

INTRODUCTION.

Trouver la plus grande aire contenue dans un périmètre donné est un grand classique de l'optimisation géométrique. La tradition en attribue la primauté à Didon reine de Carthage depuis que celle-ci aurait fait don à Enée du plus grand domaine qu'il pourrait "enfermer" dans une peau de bête. Le fils du roi Priam ne fut pas lésé car en découpant une lanière fine il obtint la circonférence d'un domaine de dimension respectable. Avant d'en arriver là on peut commencer par résoudre le problème suivant : Un entier n et une longueur p étant donnés trouver le polygone à n côtés (on dit "n-gone") d'aire maximum contenu dans une frontière de longueur p . On parlera donc de "polygones maximaux" et on montrera qu'il s'agit des n-gones convexes réguliers.

Le texte qui suit sera partagé en deux parties. La première, accessible au lycée, est consacrée aux polygones maximaux dont on admettra l'existence par souci de clarté. Elle s'achève par l'énoncé de la caractérisation de ces polygones. La deuxième partie est consacrée à la démonstration de l'existence des polygones maximaux. Cette partie est plus difficile et fait appel à des connaissances de niveau post-bac.

Signalons que le problème de CAPES interne 2010¹ traite d'une autre manière les propriétés des polygones maximaux.

§ I. PROPRIETES DES POLYGONES MAXIMAUX.

Voulant éviter d'en donner une définition pédante par souci d'académisme, on dira seulement qu'un **polygone** Π , ou n-gone, est un ensemble borné du plan, limité par la réunion \mathcal{L} d'une suite de n segments consécutifs $[A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_nA_1]$ 2 à 2 sans autres points communs qu'éventuellement leurs extrémités appelées **sommets**.

Si \mathcal{G}_n désigne l'ensemble des n-gones, alors on a $\mathcal{G}_m \subset \mathcal{G}_n$ pour $m \leq n$. En revanche on montrera à la fin de ce § que tout n-gone **maximal** est contenu dans $\mathcal{G}_n \setminus \mathcal{G}_m$.

Plus généralement si \mathcal{F} est un ensemble du plan on désigne par **barycentre** tout barycentre associé à un système pondéré de points de \mathcal{F} affectés de coefficients **positifs** et on n'en considèrera pas d'autres. On note $E(\mathcal{F})$ et on appelle **enveloppe convexe** de \mathcal{F} l'ensemble des barycentres des points de \mathcal{F} . C'est aussi le plus petit convexe contenant \mathcal{F} .

Le lemme suivant en décrit la nature lorsque \mathcal{F} est fini :

Lemme. *Si \mathcal{F} est fini l'enveloppe convexe de \mathcal{F} est un polygone convexe dont les sommets appartiennent à \mathcal{F} .*

Démonstration : Notons d'abord que cet ensemble est compact par compacité de \mathcal{F} et de $[0, 1]$.

1. www.education.gouv.fr/cid50464/sujets-cap-es-interne-2010.html.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, un raisonnement portant sur des inclusions et des abscisses de barycentres donne :

$$a = \inf_{A \in \mathcal{F}} (x_A) = \inf_{M \in E(\mathcal{F})} (x_M).$$

Soit A un point de $E(\mathcal{F})$ tel que $x_A = a$ et \widehat{yAz} le plus petit angle de sommet A contenant \mathcal{F} . Distinguons :

1) Si cet angle est plat on note Δ la droite d'équation $x = a$. L'intersection $\Delta \cap E(\mathcal{F})$ est appelé **segment d'appui de** $E(\mathcal{F})$ et ses extrémités U et V sont les sommets d'angles saillants contenant \mathcal{F} (fig. 1).

2) Si l'angle \widehat{yAz} est saillant alors A est nécessairement un point de \mathcal{F} et il existe D et E dans \mathcal{F} tels que $[AD]$ et $[AE]$ soient des segments d'appui (fig. 2). On dit alors que A est un **point extrémal**.

Rappelant que \mathcal{F} est fini la poursuite du processus nous ramène nécessairement au point de départ et l'on obtient une alternance de côtés définis par des segments d'appui et de points extrémaux qui sont certains des points de \mathcal{F} et que l'on note : $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ (où $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$).

L'ensemble $E(\mathcal{F})$ est donc identique au m -gone convexe de sommets $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$.

Corollaire : *A tout n -gone non convexe Π on peut associer un polygone convexe de même périmètre et d'aire strictement supérieure.*

Démonstration : Reprenant les notations relatives aux n -gones et sachant que Π est borné on a maintenant : $E(\{A_1, \dots, A_n\}) = E(\mathcal{L}) = E(\Pi)$.

Appliquant le lemme on obtient $E(\Pi)$ polygone convexe contenant Π et différent de Π (fig. 3). On peut alors écrire $a(\Pi) < a(E(\Pi))$ et par l'inégalité triangulaire :

$$p(\Pi) = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 > A_{i_1}A_{i_2} + \dots + A_{i_m}A_{i_1} = p(E(\Pi)).$$

Une homothétie de rapport > 1 convenable transforme $E(\Pi)$ en le polygone demandé.

Voici maintenant trois propriétés des polygones maximaux. Les deux premières sont démontrées par les contraposées, la 3ème directement.

Propriété 1 : *Tout polygone maximal est convexe.*

Démonstration : Soit Π n -gone non convexe et Π' le m -gone convexe associé grâce au corollaire précédent. En fractionnant les côtés de Π' sans en changer les supports on obtient un n -gone convexe qui a le même périmètre et une aire strictement plus grande. Donc Π n'est pas maximal.

Propriété 2 : *Les côtés d'un polygone maximal sont tous de même longueur.*

Démonstration : Il suffit de prouver que quels que soient deux côtés consécutifs ils sont de même longueur. Sinon soit d'abord A, B, C sommets consécutifs non alignés tels que $AB \neq BC$. A la même distance et du même côté que B de (AC) introduisons B' tel que $B'A = B'C$ (fig. 4).

Grâce au symétrique de A par rapport à (BB') on a : $AB' + B'C < AB + BC$ et en remplaçant B par B' dans la liste des sommets de Π on diminue le périmètre sans changer l'aire. Donc Π n'est pas maximal.

Maintenant supposons qu'il existe A, B, C alignés et B, C, D non alignés. Si Π est maximal on a d'après ce qui précède $BC = CD$ quelle que soit la position de B sur $[A, C]$, c'est impossible donc un polygone maximal ne peut avoir trois sommets alignés.

Propriété 3 : *Les angles d'un polygone maximal sont tous égaux.*

Démonstration : Rappelons qu'un tel polygone est convexe et que ses côtés sont tous égaux.

Soit A, B, C, D des sommets consécutifs de ce polygone. Posant $AB = BC = CD = 1$ et $AD = a$ on a nécessairement $0 < a < 3$. En particulier pour $a = 1$, $ABCD$ est un losange dont l'aire est maximum lorsque c'est un carré, donc que ses angles sont égaux. Dans ce qui suit on écartera ce cas.

Si $\theta = \pi - \widehat{BAD}$, on note θ_0, θ_1 les valeurs extrêmes de θ . (fig. 5)

Si $\varphi = \widehat{BCD}$, on note φ_0 (resp. φ_1) les valeurs de φ pour $\theta = \theta_0$ (resp. θ_1).

Par la géométrie élémentaire (théorème de l'angle extérieur) on obtient pour tout a (fig. 6 et 7) :

$$\varphi_0 > \theta_0, \quad \varphi_1 < \theta_1.$$

On remarque enfin que A, B, C, D n'étant pas alignés on a $\varphi > 0$ et que $\varphi = \pi$ ssi $\theta = \theta_0$ (invoquer la convexité de $ABCD$).

Lemme I : (Relation entre θ et φ).

$$\text{On a : } \cos \varphi = -a \cos \theta + \frac{1 - a^2}{2}.$$

Démonstration : Il suffit d'exprimer BD^2 de 2 manières différentes : $1 + a^2 + 2a \cos \theta = BD^2 = 2 - 2 \cos \varphi$.

Cette relation définit φ comme fonction continue de θ sur $[\theta_0, \theta_1]$, dérivable sur $] \theta_0, \theta_1 [$ ($\sin \varphi \neq 0$) avec

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -a \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}$$

Lemme II : (Variation de $S(\theta) = \text{aire de } ABCD$).

$$a) \text{ On a : } S(\theta) = \frac{1}{2}(a \sin \theta + \sin \varphi), \text{ d'où } \frac{dS}{d\theta} = a \frac{\sin(\varphi - \theta)}{2 \sin \varphi} \text{ pour } \theta \in] \theta_0, \theta_1 [.$$

$$b) S(\theta) \text{ est maximum pour } \cos \theta = \frac{1 - a}{2}.$$

Démonstration : Les calculs nécessaires sont aisés.

Compte tenu du signe de $\varphi - \theta$ aux bornes (voir plus haut) et des inégalités $0 < \sin \varphi \leq 1$, on a :

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} S'(\theta) > 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} S'(\theta) < 0.$$

Cela implique que $S(\theta)$ prend des valeurs strictement supérieures aux valeurs qu'elle prend aux bornes. Le maximum de $S(\theta)$ qui est atteint par hypothèse, ne peut l'être que dans l'intervalle $] \theta_0, \theta_1 [$ où S est dérivable et donc là où S' s'annule, c'est à dire pour $\theta = \varphi$. Cette relation définit une valeur unique de θ .

Corollaire : *La valeur maximale de l'aire de $ABCD$ est atteinte lorsque $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$.*

En effet l'égalité $\theta = \varphi$ implique que $ABCD$ est inscriptible et puisque les cordes AB et CD sont de même longueur ce quadrilatère est un trapèze isocèle.

Rappelant l'hypothèse essentielle “il existe des polygones maximaux” on peut caractériser ceux-ci :

Théorème : a) Pour qu'un polygone à n côtés soit maximal il faut et il suffit qu'il soit convexe et régulier.

b) Pour tout polygone Π à n côtés on a l'inégalité : $a(\Pi) \leq \frac{(p(\Pi))^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$.

Démonstration : a) La condition a déjà été reconnue comme nécessaire.

Soit Π un n -gone convexe et régulier. Soit Π' un n -gone maximal (leur existence vient d'être rappelée). Il a été vu que Π' est convexe et régulier donc semblable à Π . Ainsi Π semblable à Π' est lui-même maximal.

b) Il suffit d'inscrire le polygone convexe et régulier dans un cercle de rayon 1. Le périmètre vaut alors $2n \sin \frac{\pi}{n}$ et l'aire $n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$. D'où la valeur de la borne supérieure énoncée (fig. 8).

§ II. EXISTENCE DE POLYGONES MAXIMAUX.

Théorème : Soit $p > 0$. Il existe un n -gone maximal parmi les n -gones de périmètre p .

Démonstration : Soit Π_0 un n -gone non convexe de périmètre p . On a vu (corollaire plus haut) qu'il existe un n -gone convexe de même périmètre et d'aire strictement supérieure.

Par ailleurs on va trouver un polygone maximal parmi les n -gones convexes de périmètre p . Ce polygone aura donc une aire strictement supérieure à celle de Π_0 . Pour ce faire on peut se restreindre aux n -gones convexes de périmètre p ayant pour sommet un point A_1 donné. On note alors \mathcal{D} le disque fermé de centre A_1 et de rayon p . Tous les polygones convexes concernés sont donc contenus dans \mathcal{D} .

Soit d'autre part \mathcal{K} le sous-ensemble de \mathcal{D}^n défini par les conditions suivantes :

- (i) A_1 est le centre de \mathcal{D} ,
- (ii) pour $1 \leq i < n$ et tout k on a $\det(\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \overrightarrow{A_{i+1} A_k}) \geq 0$,
- (iii) pour tout k on a $\det(\overrightarrow{A_n A_1}, \overrightarrow{A_1 A_k}) \geq 0$,
- (iv) $A_1 A_2 + \dots + A_n A_1 = p$.

En remplaçant A_k par M dans les conditions (ii) et (iii) ci-dessus on définit l'intersection de n demi-plans, c'est-à-dire le polygone $E(\{A_1, \dots, A_n\})$, contenu dans \mathcal{D} (et réciproquement).

L'ensemble \mathcal{K} est fermé car défini par des conditions mettant en jeu des fonctions continues, et compact car contenu dans \mathcal{D}^n compact. Pour $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{K}$ notons l'aire de $E(\{A_1, \dots, A_n\})$:

$$\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=2}^{i=n-1} \det(\overrightarrow{A_1 A_i}, \overrightarrow{A_1 A_{i+1}}) \right].$$

La fonction \mathcal{A} est continue dans \mathcal{K} compact. Elle y atteint donc un maximum pour une suite (A_1, A'_2, \dots, A'_n) dont les éléments sont les sommets d'un n -gone convexe maximal de périmètre p .

L'existence des polygones maximaux est ainsi prouvée et leur description en a été faite dans le paragraphe précédent.

ANNEXE.

On donne à présent une autre démonstration de l'égalité des angles dans un polygone maximal. Certes le fondement de cette démonstration s'inspire de l'électromagnétisme mais son déroulement entre bien, lui, dans le giron de la mécanique c'est à dire des mathématiques. Euclide ne fait pas autre chose en énonçant des **axiomes**, qui "vont de soi", à partir desquels tout doit être démontré avec la plus grande rigueur. En outre cette démonstration présente un caractère hautement intuitif, contrairement à celle qui a été présentée dans le §I.

Selon le principe du *flux maximum* si un conducteur plan déformable est parcouru par un courant continu constant et soumis à l'action d'un champ magnétique constant de direction perpendiculaire au plan du conducteur, alors le conducteur se déforme de façon à être "traversé" par un flux maximum c'est à dire à limiter une aire maximale (et réciproquement).

Ici nous supposons que le conducteur est articulé et formé de la suite de n segments rigides de même longueur dessinant dans le plan la frontière d'un n -gone de périmètre constant. Ce n -gone est supposé maximal donc convexe, a tous ses côtés de même longueur et son aire est maximum.

D'après ce qui précède le conducteur est en équilibre.

Etant donnés quatre sommets consécutifs A, B, C, D d'un polygone maximal on considère **l'ensemble des forces exercées sur le segment** $[BC]$. Ces forces sont au nombre de trois :

- 1) l'action \vec{F}_1 exercée par le champ et qui est portée par la médiatrice de $[BC]$,
- 2) la traction \vec{F}_2 exercée en B qui est portée par (AB) ,
- 3) la traction \vec{F}_3 exercée en C qui est portée par (CD) .

Pour assurer l'immobilité du milieu J de $[BC]$ ces forces doivent avoir une **résultante nulle** et pour assurer l'absence de toute rotation autour de J elles doivent avoir un **moment résultant par rapport à J nul**. La décomposition des forces \vec{F}_2 et \vec{F}_3 suivant (BC) et la médiatrice de $[BC]$ montre alors que ces deux forces ont leurs supports symétriques par rapport à cette médiatrice (fig. 9). D'où l'égalité $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$.

Par souci de cohérence historique on a utilisé le mot force au lieu de vecteur car c'était l'usage il y a 100 ans (voir par exemple le livre d'exercices de Frère Gabriel Marie dans la publication de Gabay).