que possible les uns des autres.

Dans l'article, daté de 1930, où il rendait compte de cette trouvaille, il s'interrogeait sur ce qui fut très vite appelé le « problème de Tammes » :

Comment répartir *n* points sur une sphère de sorte que la plus petite de leurs distances mutuelles soit aussi élevée que possible ?

1.2. Une fausse évidence

Un premier réflexe est de penser qu'il suffit de mettre les points aux sommets d'un polyèdre régulier inscrit dans la sphère, c'est-à-dire un tétraèdre pour $n = 4$, un octaèdre pour $n = 6$, un cube pour $n = 8$, un icosaèdre pour $n = 12$ et un dodécaèdre pour $n = 20$.

Cette idée se heurte à deux objections majeures :

• Puisqu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers que ces cinq-là, que se passe-t-il pour les autres valeurs de n ?

• Est-on vraiment si sûr que, même dans ces cinq cas, le polyèdre régulier inscrit fournit la solution ?

1.3. Un problème largement ouvert

De nombreux mathématiciens se sont depuis attaqués au problème, qui n'est entièrement résolu que pour $n \leq 12$ et pour $n = 24$. Ces résultats sont déjà anciens et datent pour la plupart des années cinquante.

Le thème connaît depuis vingt ans un considérable renouveau d'intérêt ; il a notamment fait l'objet de nombreux travaux portant sur la recherche de solutions approchées.

(*) plgrnd@club-internet.fr

(1) La photo ci-contre, que l'on trouvera avec d'autres dans [2], provient du Laboratoire de géologie du Quaternaire, du C.N.R.S.

1.4. Et pourtant c'est très simple … si on se limite aux toutes premières valeurs de *n*.

Nous donnons ici les solutions pour les valeurs 2, 3, 4, 5 et 6. Et nous montrerons que, dans le cas $n = 8$, le cube inscrit dans la sphère ne fournit pas la solution.

Les démonstrations sont strictement élémentaires et à la portée d'une classe de terminale S. Les cas $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ ou 6, $n = 8$ sont indépendants les uns des autres ; chacun d'eux peut être étudié isolément.

1.5. Remarque

Observons que, si le segment joignant deux points M et N d'une sphère de centre O et de rayon R est vu du centre sous un angle α, la distance MN vaut $2\mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{2}$ et la « distance sphérique » des deux points, longueur de l'arc de grand cercle les joignant, est $\mathrm{R}\alpha$. Les deux grandeurs $\mathrm{R}\alpha$ et $2\mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{2}$ variant dans le même sens, le problème traité dans cet article est aussi de maximiser la plus petite des *distances sphériques* mutuelles de *n* points d'une sphère (c'est même son interprétation la plus naturelle).

2. Cas $n = 2$ et $n = 3$

2.1. $n = 2$

La solution est immédiate : deux points diamétralement opposés.

2.2. $n = 3$

Prenons maintenant trois points A, B, C sur une sphère S de rayon R. Soit K le cercle intersection de S et du plan ABC. Nous sommes ramenés au problème intermédiaire suivant : quelle position doivent avoir trois points A, B, C d'un cercle pour que la plus petite des distances AB, BC, CA soit aussi élevée que possible ?

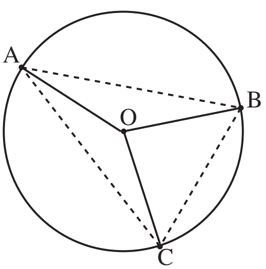

Fig. 1

La longueur d'une corde d'un cercle est d'autant plus grande que l'angle sous lequel elle est vue du centre est élevé. Nous voulons donc que le plus petit des trois angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ soit aussi grand que possible. Si les points A, B, C sont sur un même demi-cercle, le plus petit des trois angles est au plus égal à $\frac{\pi}{2}$. Si A, B, C ne sont pas sur un même demi-cercle, la somme des trois angles est 2π et le plus petit des trois angles est au plus égal à $\frac{2\pi}{3}$.

Finalement, les solutions pour $n = 3$ sont les triangles équilatéraux inscrits dans un grand cercle de la sphère, l'écart maximum cherché étant $R\sqrt{3}$.

3. Cas $n = 4$

3.1. Un calcul préalable

Soit quatre points A, B, C, D sur une sphère S de centre O et de rayon R. Étudions d'abord la somme σ des carrés des six distances mutuelles de ces points :

$$\sigma = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{CD}^2.$$

Introduisons le point O :

$$\sigma = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right)^2$$
$$+ \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right)^2.$$

En développant, il vient

$$\sigma = 12\,R^2 - 2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\right).$$

Ces doubles produits rappellent irrésistiblement le développement du carré d'une somme. Calculons donc $\tau = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)^2$, soit

$$\tau = 4\,R^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\right).$$

Nous obtenons aussitôt la relation $\sigma + \tau = 16\,R^2$.

Si l'on appelle G l'isobarycentre des quatre points, on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right),$$

d'où $\tau = 16\,\overrightarrow{OG}^2$ et finalement

$$\sigma = 16\left(R^2 - \overrightarrow{OG}^2\right).$$

3.2. Les solutions

Soit δ la plus petite des six distances des quatre points deux à deux ; il résulte de ce qui précède que l'on a :

$$6\,\delta^2 < 16\,R^2$$

sauf si les six distances sont égales entre elles, avec G = O, ce qui correspond aux tétraèdres réguliers inscrits dans S.

En conclusion, *les solutions pour $n = 4$ sont les tétraèdres réguliers inscrits dans la sphère*, l'écart entre leurs sommets étant $\dfrac{2\,R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

4. Cas $n = 5$ et $n = 6$

4.1. Les sommets d'un octaèdre

Observons d'abord que, si on coupe (voir figure 2) une sphère S par les trois axes d'un repère orthonormal d'origine le centre O de S, on obtient les six sommets d'un octaèdre régulier Ω inscrit dans S. La plus petite des distances mutuelles de ces six points est $R\sqrt{2}$, où R est le rayon de S. On peut donc trouver sur S six points (et a fortiori cinq) dont les distances mutuelles sont au moins égales à $R\sqrt{2}$.

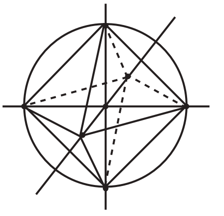
Fig. 2

Nous allons montrer qu'**on ne peut pas trouver mieux**.

Dire que la distance de deux points A et B de S est au moins égale à $R\sqrt{2}$ revient à dire que $\widehat{AOB} \geq \frac{\pi}{2}$.. Nous cherchons donc tous les systèmes de cinq points A, B, C, D, E de S tels que les segments qui les joignent deux à deux **soient tous vus de O sous un angle obtus ou droit**.

4.2. Le théorème (T)

L'étude reposera sur le théorème(2) que voici :

(T) : *Soit dans l'espace un angle* $\widehat{MOP}$ *obtus ou droit. Si les points* M *et* P *sont d'un même côté (au sens large) d'un plan* Π *passant par* O*, la projection orthogonale sur* Π *de cet angle est un angle droit ou obtus ; de plus, si cette projection est un angle droit, l'angle* $\widehat{MOP}$ *est droit et un des points* M *ou* P *est dans* Π.

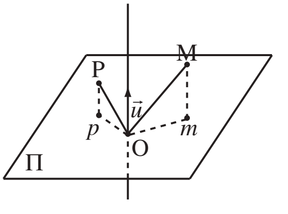

Fig. 3

Le raisonnement s'appuie sur une propriété bien connue : le produit scalaire de deux vecteurs est négatif, positif ou nul selon que leur angle est obtus, aigu ou droit.

Appelons m et p les projections de M et P sur Π, et $\vec{u}$ le vecteur unitaire orthogonal à Π situé du même côté que M et P. Nous avons $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + x\vec{u}$ et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Op} + y\vec{u}$, avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On en tire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Om} \cdot \overrightarrow{Op} + xy$, d'où

$$\overrightarrow{Om} \cdot \overrightarrow{Op} \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} \leq 0. \qquad \text{(I)}$$

Cela prouve déjà que $\widehat{mOp}$ est obtus ou droit. De plus, si $\widehat{mOp}$ est droit, la double

(2) Ce théorème a une forte parenté avec le « théorème de la projection orthogonale d'un angle droit », qui fut un thème majeur des classes de Première jusque dans les années soixante : *un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit si et seulement si un de ses côtés est parallèle au plan.*

inégalité (I) montre que $\widehat{\mathrm{MOP}}$ l'est aussi. Enfin, de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{O}m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}p} + xy$, on tire alors $xy = 0$, qui prouve que M ou P est dans le plan.

4.3. Le théorème (U)

Du théorème **(T)** résulte aisément le théorème suivant :

(U) *Si cinq points d'une sphère sont tels que les segments qui les joignent deux à deux soient tous vus du centre sous un angle obtus ou droit, alors deux d'entre eux sont diamétralement opposés.*

Soient donc cinq points A, B, C, D, E de S tels que les segments qui les joignent deux à deux soient tous vus de O sous un angle obtus ou droit. Ces points étant en nombre impair, il y en a au moins un, mettons E, qui n'est diamétralement opposé à aucun des autres.

Soit Π le plan perpendiculaire en O à $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$; puisque les angles $\widehat{\mathrm{AOE}}$, $\widehat{\mathrm{BOE}}$, $\widehat{\mathrm{COE}}$, $\widehat{\mathrm{DOE}}$ sont obtus ou droits, les points A, B, C, D sont par rapport à Π dans le demi-espace fermé qui ne contient pas E.

Appelons a, b, c, d les projections orthogonales sur Π de A, B, C, D. Réarrangeons les noms des points pour qu'en tournant dans Π autour de O on rencontre successivement les demi-droites d'origine O portant a, b, c, d. On a évidemment $\widehat{a\mathrm{O}b} + \widehat{b\mathrm{O}c} + \widehat{c\mathrm{O}d} + \widehat{d\mathrm{O}a} = 2\pi$.

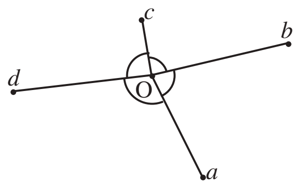

Fig. 4

D'après le théorème **(T)**, les angles $\widehat{a\mathrm{O}b}$, $\widehat{b\mathrm{O}c}$, $\widehat{c\mathrm{O}d}$, $\widehat{d\mathrm{O}a}$ sont obtus ou droits. Et comme leur somme est 2π, ils sont droits tous les quatre. Mais, d'après la seconde moitié du théorème **(T)**, les angles $\widehat{\mathrm{AOB}}$, $\widehat{\mathrm{BOC}}$, $\widehat{\mathrm{COD}}$, $\widehat{\mathrm{DOA}}$ sont droits eux aussi.

Ainsi chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$. Si ces deux derniers ne sont pas colinéaires, il en résulte que $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ le sont. Finalement : ou B et D sont diamétralement opposés sur S, ou A et C le sont, ce qui termine la démonstration du théorème **(U)**.

4.4. Résultats du cas $n = 5$

Étant donnés cinq points A, B, C, D, E de S tels que les segments qui les joignent deux à deux soient tous vus de O sous un angle obtus ou droit, nous savons que deux d'entre eux, mettons A et C, sont diamétralement opposés. Prenons un des trois autres points, par exemple B.

On a $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \leq 0$, mais aussi $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \leq 0$, c'est-à-dire $\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \leq 0$ et donc au total $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$. Ainsi les trois points B, D, E sont dans le plan perpendiculaire en O à la droite AC.

Inversement, si on prend deux points A et C diamétralement opposés et trois autres points B, D, E de S situés sur le grand cercle de pôles A et C, il suffit d'imposer aux trois angles $\widehat{\mathrm{BOD}}$, $\widehat{\mathrm{DOE}}$, $\widehat{\mathrm{EOB}}$ d'être obtus ou droits (ce qui ne pose aucun problème puisque leur somme est 2π) pour avoir cinq points dont les distances mutuelles sont au moins égales à $\mathrm{R}\sqrt{2}$.

4.5. Résultats du cas $n = 6$

Soient six points A, B, C, D, E, F de S tels que les segments qui les joignent deux à deux soient tous vus de O sous un angle obtus ou droit (ou, ce qui revient au même, tels que leurs distances mutuelles soient au moins égales à $\mathrm{R}\sqrt{2}$). Il résulte du théorème **(U)** que deux des points, par exemple A et C, sont diamétralement opposés.

Le raisonnement fait au § 4.4. s'applique encore : les quatre points B, D, E, F sont dans le plan perpendiculaire en O à la droite AC, donc sur le grand cercle de pôles A et C. En supposant que B, D, E, F sont dans cet ordre sur ce cercle, les angles $\widehat{\mathrm{BOD}}$, $\widehat{\mathrm{DOE}}$, $\widehat{\mathrm{EOF}}$, $\widehat{\mathrm{FOB}}$, qui sont obtus ou droits et ont pour somme 2π, sont tous droits et BDEF est un carré. Les six points forment un octaèdre régulier inscrit dans S.

4.6. Récapitulation

Ainsi « l'espacement maximum possible » de cinq ou six points sur une sphère de rayon R est $\mathrm{R}\sqrt{2}$. Il est atteint seulement par les sommets d'un octaèdre inscrit dans le cas de six points, mais par une plus grande variété de configurations dans le cas de cinq points.

5. Cas $n = 8$

Nous nous contenterons de montrer que prendre huit points de S aux sommets d'un cube inscrit dans S n'est pas optimal. Pour cela, nous exhiberons un autre polyèdre inscrit dans S et tel que la plus petite des distances mutuelles de ses sommets soit supérieure au côté du cube inscrit.

5.1. Étude du cube inscrit

Soit un cube K de côté ℓ, O son centre, A un sommet, H le centre de la face ABCD, R le rayon de la sphère circonscrite S. Le triangle OHA est rectangle en H, donc

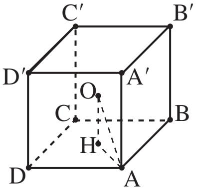

Fig. 5

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{OA}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HA}^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\ell^2}{4}.$$

La distance minimale de deux sommets du cube inscrit dans S, qui est ℓ, vaut donc

$\dfrac{2\,\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$. Il nous reste à exhiber sur S un système de huit points qui fasse mieux.

5.2. Recherche empirique d'une meilleure configuration

Pour améliorer le rapport ℓ/R, nous allons déformer le cube.

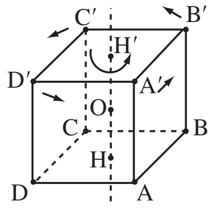

Fig. 6

Imaginons le dispositif suivant :

• les deux faces ABCD et A′B′C′D′ sont deux plaques carrées rigides horizontales de côté ℓ, la plaque ABCD est fixe et la plaque A′B′C′D′ mobile ;

• H désignant le centre de la plaque fixe, le centre H′ de A′B′C′D′ peut glisser le long de la verticale issue de H ; d'autre part la plaque A′B′C′D′ peut tourner autour de cette verticale ;

• les arêtes AA′, BB′, CC′, DD′ sont des tiges rigides de longueur ℓ articulées en leurs extrémités aux deux plaques.

Si, à partir de la position donnant un cube, l'on fait tourner la plaque A′B′C′D′ autour de leur axe commun d'un angle φ pas trop élevé, la plus petite distance des huit points deux à deux reste le côté ℓ du cube. Il est intuitif que la plaque supérieure s'abaisse quand φ augmente. Or le milieu O de HH′ est équidistant des huit points ; c'est donc le centre de la sphère circonscrite. Si h est la distance HH′, on voit aussitôt que le rayon R de la sphère vérifie $\mathrm{R}^2 = \dfrac{\ell^2}{2} + \dfrac{h^2}{4}$.

Lorsque φ croît, h diminue et donc aussi R, ce qui augmente le rapport ℓ/R. Mais on ne peut pas trop augmenter φ, car lorsque φ passe par la valeur $\dfrac{\pi}{4}$, A′ franchit le plan médiateur de AB, donc la distance A′B devient inférieure à A′A, c'est-à-dire à ℓ. Le cas $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ semble donc a priori le meilleur possible.

Il nous reste à l'étudier de manière formellement correcte.

5.3. Un joli polyèdre

On donne dans un plan horizontal un carré ABCD de côté ℓ et de centre H ; on prend un repère orthonormé Hxyz tel que Hx soit la médiatrice de AB, Hy celle de BC (B étant dans l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$), Hz dirigé vers le haut (la figure 7 représente la projection orthogonale de l'ensemble sur le plan Hxy).

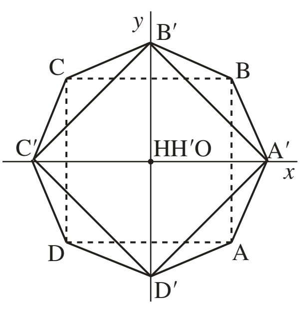

Fig. 7

On fait tourner le carré ABCD de $+\dfrac{\pi}{4}$ autour de Hz, puis on effectue une translation parallèlement à Hz, de mesure positive h. On obtient ainsi un carré A′B′C′D′, de centre H′. On joint enfin les sommets du premier aux deux sommets les plus proches sur le second : on joint A à D′ et A′, B à A′ et B′, …, ce qui détermine huit triangles isocèles délimitant avec les deux carrés un polyèdre P. Il est immédiat que le milieu O de [HH′] est équidistant des huit points sommets des carrés. O est donc le centre de la sphère circonscrite S.

5.4. Choix de *h*

Nous choisissons h de telle sorte que les huit triangles isocèles formant le pourtour latéral de P soient équilatéraux. Il faut et il suffit pour cela, compte tenu des symétries de la figure, que A′B = ℓ.

Or les coordonnées de ces points sont $A'\left(\dfrac{\ell}{\sqrt{2}}, 0, h\right)$ et $B\left(\dfrac{\ell}{2}, \dfrac{\ell}{2}, 0\right)$. On a

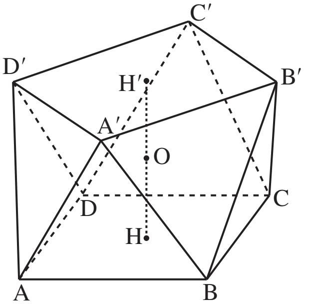

Fig. 8

$$A'B^2 = \ell^2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + \frac{\ell^2}{4} + h^2.$$

L'équation A′B^2 = ℓ^2 s'écrit après réduction

$$h^2 = \ell^2\,\frac{3-\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4} = \frac{\ell^2}{\sqrt{2}},$$

soit

$$h = \frac{\ell}{\sqrt[4]{2}}.$$

Désormais, nous supposerons cette égalité réalisée. Les faces de P sont donc toutes des polygones réguliers : deux carrés et huit triangles équilatéraux, ce qui fait que les arêtes sont toutes de longueur ℓ. Montrons que la distance entre deux sommets qui ne sont pas aux extrémités de la même arête est strictement supérieure à ℓ. Il suffit, compte des symétries de P, de faire la vérification lorsqu'un des deux points est A. Les distances à examiner sont AC, AB′, AC′ ; le premier segment a pour longueur $\ell\sqrt{2}$ et la figure 7 montre que les projections orthogonales des deux autres sur le plan Hxy ont déjà une longueur supérieure à ℓ.

5.5. Relation entre ℓ et R

Reprenons la figure 8. Si R désigne le rayon de la sphère circonscrite aux huit points, on a R = OA et, par le théorème de Pythagore

$$R^2 = OH^2 + HA^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{\ell^2}{2} = \ell^2\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = \ell^2\,\frac{1+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}},$$

ce qui en sens inverse donne

$$\ell = \frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{4-\sqrt{2}}\,R.$$

Ainsi, dans une sphère S de rayon R, on peut inscrire un cube d'arête $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ et le polyèdre P d'arête $\frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{4-\sqrt{2}}R$. Mais $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}1547$ et $\frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{4-\sqrt{2}} \approx 1{,}2156$.

Les huit sommets de P sont donc plus espacés que les huit sommets d'un cube inscrit dans la même sphère.

N.B. : La disposition que nous venons d'étudier pour huit points est en fait la meilleure possible, mais la démonstration est une autre paire de manches.

6. Conclusion

Le problème de Tammes illustre un phénomène classique aussi bien en géométrie qu'en arithmétique : une question peut être formulée en une ou deux phrases intelligibles pour un non-mathématicien et sa résolution rester en suspens durant des décennies, voire des siècles.

On peut y voir aussi un exemple de l'interaction entre les mathématiques et les sciences expérimentales. Issue de la biologie, cette idée de répartir au mieux des points sur une sphère a des applications dans nombre de sciences et de techniques (selon [1], cela va des réacteurs nucléaires aux balles de golf).

Bibliographie

[1] BERGER *Géométrie vivante*, Cassini 2009, chapitre III, « La sphère pour elle-même », p. 167-212.
Donne l'état actuel de la question ; voir sur l'ensemble du livre la recension faite par P-L Hennequin dans ce même BV).

[2] http://www.iri.upc.edu/people/ros/StructuralTopology/ST9/st9-07-a4-ocr.pdf
TARNAI « Spherical Circle-Packing in Nature, Practice and Theory ».
Article bilingue anglais-français, très intéressantes illustrations (dont une jolie référence à Jérôme Bosch), abondante bibliographie.