

# L'algorithme PageRank de Google : Une promenade sur la toile(\*)

Michael Eisermann(\*\*)

Depuis plus d'une décennie Google domine le marché des moteurs de recherche sur internet. Son point fort est qu'il trie intelligemment ses résultats par ordre de pertinence. Comment est-ce possible ? Depuis sa conception en 1998, Google continue à évoluer et la plupart des améliorations demeurent des secrets bien gardés. L'idée principale, par contre, a été publiée [1] : le pilier de son succès est une judicieuse modélisation mathématique.

## Que fait un moteur de recherche ?

Une base de données a une structure prédéfinie qui permet d'en extraire des informations, par exemple « nom, rue, code postal, téléphone, ... ». L'internet, par contre, est peu structuré : c'est une immense collection de textes de nature variée. Toute tentative de classification semble vouée à l'échec, d'autant plus que le web évolue rapidement : une multitude d'auteurs ajoutent constamment de nouvelles pages et modifient les pages existantes.

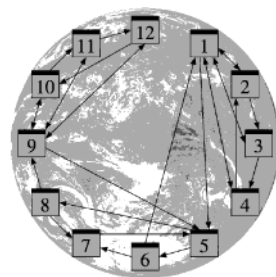
Pour trouver une information dans ce tas amorphe, l'utilisateur pourra lancer une recherche de mots-clés. Ceci nécessite une certaine préparation pour être efficace : le moteur de recherche copie préalablement les pages web en mémoire locale et trie les mots par ordre alphabétique. Le résultat est un annuaire de mots-clés avec leurs pages web associées.

Pour un mot-clé donné, il y a typiquement des milliers de pages correspondantes (plus d'un million pour « tangente », par exemple). Comment aider l'utilisateur à repérer les résultats potentiellement intéressants ? C'est ici que Google a apporté sa grande innovation.

## Le web est un graphe !

Profitons du peu de structure qui soit disponible. L'internet n'est pas une collection de textes indépendants mais un immense *hypertexte* : les pages se citent mutuellement.

Afin d'analyser cette structure, nous allons négliger le contenu des pages et ne tenir compte que des liens entre elles. Ce que nous obtenons est la structure d'un graphe. La figure ci-contre montre un exemple en miniature.



(\*) Michael Eisermann a donné une conférence sur ce thème aux Journées de Rouen le 26 octobre 2009.

(\*\*) Institut Fourier, Université Grenoble1. URL: [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm)  
E-mail address: [Michael.Eisermann@ujf-grenoble.fr](mailto:Michael.Eisermann@ujf-grenoble.fr)

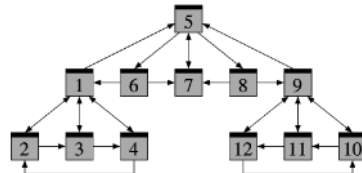
Dans la suite je note les pages web par  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  et j'écris  $j \rightarrow i$  si la page  $P_j$  cite la page  $P_i$ . Dans notre graphe nous avons un lien  $1 \rightarrow 5$ , par exemple, mais pas de lien  $5 \rightarrow 1$ .

### Comment exploiter ce graphe ?

Les liens sur internet ne sont pas aléatoires mais ont été édités avec soin. Quels renseignements pourrait nous donner ce graphe ?

L'idée de base, encore à formaliser, est qu'un lien  $j \rightarrow i$  est une recommandation de la page  $P_j$  d'aller lire la page  $P_i$ . C'est ainsi un vote de  $P_j$  en faveur de l'autorité de la page  $P_i$ .

Analysons notre exemple sous cet aspect. La présentation ci-contre de notre graphe suggère une hiérarchie possible — encore à justifier.



Parmi les pages  $P_1, P_2, P_3, P_4$  la page  $P_1$  sert de référence commune et semble un bon point de départ pour chercher des informations. Il en est de même dans le groupe  $P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}$  où la page  $P_9$  sert de référence commune. La structure du groupe  $P_5, P_6, P_7, P_8$  est similaire, où  $P_7$  est la plus citée. À noter toutefois que les pages  $P_1$  et  $P_9$ , déjà reconnues comme importantes, font référence à la page  $P_5$ . On pourrait ainsi soupçonner que la page  $P_5$  contient de l'information essentielle pour l'ensemble, qu'elle est la plus pertinente.

### Premier modèle : comptage naïf

Il est plausible qu'une page importante reçoit beaucoup de liens. Avec un peu de naïveté, on croira aussi l'affirmation réciproque : si une page reçoit beaucoup de liens, alors elle est importante. Ainsi on pourrait définir l'importance  $\mu_i$  de la page  $P_i$  comme le nombre des liens  $j \rightarrow i$ . En formule ceci s'écrit comme suit :

$$\mu_i := \sum_{j \rightarrow i} 1. \quad (1)$$

Autrement dit,  $\mu_i$  est égal au nombre de « votes » pour la page  $P_i$ , où chaque vote contribue par la même valeur 1. C'est facile à définir et à calculer, mais ne correspond souvent pas à l'importance ressentie par l'utilisateur : dans notre exemple on trouve  $\mu_1 = \mu_9 = 4$  devant  $\mu_5 = \mu_7 = 3$ . Ce qui est pire, ce comptage naïf est trop facile à manipuler en ajoutant des pages sans intérêt recommandant une page quelconque.

### Second modèle : comptage pondéré

Certaines pages émettent beaucoup de liens : ceux-ci semblent moins spécifiques et leur poids sera plus faible. Nous partageons donc le vote de la page  $P_j$  en  $\ell_j$  parts égales, où  $\ell_j$  dénote le nombre de liens émis. Ainsi on pourrait définir une mesure plus fine :

$$\mu_i := \sum_{j \rightarrow i} \frac{1}{\ell_j}. \quad (2)$$

Autrement dit,  $\mu_i$  compte le nombre de « votes pondérés » pour la page  $P_i$ . C'est facile à définir et à calculer, mais ne correspond toujours pas bien à l'importance ressentie : dans notre exemple, on trouve  $\mu_1 = \mu_9 = 2$  devant  $\mu_5 = 3/2$  et  $\mu_7 = 4/3$ . Et comme avant ce comptage est trop facile à truffer.

**Troisième modèle : comptage récursif**

Heuristiquement, une page  $P_i$  paraît importante si beaucoup de pages importantes la citent. Ceci nous mène à définir l'importance  $\mu_i$  de manière récursive comme suit :

$$\mu_i := \sum_{j \rightarrow i} \frac{1}{\ell_j} \mu_j. \tag{3}$$

Ici le poids du vote  $j \rightarrow i$  est proportionnel au poids  $\mu_j$  de la page émettrice. C'est facile à formuler mais moins évident à calculer. (Une méthode efficace sera expliquée dans la suite.) Pour vous rassurer vous pouvez déjà vérifier que notre exemple admet bien la solution

$$\mu = ( \overset{P_1}{2}, \overset{P_2}{1}, \overset{P_3}{1}, \overset{P_4}{1}, \overset{P_5}{3}, \overset{P_6}{1}, \overset{P_7}{2}, \overset{P_8}{1}, \overset{P_9}{2}, \overset{P_{10}}{1}, \overset{P_{11}}{1}, \overset{P_{12}}{1} ).$$

Contrairement aux modèles précédents, la page  $P_5$  est repérée comme la plus importante. C'est bon signe, nous sommes sur la bonne piste...

Remarquons que (3) est un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues. Dans notre exemple, où  $n = 12$ , il est déjà pénible à résoudre à la main, mais encore facile sur ordinateur. Pour les graphes beaucoup plus grands, nous aurons besoin de méthodes spécialisées.

**Promenade aléatoire**

Avant de tenter de résoudre l'équation (3), essayons d'en développer une intuition. Pour ceci imaginons un surfeur aléatoire qui se balade sur internet en cliquant sur les liens au hasard. Comment évolue sa position ?

À titre d'exemple, supposons que notre surfeur démarre au temps  $t = 0$  sur la page  $P_7$ . Le seul lien pointe vers  $P_5$ , donc au temps  $t = 1$  le surfeur s'y retrouve avec probabilité 1. D'ici partent trois liens, donc au temps  $t = 2$  il se trouve sur une des pages  $P_6, P_7, P_8$  avec probabilité  $1/3$ . Voici les probabilités suivantes :

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
$t = 0$	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 2$	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.333	.333	.000	.000	.000	.000
$t = 3$	.167	.000	.000	.00	.333	.000	.333	.000	.167	.000	.000	.000
$t = 4$	.000	.042	.042	.042	.417	.111	.111	.111	.000	.042	.042	.042
$t = 5$	.118	.021	.021	.021	.111	.139	.250	.139	.118	.021	.021	.021
...												
$t = 29$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t = 30$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

On observe une diffusion qui converge assez rapidement vers une distribution

stationnaire. Vérifions cette observation par un second exemple, partant cette fois-ci de la page  $P_1$  :

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
$t = 0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.000	.250	.250	.250	.250	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 2$	.375	.125	.125	.125	.000	.083	.083	.083	.000	.000	.000	.000
$t = 3$	.229	.156	.156	.156	.177	.000	.083	.000	.042	.000	.000	.000
$t = 4$	.234	.135	.135	.135	.151	.059	.059	.059	.000	.010	.010	.010
$t = 5$	.233	.126	.126	.126	.118	.050	.109	.050	.045	.005	.005	.005
...												
$t = 69$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t = 70$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Bien que la diffusion mette plus de temps, la mesure stationnaire est la même ! Elle coïncide d'ailleurs avec notre solution  $\mu = (2, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)$ , ici divisée par 17 pour normaliser la somme à 1. Les pages où  $\mu_i$  est grand sont les plus « fréquentées » ou les plus « populaires ». Dans la quête de classer les pages web, c'est encore un argument pour utiliser la mesure  $\mu$  comme indicateur.

### La loi de transition

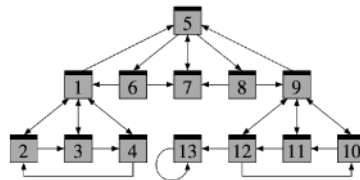
Comment formaliser la diffusion illustrée ci-dessus ? Supposons qu'au temps  $t$  notre surfeur aléatoire se trouve sur la page  $P_j$  avec une probabilité  $p_j$ . La probabilité de partir de  $P_j$  et de suivre le lien  $j \rightarrow i$  est alors  $\frac{1}{\ell_j} p_j$ . La probabilité d'arriver au temps  $t + 1$  sur la page  $P_i$  est donc

$$p'_i = \sum_{j \rightarrow i} \frac{1}{\ell_j} p_j. \quad (4)$$

Étant donnée la distribution initiale  $p$ , la loi de transition (4) définit la distribution suivante  $p' = T(p)$ . C'est ainsi que l'on obtient la ligne  $t + 1$  à partir de la ligne  $t$  dans nos exemples. (En théorie des probabilités ceci s'appelle une *chaîne de Markov*.) La mesure stationnaire est caractérisée par l'équation d'équilibre  $\mu = T(\mu)$ , qui est justement notre équation (3).

### Attention aux trous noirs

Que se passe-t-il quand notre graphe contient une page (ou un groupe de pages) sans issue ? Pour illustration, voici notre graphe modifié :



L'interprétation comme marche aléatoire permet de résoudre l'équation (3) sans aucun calcul : la page  $P_{13}$  absorbe toute la probabilité car notre surfeur aléatoire tombera tôt ou tard sur cette page, où il demeure pour le reste de sa vie. Ainsi la solution est  $\mu = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ . Notre modèle n'est donc pas encore satisfaisant.

### Le modèle utilisé par Google

Pour échapper aux trous noirs, Google utilise un modèle plus raffiné : avec une probabilité fixée  $c$  le surfeur abandonne sa page actuelle  $P_j$  et recommence sur une des  $n$  pages du web, choisie de manière équiprobable ; sinon, avec probabilité  $1 - c$ , le surfeur suit un des liens de la page  $P_j$ , choisi de manière équiprobable.

Cette astuce de « téléportation » évite de se faire piéger par une page sans issue, et garantit d'arriver n'importe où dans le graphe, indépendamment des questions de connexité.

Dans ce modèle la transition est donnée par

$$p'_i := \frac{c}{n} + \sum_{j \rightarrow i} \frac{1-c}{\ell_j} p_j. \tag{5}$$

Le premier terme  $\frac{c}{n}$  provient de la téléportation, le second terme est la marche aléatoire précédente. La mesure d'équilibre vérifie donc

$$\mu_i := \frac{c}{n} + \sum_{j \rightarrow i} \frac{1-c}{\ell_j} \mu_j. \tag{6}$$

Le paramètre  $c$  est encore à calibrer. Pour  $c = 0$ , nous obtenons le modèle précédent. Pour  $0 < c \leq 1$ , la valeur  $1/c$  est le nombre moyen de pages visitées, c'est-à-dire le nombre de liens suivis plus un, avant de recommencer sur une page aléatoire (processus de Bernoulli).

Par exemple, le choix  $c = 0.15$  correspond à suivre environ 6 liens en moyenne, ce qui semble une description réaliste.

Pour conclure l'analyse de notre exemple, voici la marche aléatoire partant de la page  $P_1$  :

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
$t = 0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.013	.225	.225	.225	.225	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
$t = 2$	.305	.111	.111	.111	.028	.076	.087	.076	.034	.020	.020	.020
$t = 3$	.186	.124	.124	.124	.158	.021	.085	.021	.071	.028	.028	.028
$t = 4$	.180	.105	.105	.105	.140	.057	.075	.057	.057	.040	.040	.040
$t = 5$	.171	.095	.095	.095	.126	.052	.101	.052	.087	.042	.042	.042
...												
$t = 29$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066
$t = 30$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066

La mesure stationnaire est vite atteinte, et la page  $P_5$  arrive en tête avec  $\mu_5 = 0.15$  avant les pages  $P_1$  et  $P_9$  avec  $\mu_1 = \mu_9 = 0.12$ .

### Le théorème du point fixe

Afin de développer un modèle prometteur nous avons utilisé des arguments heuristiques et des illustrations expérimentales. Fixons maintenant ce modèle et

posons-le sur un solide fondement théorique. Nos calculs aboutissent bel et bien dans notre exemple miniature, mais est-ce toujours le cas ? Le beau résultat suivant y répond en toute généralité :

**Théorème du point fixe.** *Considérons un graphe fini quelconque et fixons le paramètre  $c$  tel que  $0 < c \leq 1$ . Alors l'équation (6) admet une unique solution vérifiant  $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$ . Dans cette solution  $\mu_1, \dots, \mu_n$  sont tous positifs. Pour toute distribution de probabilité initiale le processus de diffusion (5) converge vers cette unique mesure stationnaire  $\mu$ . La convergence est au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique  $(1 - c)^n$  vers 0.*

L'idée de la preuve est simple : on montre que la loi de transition (5) définit une application  $T : p \mapsto p'$  qui est contractante de rapport  $1 - c$ . Le résultat découle ainsi du théorème du point fixe de Banach.

### Conclusion

Pour être utile, un moteur de recherche doit non seulement énumérer les résultats d'une requête mais les classer par ordre d'importance. Or, estimer la pertinence des pages web est un profond défi de modélisation.

En première approximation, Google analyse le graphe formé par les liens entre pages web. Interprétant un lien  $j \rightarrow i$  comme « vote » de la page  $P_j$  en faveur de la page  $P_i$ , le modèle PageRank (6) définit une mesure de « popularité ».

Le théorème du point fixe assure que cette équation admet une unique solution, et justifie l'algorithme itératif (5) pour l'approcher. Celui-ci est facile à implémenter et assez efficace pour les graphes de grande nature.

Muni de ces outils mathématiques et d'une habile stratégie d'entreprise, Google gagne des milliards de dollars. Il fallait y penser !

### Références

[1] S. Brin, L. Page : *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine*. Stanford University 1998, <http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf> (20 pages).

[2] M. Eisermann : *Comment fonctionne Google ?* Quadrature, n° 68, avril 2008, version étendue sur <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/enseignement#google> (15 pages).

### Développement mathématique

L'objectif de cet appendice est de démontrer le théorème du point fixe énoncé ci-dessus. Les outils nécessaires sont de niveau licence : nous aurons besoin d'un peu de calcul matriciel (essentiellement pour une notation commode) et du théorème du point fixe de Banach pour les fonctions contractantes  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Je reprends ici le développement de mon article [2].

#### Reformulation matricielle

Remarquons d'abord que l'équation (3) n'est rien d'autre qu'un système d'équations linéaires. Plus explicitement, pour tout couple d'indices  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on définit  $a_{ij}$  par

$$a_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{\ell_j} & \text{si } j \rightarrow i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

On obtient ainsi une matrice  $A = (a_{ij})$ , et notre équation d'équilibre (3) s'écrit comme

$$\mu = A \mu \quad (8)$$

ou encore

$$(A - I) \mu = 0, \quad (9)$$

ce qui est un honnête système linéaire à  $n$  équations et  $n$  inconnues  $\mu_1, \dots, \mu_n$ .

Dans notre exemple miniature discuté ci-dessus,  $A$  est la matrice  $12 \times 12$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme énoncé, dans cet exemple, l'équation  $\mu = A \mu$  admet comme solution le vecteur  $\mu = (2, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)$ .

## Matrices stochastiques

Bien que nous n'utilisions que des arguments d'algèbre linéaire et un peu d'analyse dans  $\mathbb{R}^n$ , nous ne nous priverons pas du vocabulaire stochastique, car c'est le point de vue et le langage naturels de notre développement.

Par définition, notre matrice  $A = (a_{ij})$  vérifie

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 && \text{pour tout } i, j \text{ et} \\ \sum_i a_{ij} &= 1 && \text{pour tout } j, \end{aligned}$$

ce que l'on appelle une *matrice stochastique*. (La somme de chaque colonne vaut 1, mais on ne peut en général rien dire sur la somme dans une ligne.) Nous supposons ici que toute page émet des liens. Ce n'est pas une restriction sérieuse : si jamais une page n'émet aucun lien on peut la faire pointer vers elle-même.

Nous interprétons  $a_{ij}$  comme la probabilité d'aller de la page  $P_j$  à la page  $P_i$ , en suivant un des  $\ell_j$  liens au hasard. La marche aléatoire associée consiste à se balader sur le graphe suivant les probabilités  $a_{ij}$ .

### Marche aléatoire

Supposons qu'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifie  $x_j \geq 0$  pour tout  $j$  et  $\sum_j x_j = 1$ , ce que

l'on appelle un *vecteur stochastique* ou une *mesure de probabilité* sur les pages  $P_1, \dots, P_n$  : on interprète  $x_j$  comme la probabilité de se trouver sur la page  $P_j$ .

Effectuons un pas dans la marche aléatoire : avec probabilité  $x_j$  on démarre sur la page  $P_j$ , puis on suit le lien  $j \rightarrow i$  avec probabilité  $a_{ij}$ . Ceci nous fait tomber sur la page  $P_i$  avec une probabilité  $a_{ij}x_j$ . Au total, la probabilité d'arriver sur la page  $P_i$  par n'importe quel lien est

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j. \quad (10)$$

Autrement dit, un pas dans la marche aléatoire correspond à l'application linéaire

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto y = Ax. \quad (11)$$

La marche aléatoire partant d'une probabilité initiale  $x^0$  est l'itération de la transition  $x^{t+1} = T(x^t)$  pour  $t \in \mathbb{N}$ .

### Préservation de la masse

Si  $x$  est un vecteur stochastique, alors son image  $y = Ax$  l'est aussi. Effectivement,  $y_i \geq 0$  car  $y_i = \sum_j a_{ij}x_j$  est une somme de termes positifs ou nuls. De plus on trouve

$$\sum_i y_i = \sum_i \sum_j a_{ij}x_j = \sum_j \sum_i a_{ij}x_j = \sum_j \left( \sum_i a_{ij} \right) x_j = \sum_j x_j = 1.$$



### Mesure invariante

Une mesure de probabilité  $\mu$  vérifiant  $\mu = T(\mu)$  est appelée une *mesure invariante* ou une *mesure stationnaire* ou encore une *mesure d'équilibre*. En termes d'algèbre linéaire (8), c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. En termes d'analyse, c'est un point fixe de l'application T. C'est ce dernier point de vue que nous allons exploiter ici.

### Le Modèle PageRank

Dans le modèle PageRank la loi de transition (5) se formalise comme l'application affine

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto c\varepsilon + (1-c)Ax. \quad (12)$$

Ici le vecteur stochastique  $\varepsilon = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$  correspond à l'équiprobabilité, et A est la matrice stochastique définie par (7).

**Remarque.** Restreinte aux vecteurs stochastiques, l'application T est donnée par

$$T(x) = cE(x) + (1-c)Ax \quad (13)$$

où E est la matrice dont tous les coefficients valent  $1/n$ . Effectivement, sur le sous-espace affine des vecteurs  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\sum_j x_j = 1$ , nous avons  $Ex = \varepsilon$ . La restriction de T coïncide donc avec l'application induite par la matrice stochastique  $A_c = cE + (1-c)A$ .

### Le théorème du point fixe

Pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  on définit sa *norme* par  $|x| := \sum_i |x_i|$ . C'est une honnête norme, qui a toutes les bonnes propriétés usuelles. Ainsi  $|x - y|$  mesure la distance entre deux points  $x, y \in \mathbb{R}^n$  relative à la norme  $|\cdot|$ .

**Définition.** Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite *contractante* de rapport  $k < 1$  si elle vérifie  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème du point fixe (S. Banach 1922).** Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction contractante de rapport  $k < 1$ , alors :

- Il existe un et un seul point  $\mu \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $f(\mu) = \mu$ .
- Pour tout vecteur initial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , la suite itérative  $x^{m+1} = f(x^m)$  converge vers  $\mu$ .
- On a  $|x^m - \mu| \leq k^m |x^0 - \mu|$  : la convergence de  $x^m$  vers  $\mu$  est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique  $k^m$  vers 0.

- Pour le calcul concret on a l'estimation de l'écart  $|x^m - \mu| \leq \frac{k}{1-k} |x^m - x^{m-1}|$ .

Dans la pratique, on ignore la limite  $\mu$  mais on peut facilement calculer la suite itérative  $x^m$ . Pour contrôler la qualité de l'approximation  $x^m$ , on majore l'écart

$$|x^m - \mu| \text{ entre } x^m \text{ et la limite inconnue par la quantité } \frac{k}{1-k} |x^m - x^{m-1}|.$$

### Application au modèle PageRank

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour montrer que le modèle PageRank admet un unique solution :

**Proposition.** Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice stochastique quelconque et soit  $c$  une constante vérifiant  $0 < c \leq 1$ . Alors l'application affine  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par (12) est contractante de rapport  $k = 1 - c$ .

**Démonstration.** Regardons deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et majorons la norme de  $z := Tx - Ty$  en fonction de  $|x - y|$ . On a  $z = kA(x - y)$  donc  $z_i = k \sum_j a_{ij} (x_j - y_j)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

Ceci nous permet de calculer la norme :

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| = |z| &= \sum_i |z_i| = \sum_i \left| k \sum_j a_{ij} (x_j - y_j) \right| \leq k \sum_i \sum_j |a_{ij} (x_j - y_j)| \\ &= k \sum_j \sum_i a_{ij} |x_j - y_j| = k \sum_j \left( \sum_i a_{ij} \right) |x_j - y_j| = k \sum_j |x_j - y_j| = k |x - y|. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est contractante de rapport  $k$  comme énoncé.

**Remarque.** La proposition inclut le cas trivial  $c = 1$  : dans ce cas,  $T(x) = \varepsilon$  est constante, donc  $x = \varepsilon$  est l'unique point fixe. Dans l'autre extrême, on pourrait considérer  $c = 0$ , mais  $T = A$  n'est pas forcément contractante. Par exemple pour un graphe à  $n$  sommets sans arêtes entre eux, nous obtenons la matrice identité,  $A = I$ , qui admet tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  comme point fixe. Un bon choix de  $c$  se situe donc quelque part entre 0 et 1.

**Corollaire.** Pour  $0 < c \leq 1$ , l'application  $T$  admet une unique mesure invariante  $\mu = T(\mu)$  et, pour tout vecteur initial  $x^0$ , la suite itérative  $x^{m+1} = T(x^m)$  converge vers le point fixe  $\mu$ , au moins aussi rapidement que  $(1 - c)^m \rightarrow 0$ .

**Démonstration.** L'application  $T$  étant contractante, elle admet un unique point fixe  $\mu \in \mathbb{R}^n$ . Il ne reste qu'à vérifier que le point fixe est un vecteur stochastique, c'est-à-dire qu'il satisfait  $\mu_i \geq 0$  et  $\sum_i \mu_i = 1$  : si l'on démarre avec un vecteur stochastique  $x^0$ , alors tous les itérés  $x^m$  restent stochastiques, donc leur limite  $\mu$  l'est aussi. (Exercice.)

**Remarque.** Le résultat précédent se généralise au théorème de Perron–Frobenius : si une matrice réelle  $A$  a tous ses coefficients positifs,  $a_{ij} > 0$  pour  $i, j = 1, \dots, n$ , alors le rayon spectral de  $A$  est donné par une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , l'espace propre associé

$E_\lambda$  est de dimension 1, et il existe un vecteur propre  $v \in E_\lambda$  dont tous les coefficients sont positifs.

**Remarque.** L'algorithme itératif correspondant est souvent appelé la « méthode de la puissance ». Il se généralise à une matrice  $A$  quelconque et permet d'approcher numériquement un vecteur propre  $v$  associé à la valeur propre  $\lambda$  de module  $|\lambda|$  maximal, pourvu que cette valeur propre soit unique et simple.

## Quelques approfondissements

### De l'algorithme à l'implémentation

Rappelons que la matrice  $A$  représentant le graphe du web est très grande : en 2004 Google affirmait que « le classement est effectué grâce à la résolution d'une équation de 500 millions de variables et de plus de 3 milliards de termes. » Comment est-ce possible ?

La manière usuelle de stocker une matrice de taille  $n \times n$  est un grand tableau de  $n^2$  coefficients indexés par  $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ . Il est envisageable de stocker ainsi une matrice  $1000 \times 1000$ , c'est-à-dire un million de coefficients, mais ceci est hors de question pour une matrice  $n \times n$  où  $n \approx 10^6$ , voire  $n \approx 10^8$ .

Dans notre cas la plupart des coefficients de la matrice valent zéro car une page n'émet que quelques douzaines de liens typiquement. Dans ce cas, il suffit de stocker les coefficients non nuls, dont le nombre est d'ordre  $n$  et non  $n^2$ . Une telle matrice est appelée *creuse*.

Pour des applications réalistes, il est donc nécessaire d'implémenter des structures de données et des méthodes adaptées aux matrices creuses. La méthode du point fixe est faite sur mesure pour ce genre d'application, et la loi de transition (5) est facile à implémenter, voir [2].

### Chaînes de Markov et ergodicité

Ce que nous venons d'étudier sont des chaînes de Markov, à temps discret et ici à espace d'états fini. En plus nos chaînes de Markov sont homogènes dans le sens que la loi de transition ne change pas au cours du temps.

Le choix du paramètre  $c \in ]0,1]$ , qui gère la téléportation sur le graphe, garantit que notre chaîne de Markov est irréductible et apériodique. Dans cette situation on a toujours convergence vers une unique mesure stationnaire  $\mu$  : les puissances  $A^t$ , où  $t \in \mathbb{N}$ , convergent vers la matrice dont chaque colonne est  $\mu$ . En particulier, la mesure  $x^t = A^t x^0$  converge vers  $\mu$  indépendamment de la mesure initiale  $x^0$ .

Dans cette situation dite « ergodique », la loi des grands nombres est en vigueur : la moyenne « en temps » d'une observable  $h$  le long d'une trajectoire est égale à sa moyenne « en espace ». Plus précisément, pour presque toute trajectoire  $(\omega_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , on a l'égalité

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(\omega_t) = \sum_j h(j) \mu_j. \quad (14)$$

En particulier,  $\mu_i$  est la fréquentation moyenne de la page  $P_i$ . Ceci justifie notre interprétation que les pages avec une grande probabilité  $\mu_i$  sont les plus fréquentées, autrement dit les plus populaires.

## Quelques points de réflexion

### Le modèle est-il plausible ?

La structure caractéristique des documents hypertextes sont les citations mutuelles : l'auteur d'une page web ajoute des liens vers les pages qu'il considère utiles ou intéressantes.

L'hypothèse à la base du modèle PageRank est que l'on peut interpréter un lien comme un vote ou une recommandation. Des millions d'auteurs de pages web lisent et jugent mutuellement leurs pages, et leurs jugements s'expriment par leurs liens. Le modèle de la marche aléatoire en profite en transformant l'évaluation mutuelle en une mesure globale de popularité.

Cet argument de plausibilité sera à débattre et à analyser plus en détail. L'ultime argument en faveur du modèle PageRank, par contre, est son succès : le classement des résultats semble bien refléter les attentes des utilisateurs.

### Descriptif ou normatif ?

Au début de son existence, Google se voulait un outil *descriptif* : si une page est importante, alors elle figure en tête du classement.

Son écrasant succès a fait de Google une référence *normative* : si une page figure en tête du classement, alors elle est importante.

Pour des sites web commerciaux, l'optimisation de leur classement PageRank est ainsi devenue un enjeu vital. Afin d'améliorer son classement, il suffit d'attirer des liens, de préférence ceux émis des pages importantes, et il vaut mieux en émettre très peu.

Ces stratégies et astuces sont devenues un domaine très actif, dit « *search engine optimization* » (SEO). Cette évolution rend l'évaluation des pages web encore plus difficile : comme l'approche et l'importance de Google sont mondialement connues, les liens s'utilisent différemment de nos jours.

Ainsi l'omniprésence de Google change l'utilisation des liens par les auteurs des pages web, ... ce qui remet en question l'hypothèse à la base même du modèle PageRank.