

Travail de modélisation d'un problème dû à Léonard de Pise dit Fibonacci

Henrique Vilas Boas^(*)

J'expose ici un travail de recherche donné à des élèves de troisième « découverte professionnelle 6 heures » (Troisième DP6). Je travaille dans un collège en RRS (Réseau de Réussite Scolaire, nouvelle dénomination des Zones d'Éducation Prioritaire) à Rillieux-la-Pape, dans la banlieue de Lyon, en région Rhône-Alpes. Ce dispositif permet à des élèves se destinant à la voie professionnelle, de construire, par l'intermédiaire de nombreux stages, leur orientation. Les mathématiques font l'objet de quatre heures d'études par semaine (hors stages de découverte professionnelle). En général ce n'est pas une discipline qu'ils affectionnent. Le propos de cet article est de montrer qu'en laissant une part importante aux procédures personnelles, on permet aux élèves de reprendre le goût de chercher et de construire du sens en mathématiques, souvent perdu au long de leurs années de scolarité.

Dans le cadre de narration de recherche, donnée sur une semaine après une première phase de travail en classe, les élèves étudient une question mathématique choisie « ouverte » le plus possible. Les sujets donnés sont en général d'énoncés « courts » et doivent permettre aux élèves de s'engager dans des procédures personnelles. Dans cet exposé, l'analyse porte sur la troisième narration de recherche de l'année (mois de novembre) ; les élèves ont donc à ce stade quelques repères de ce qui est attendu dans ce type de travail. Je montrerai d'abord comment, dans une classe de Troisième DP6, les élèves se sont saisis de la question de la modélisation sur un problème de Fibonacci. Ce problème a été choisi parmi ceux proposés par l'IREM de Montpellier. Je n'avais pas anticipé toutes les entrées possibles ; en effet, laissant la question de l'appréhension du problème la plus ouverte possible, le choix des paramètres a été laissé à la responsabilité des élèves. En particulier pour l'étude du puits dans le problème, n'ayant pas donné de consignes particulières sur sa forme, les élèves ont été libre de la choisir comme ils l'entendaient. De nombreuses questions ont émergé lors de l'analyse des productions des élèves. On remarquera entre autres une diversité de formes apportant son lot de questions connexes et de résolutions associées (loin d'être « faciles » comme le laisserait suggérer la résolution de Fibonacci qui ne tient pas compte de la gravité par exemple). Il en ressort en particulier que souvent les modèles sont choisis de telle façon qu'ils s'adaptent à la solution pressentie. Dans un premier temps, je donnerai l'énoncé du problème et, dans un second, je donnerai quelques choix de modélisations et procédures choisies par les élèves que je commenterai.

Le problème de Fibonacci (Mathématicien du XII^e siècle).

Deux tours, hautes de 30 m et de 40 m, sont distantes l'une de l'autre de 50 m.

(*) henrique.vilasboas@club-internet.fr

Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux volants à la même vitesse, s'envolent en même temps, chacun du sommet de chaque tour, pour se poser au même moment sur le puits. Comment pourrais-tu faire pour déterminer la position de ce puits entre les deux tours ?

Analyse de quelques productions d'élèves :

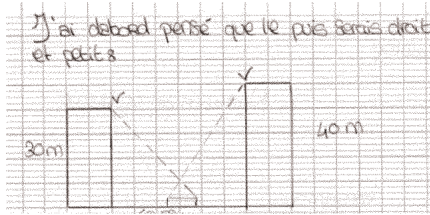


Figure 1

Dans ces deux exemples, le puits a une « épaisseur ». Il semble que le modèle s'adapte à la solution cherchée, c'est particulièrement fort pour la figure 2 où la forme du puits est asymétrique. En effet, dans l'énoncé, aucune information n'est donnée sur la forme du puits, ce qui laisse libre toute interprétation sur celle-ci (et rend le problème plus ou moins difficile).

C'est vrai, bien entendu, pour les tours (la tour n° II de la figure 3 est peut-être celle de Pise, après tout Fibonacci est natif de cette ville)

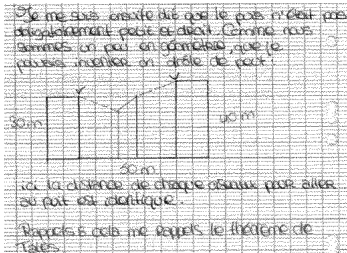


Figure 2

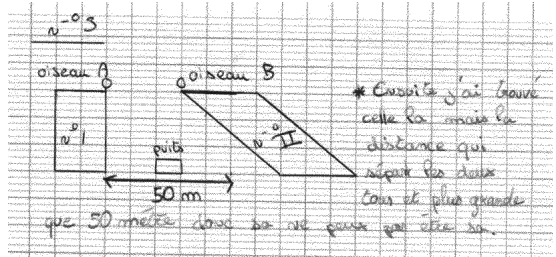


Figure 3

Ces modélisations permettent une interprétation géométrique, il est possible pour les élèves d'en tirer une première approximation et éventuellement de mesurer. Des stratégies de mise à l'échelle sont alors possible (il semble que c'est le cas dans la figure 3), mais on voit dans ce cas un autre modèle s'agréger, celui de la proportionnalité qui demande un effort supplémentaire d'intellectualisation du modèle (en tout cas l'effort porte sur le passage de la verticalité-horizontalité où il suffit de « compter » à des lignes de directions différentes où le comptage n'est plus « efficace »).

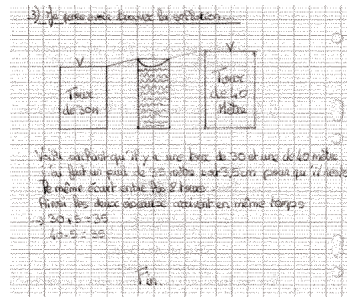


Figure 4

La taille et la forme du puits est donc tout à fait problématique, puisque l'énoncé n'exclut aucune éventualité ; une élève a imaginé un puits aussi haut que les deux tours, c'est un cas où le modèle s'adapte à une résolution *a priori* accessible (ici c'est un écart à la moyenne de la hauteur des tours), d'autre part la largeur du puits est, elle aussi, choisie avec le même concept d'écart à la moyenne (le « centre » du puits est à la même distance des deux tours). Ici le modèle

essaye de rendre compte de symétries inexistantes *a priori* dans l'énoncé du problème.

De même pour la trajectoire des oiseaux qui est en général modélisée par une direction rectiligne, car elle facilite grandement les calculs. L'élève sur la figure 5 ne s'est pas aventurée dans cette voie, bien que la trajectoire soit schématisée par des lignes courbes.

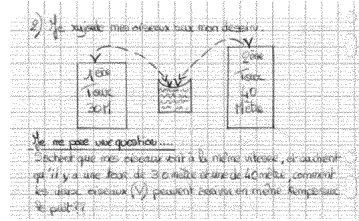


Figure 5

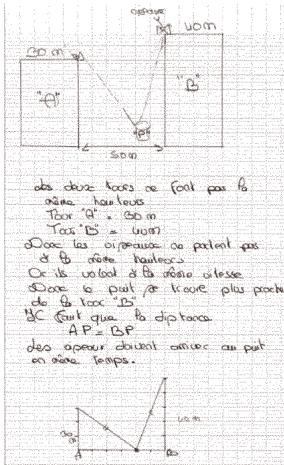


Figure 6

On peut l'observer aussi dans la figure 7 avec l'utilisation d'une médiatrice dans la deuxième figure. Remarquons que pour cette figure, cette production est issue d'une élève turque nouvellement arrivés en France (ENAF). Elle n'avait pas la facilité de décrire (ici les descriptions littérales sont inexistantes, elles apparaîtront progressivement dans les narrations qui suivront) ses procédures ; toutefois, en figurant sa pensée par des schémas, on peut comprendre sa démarche (cela fait penser aux démonstrations « sans mots »).

Le choix de représenter le puits par un point est un passage d'abstraction très fort, au sens propre du terme : on prend du « recul » sur la figure, comme si on s'éloignait du modèle pour ne retenir que les formes « extrêmes », un puits très éloigné ressemble à un point, une tour à un segment. Cette modélisation est proche du choix, historique, de Fibonacci, la résolution est toutefois différente (il ne passe pas par la médiatrice mais par des calculs).

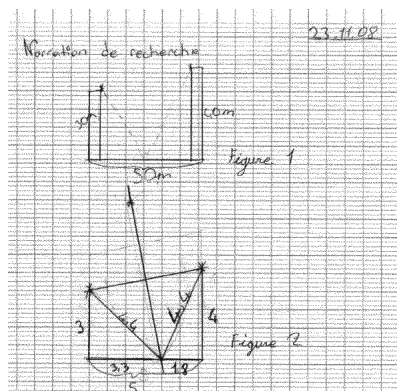
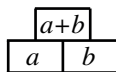


Figure 7

On peut faire remarquer aussi que les élèves ont choisi comme point de vue, la géométrie du plan (on pourrait avoir un modèle dans la géométrie dans l'espace, ou avec un milieu non isotrope en tenant compte de la gravité par exemple). Le choix a toujours été fait par une vision latérale des tours (elles ne sont pas dessinées par une vue de haut par exemple). Ceci laisse penser, qu'à l'instar des illustrations du Moyen-Âge, les types de modèle privilégiés par les élèves doivent permettre de laisser voir toutes les informations importantes (trajectoire des oiseaux, position relative du pied des deux tours). Il faut toutefois nuancer ce propos car la formulation du problème incite peut-être assez naturellement ce type de modélisation. Peut-être qu'une des difficultés dans la résolution de problème que rencontrent les élèves est due à une formalisation trop précoce des modèles choisis (en général par l'enseignant) et que l'omission du passage d'un choix de modèle à un autre rend le discours du professeur obscur et ne permet pas à certains élèves d'investir les résolutions plus institutionnelles.

Petites gammes murales pour débutants dans l'algèbre en Quatrième

Bruno Alaplantive(*)



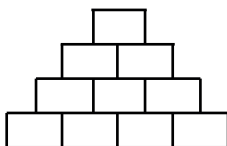
Au moyen de murs additifs $\begin{array}{|c|} \hline a+b \\ \hline \end{array}$, utilisés plus habituellement pour des calculs numériques, et que l'on pimentera un peu pour les enrichir par la suite, il s'agit d'introduire une ou plusieurs variables qui permettront d'expliquer, de justifier les phénomènes observés, de façon non seulement plus courte et économe mais aussi plus définitive. Quoi de plus catégorique que 2 et 2 font 4 ?

On tâche alors de mettre à profit le procédé...

L'article propose également des fichiers exercices pour les élèves, créés avec le tableur d'Open Office muni de l'extension CmathOOoCAS.

• **Deux exemples connus** (abordables dès la 5e)

A



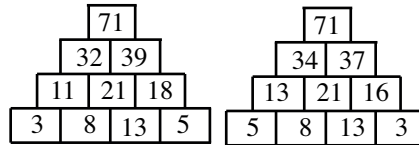
Comment placer sur la ligne inférieure quatre nombres donnés, par exemple 3, 5, 8 et 13 pour obtenir le plus grand nombre possible au sommet ?

D'éventuelles explications rhétoriques sont possibles pour justifier que : « *il faut placer les plus grands au milieu* ». L'introduction de l'algèbre les complète. On

(*) bruno.alaplantive@free.fr

obtient aisément $a+3b+3c+d$ au sommet à partir des quatre nombres a, b, c et d pris sur la ligne de base. Cette formule confirme naturellement la conjecture.

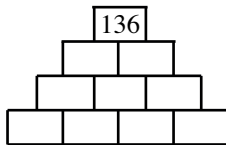
Et à y regarder de plus près, elle montre également les rôles symétriques de a et d et de b et c ; répondant ainsi au « *moi aussi j'ai trouvé 71, mais autrement !* »



Autre qualité et pas des moindres, les nombres peuvent être changés. Et particulièrement ils peuvent être relatifs !

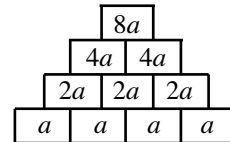
→ L'introduction des lettres fait mieux que confirmer la conjecture, elle la démontre et ouvre de nouvelles perspectives.

B



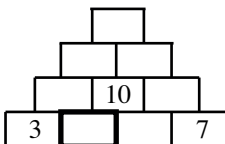
Quel nombre identique faut-il placer dans chacune des quatre cases de la ligne de base ?

Débutant dans l'algèbre, l'élève n'identifie pas encore la tâche à une équation et d'ailleurs il n'écrira généralement pas $8a = 136$ après avoir obtenu $8a$ au sommet ; mais effectuera la division de 136 par $8^{(1)}$.



On peut aussi montrer que c'est $a + 3a + 3a + a$, en référence à l'exemple précédent. C'est précisément cette similitude d'approche qui me semble intéressante car mon but n'est pas ici la résolution d'équation mais le travail d'addition, de soustraction et de simplification d'écritures algébriques simples, tel que celui qui suit.

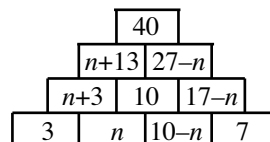
• Un troisième exemple



Compléter une première fois en prenant 8 pour la case en gras ; une seconde fois en prenant 18 ou tout autre nombre ; ...
Qu'en penser ?

Ayant constaté que le résultat au sommet est indépendant du choix initial, la confirmation sans recours à l'algèbre est ici « quasi » impossible.

• Et ensuite



Ce troisième exemple va être générique de gammes se voulant ni trop fastidieuses ni trop virtuoses ; à concevoir comme celles du calcul mental c'est-à-dire des gammes d'assouplissement. Pour cela il faut spécialiser certaines briques des murs.

On peut par exemple proposer :

$2(a+b)$	
a	b

;

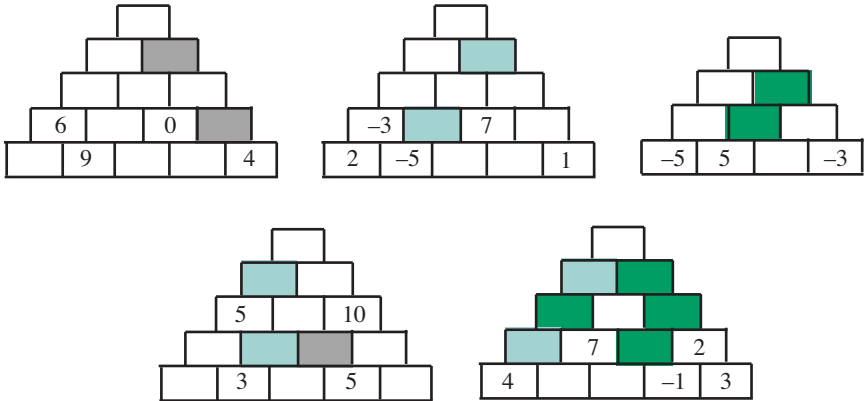
$-(a+b)$	
a	b

;

$-2(a+b)$	
a	b

.

Les pyramides qu'auront à compléter les élèves garderont la propriété d'avoir un sommet indépendant du choix initial⁽²⁾. En voici quelques unes :



À l'épreuve de la pratique, les avantages supposés pour les élèves, tels que accroche, intérêt, connaissance du résultat à obtenir, recherche des erreurs quand on ne l'obtient pas, s'avèrent réels. De plus il me semble rencontrer moins fréquemment qu'auparavant l'épouvantable $15n$ en lieu et place de $12n + 3$.

La limite du genre est apparue se situer à des pyramides de 5 étages. Au-delà, la tâche devient trop pesante, les erreurs plus nombreuses.

Je m'en suis tenu à l'utilisation d'entiers relatifs et des basiques $2(a + b)$, $-(a + b)$ et $-2(a + b)$ afin de ne pas trop tirer sur une ficelle qui perdrait peut-être alors de sa rentabilité.

• **CmathOOoCAS⁽³⁾, un plus bien agréable**

Conçu et développé par Christophe Devalland, CmathOOoCas est une extension qui permet le travail du calcul formel sur le tableur d'Open Office. Des murs préétablis peuvent ainsi être complétés numériquement ou algébriquement. J'ai créé des fichiers exercices qui peuvent être utilisés en salle informatique ou à la maison. La fonction ALEA ENTRE BORNES, utilisée entre -10 et 10 de façon interne par l'exerciceur, renvoie des nombres fixés différents, a priori ..., pour chaque élève. Ils peuvent, à loisir, tester des valeurs numériques ou s'aventurer immédiatement dans le calcul littéral.

Il y a quatre fichiers sur les murs. Un premier qui montre en exemple le fonctionnement, suivi d'un autre pour chaque type de cases colorées.

Un cinquième et dernier fichier propose de compléter cette fois-ci une spirale numérique. Le principe en est sensiblement le même et a pour but de simplifier des

(2) On peut également réinvestir les deux premiers exemples.

(3) Voir sur internet <http://cdeval.free.fr/spip.php?rubrique44>

expressions algébriques, justifiant ainsi les visibles – et vues – régularités ou patterns qui apparaissent à l'issue du calcul numérique préalable. Il s'agit d'un exercice que j'aborde déjà en Cinquième.

Ces cinq fichiers sont téléchargeables sur le site de l'association www.apmep.asso.fr, rubrique *Publications/Bulletin Vert/Suppléments en ligne*.

J'ai essayé de les faire aussi interactifs que possible, mais n'étant pas un spécialiste de la chose, ils sont assurément améliorables, complétables, ... Si vous vous y lancez, n'hésitez pas à me faire connaître vos améliorations, vos interrogations, etc.

Cette activité est le fruit d'une réflexion sur une entrée dans l'algèbre non directement par les équations. Une source d'inspiration toute particulière en est la brochure Enseignons en jouant, (B. Honclaire, N. Lambelin, G. et Y. Noël) de nos collègues belges de la SBPMef que l'APMEP propose sous le numéro 880.

Elle constitue une véritable mine !