La géométrie : un domaine hors-programme ?

Daniel Perrin(*)

1. Introduction

Ce texte est la rédaction abrégée d'une conférence[1] donnée le 18 mai 2011 dans le cadre de la journée Maths-Monde[2] de l'IREM de Paris 7. La version longue est sur ma page web, voir [web].

J'ai choisi un titre provocateur, mais la question se pose : la géométrie fait-elle encore partie des programmes du second degré et en fera-t-elle encore partie dans quelques années ? Lorsqu'on voit les futurs programmes du lycée, on peut en douter. En effet, les éléments qui faisaient la chair des programmes de géométrie ont presque tous disparu, en particulier toutes les transformations : un bachelier scientifique ne saura bientôt plus ce qu'est une rotation (plane), une homothétie, et à peine ce qu'est une translation[3], sans parler évidemment des similitudes. Bien sûr il y a encore les symétries axiales (en sixième !), et on sait qu'elles engendrent les isométries. Mais, vu la façon dont on l'esquive en analyse, est-il permis de parler de composition ? Il ne disposera pas non plus d'un outil important qui pourrait compenser l'absence des transformations : les cas d'isométrie et de similitude des triangles. Enfin, s'il y a encore les vecteurs (repêchés en seconde) et le produit scalaire, il n'y a plus les barycentres qui en sont une application directe. Bien entendu, il y a déjà belle lurette qu'il n'y a plus de coniques. Bref, il ne reste plus guère au programme que la partie calculatoire de la géométrie.

2. Faut-il enseigner la géométrie ?

Face à toutes ces attaques contre la géométrie, il convient de se poser la question : après tout, n'est-ce pas justifié ? La géométrie n'est-elle pas l'emblème des mathématiques de papa ? (C'est ce que disait, en substance, Jacques Moisan il y a peu : *Je crois qu'on peut donner une formation d'aussi bonne qualité tant en contenus qu'en compétences acquises en enseignant les mathématiques discrètes, les statistiques ou l'algorithmique qu'en enseignant la géométrie d'Euclide !*).

Je ne suis pas de cet avis. J'ai rédigé en 1999 la partie *Géométrie* du rapport de la commission Kahane (voir [Ka]), puis assuré en quelque sorte son service après-vente et je continue de croire que l'enseignement de la géométrie est nécessaire.

(*) daniel.perrin@math.u-psud.fr

(1). Je remercie Catherine Combelles de m'avoir proposé de le publier dans le bulletin de l'APMEP.

(2). Le thème de cette journée était : *Hors frontière, hors programme.*

(3). Je souhaite bien du courage à nos collègues physiciens qui leur apprendront la mécanique !

2.1. La géométrie est utile

Faute de place, je ne développe pas ce paragraphe, voir [Ka] ou [web]. L'histoire regorge d'applications de la géométrie : la construction du tunnel de Samos, la mesure de la grande pyramide, la première loi de Kepler sur les trajectoires des planètes (voire des satellites), et bien d'autres encore et il y en a tout autant dans la vie courante : le déplacement des meubles, la lecture des cartes et des plans, l'utilisation des antennes paraboliques, l'ingénierie numérique, la CAO, etc.

2.2. Penser géométriquement

Penser géométriquement, en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques, est un atout fondamental. Je donne ici deux exemples.

2.2.1. En physique : la deuxième loi de Kepler

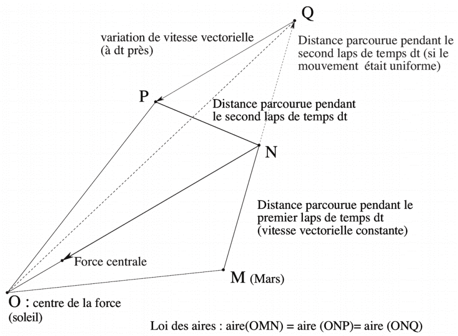

FIGURE 1 – La deuxième loi de Kepler

On sait que la planète M a une trajectoire elliptique dont le soleil occupe un foyer O. Le long de cette trajectoire, son mouvement n'est pas uniforme, mais la deuxième loi de Kepler affirme que les aires balayées par le rayon vecteur OM pendant des laps de temps égaux sont égales.

Newton a prouvé ce résultat à partir de la seule hypothèse de l'existence d'une force d'attraction centrale, par un raisonnement géométrique. On utilise un modèle discret avec des laps de temps *dt* infinitésimaux. On regarde le mouvement pendant le premier laps de temps, de M à N, puis le deuxième, de N à P, et ce qu'il serait si la vitesse vectorielle était constante, de N à Q, et on montre que les aires OMN et ONP sont égales. C'est vrai pour OMN et ONQ par ce que nous appellerons ci-dessous le lemme de la médiane. À *dt* près, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ représentent les vitesses et on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NQ}$ et la variation de vitesse vectorielle entre les deux laps de temps, c'est-à-dire l'accélération, est donc $\overrightarrow{QP}$. Mais on sait (c'est l'un des apports essentiels de Newton) qu'elle est proportionnelle à la force, laquelle est centrale, donc portée par $\overrightarrow{ON}$. On en déduit que (ON) est parallèle à (PQ) et on conclut que les aires sont égales par le lemme du trapèze (voir ci-dessous § 4.4 ou [ME]).

2.2.2. En analyse : le pilotage du calcul par la géométrie

Pour étudier la série de terme $1/n$, on la compare à une intégrale et la vision géométrique avec les aires des rectangles pilote le calcul et notamment l'encadrement des intégrales. L'expérience m'a montré que les étudiants n'ont pas spontanément le réflexe de faire ce type de dessin. Il y a en analyse des dizaines d'exemples élémentaires de cet ordre où la vision géométrique est une aide précieuse (unicité de la limite, existence de point fixe, méthode du point milieu et des tangentes, etc.)

S'il est un point dont je suis persuadé, c'est de l'importance de la vision géométrique en mathématiques. D'ailleurs les étudiants de CAPES d'Orsay (1992) ne s'y étaient pas trompés. Ils avaient composé une chanson avec un couplet sur chaque enseignant et le mien commençait ainsi : *Avec le p'tit père Perrin, il faut toujours faire des dessins*. J'en ferais volontiers ma devise !

2.3. La géométrie et l'apprentissage du raisonnement

Alain Connes dit : *j'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées* et je partage cette opinion. J'ai, avec le CAPES, une longue expérience des exercices proposés dans le second degré. C'est sans doute en géométrie (et en arithmétique) qu'on rencontre les problèmes les plus intéressants et les plus difficiles. Cela me semble important, si l'on veut que les jeunes s'intéressent aux mathématiques, de leur proposer des contenus qui soient à la fois attractifs et stimulants.

2.3.1. Quelques principes pour l'apprentissage du raisonnement

Les mathématiques sont un lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement, mais, pour que cet apprentissage ait lieu, il y a des conditions indispensables que j'ai envie de résumer en un slogan : il faut **faire (vraiment) des mathématiques**. Cela signifie poser et résoudre de vrais problèmes. Si ce qu'on propose aux élèves, ce sont des exercices trop simples, trop saucissonnés, il ne reste qu'une chose à vérifier c'est si, sur la question très limitée qu'on leur pose, ils savent donner la réponse attendue, avec les canons de rédaction attendus. Je vais être brutal. Si c'est cela qu'on fait, et seulement cela, ça n'en vaut pas la peine. Au contraire, cela va former des générations de gens pour qui les mathématiques seront synonymes de pensum.

Quelle est ma proposition ? Poser (de temps en temps) des problèmes ouverts (modestes évidemment), mais où il s'agit de trouver son chemin (pas trop long ce chemin, mais pas en une seule étape). C'est cela qui permet de chercher, de se tromper, de raisonner, et c'est ce qui me semble intéressant pour tous les citoyens, pas seulement les futurs scientifiques.

2.3.2. La droite d'Euler

Je pose souvent l'exercice de la droite d'Euler en donnant seulement la figure ci-dessous, sur laquelle j'ai fait apparaître trois éléments dignes d'attention (la droite d'Euler, qui est l'objectif, le parallélogramme BA′CH et le triangle AHA′), avec la consigne de prouver ce qu'on voit sur la figure.

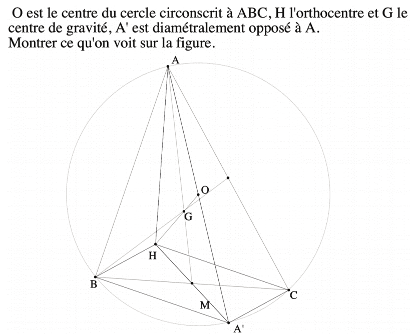

FIGURE 2 – La droite d'Euler

À l'opposé, le texte suivant a été donné par un stagiaire IUFM :

1) Montrer que (BH) *est perpendiculaire à* (AC) *et* (CH) *à* (AB).

2) Montrer que le triangle AA′C *est rectangle en* C. *En déduire que* (A′C) *est parallèle à* (BH).

3) Montrer que le quadrilatère BHCA′ *est un parallélogramme*.

4) Montrer le point d'intersection M *de* (BC) *et* (HA′) *est le milieu de* [BC] *et de* [HA′].

5) Montrer que G *est sur* (AM)*, au tiers de* [AM] *à partir de* M *et en déduire que* G *est aussi le centre de gravité de* AHA′.

6) Montrer que G *est sur* (HO)*, au tiers de* [HO] *à partir de* O.

C'est exactement ce que je critiquais ci-dessus : avec un tel texte, l'élève devient une sorte d'OS de la géométrie qui n'a plus que des tâches parcellaires à accomplir, sans avoir le contrôle de la stratégie globale.

2.3.3. Deux exemples de problèmes de recherche

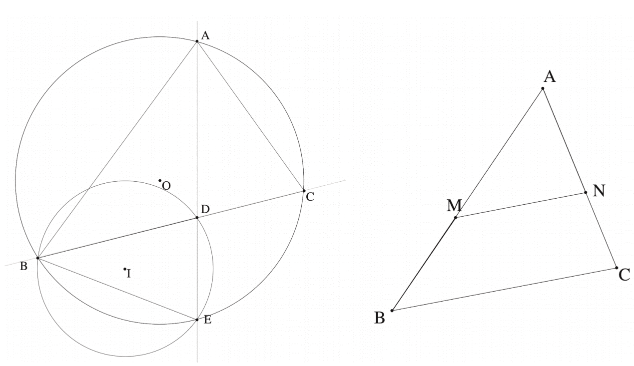

FIGURE 3 – Le lieu du centre du cercle circonscrit et les segments décalés

J'aime bien les deux exemples suivants, d'abord parce qu'ils ne sont pas faciles, et ensuite parce que, dans les deux cas, de multiples approches sont possibles et que toute initiative raisonnable peut mener au résultat.

Le lieu du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle, E un point du cercle circonscrit. La droite (AE) coupe (BC) en D. Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit à BDE quand E parcourt le cercle (ABC) ?

Les segments décalés

Soit ABC un triangle. Construire des points M ∈ [AB] et N ∈ [AC] tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles et qu'on ait l'égalité de longueurs AN = MB. (Voir [DPR], il y a au moins neuf méthodes.)

3. La géométrie au collège

Je continue donc de penser qu'il faut faire de la géométrie, et le collège devient encore plus important pour cela puisqu'il n'y en a plus, ou presque, au lycée. Je suis assez en accord avec la description de l'activité mathématique qui figure dans le préambule des programmes de collège :

... identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

En revanche, la mise en œuvre me semble moins convaincante. Je pense que les programmes sont, en partie, responsables des dérives évoquées ci-dessus (la confusion raisonnement-démonstration notamment), parce qu'ils ne fournissent pas aux élèves les bons outils pour faire de la géométrie.

Dans le cas de la géométrie du collège les outils « pour prouver » sont essentiellement les suivants : les invariants (longueurs, angles, aires), les cas « d'égalité » et de similitude, le calcul, les transformations.

La réforme des mathématiques modernes a banni les cas « d'égalité » de notre enseignement et elle a aussi minoré le rôle de certains invariants comme angle et aire. Je considère qu'il s'agit d'une erreur et, depuis plus de dix ans, je milite en faveur de l'usage de ces outils au collège, voir [Ka] ou [DP] par exemple. Il y a de fortes raisons pour cela : des raisons théoriques, qui tournent autour du programme d'Erlangen et de la notion de **transitivité** et des raisons didactiques, qui font que ces outils sont plus visuels que le calcul et plus commodes à utiliser que les transformations.

4. Les outils pour prouver : les invariants

4.1. Programme d'Erlangen et transitivité

Le discours dominant à l'époque des mathématiques modernes mettait en avant le programme d'Erlangen de Felix Klein (1872). L'objectif de Klein était d'unifier les nombreuses géométries apparues au XIX^{e} siècle : géométries projective, non euclidiennes, etc. La thèse de Klein c'est qu'une géométrie consiste essentiellement en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X, par exemple le plan affine euclidien et le groupe des isométries euclidiennes, le plan affine et les bijections affines, le plan projectif et les homographies. L'un des intérêts du programme d'Erlangen est de permettre une classification des résultats. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une **niche écologique** privilégiée : pour Pythagore c'est la géométrie euclidienne, pour Thalès la géométrie affine, pour Pappus la géométrie projective. Quand on travaille avec cette perspective, une notion s'avère essentielle : la transitivité(4). J'en explique le principe sur l'exemple de la géométrie affine.

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concours, de parallélisme, de milieux, de rapports de mesures algébriques sur la même droite ou des droites parallèles, de barycentres, de rapports d'aires (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine f de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle quelconque en un triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on utilise des résultats de **transitivité** du groupe affine, notamment sur les triangles.

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse.

Il y a de nombreux exemples de l'utilisation de cette technique. En voici deux qui concernent les aires. Le premier est le problème des tiers :

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés [BC], [CA], [AB] au tiers le plus proche de B, C, A. Les droites (BJ) et (CK), (CK) et (AI), (AI) et (BJ) se coupent respectivement en P, Q, R. Déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC.

L'expérience montre que le rapport est 1/7. Comme les hypothèses et la conclusion sont affines, on peut se ramener au cas équilatéral, voir plus loin.

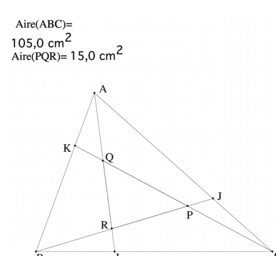

FIGURE 4 – Les tiers

L'exercice suivant est extrait du document d'accompagnement des anciens programmes de seconde (2000) :

Soit ABCD *un parallélogramme et* M *un point intérieur. Comment doit- on choisir* M *pour que les aires des triangles* AMB *et* BMC *soient égales ?*

L'énoncé du document suggère de commencer par le cas du carré, ce qui est une bonne suggestion ! En effet, comme les propriétés en question sont affines, on peut

(4). Rappelons que, si un groupe G opère sur un ensemble X, on dit qu'il est **transitif** si l'on peut envoyer n'importe quel $x \in$ X sur n'importe quel y au moyen d'un élément de G.

transformer la figure par une application affine, ce qui permet de transformer le parallélogramme en un carré.

Ce qu'on a gagné, dans ce cas, c'est que les côtés AB et BC sont égaux et donc, pour que les triangles AMB et BMC aient même aire, il faut et il suffit que les hauteurs MH et MK soient égales, donc que M soit sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Là se présente une petite difficulté pour revenir au cas général. En effet, comme la notion de bissectrice n'est pas affine on ne peut espérer que le lieu cherché soit encore la bissectrice dans le cas du parallélogramme. Cependant, il se trouve que la bissectrice, dans le cas du carré, n'est autre que la diagonale, et comme le fait d'être une diagonale est une propriété qui ne met en jeu que l'incidence, c'est elle qui est solution.

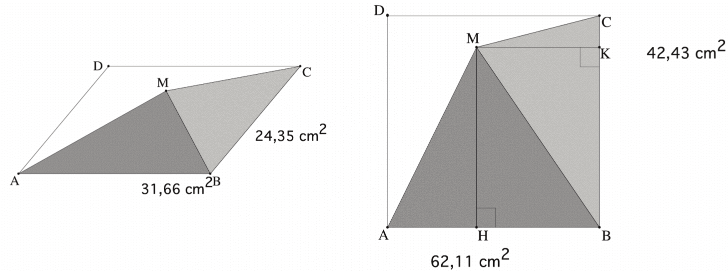

FIGURE 5 – Le parallélogramme

Commentaire. Ce type de réflexion théorique me semble un objectif important de la formation des maîtres. En effet, l'intérêt pour le professeur de cette vision des choses c'est qu'elle lui donne une méthode pour avoir rapidement le résultat. Cela lui donne un « temps d'avance » sur ses élèves, toujours bien utile. Bien entendu, il faut ensuite donner une preuve élémentaire des résultats, ce qu'on peut faire avec les « lemmes du collège », voir plus loin.

4.2. Transitivité, orbites et invariants

En général, l'opération de G sur X n'est pas transitive. Dans ce cas on définit **l'orbite** de $x \in$ X sous G comme l'ensemble de ses transformés $g.x$. Par exemple, si X est le plan euclidien et G le groupe des rotations de centre O, les orbites des points sont les cercles de centre O.

Décrire les orbites et leur ensemble, le quotient X/G, est un problème central en mathématiques. Pour cela, à un objet $x \in$ X on associe des invariants $\Phi_1(x), \dots, \Phi_d(x)$ numériques en général. Dire que Φ_k est invariant signifie que l'on a $\Phi_k(g.x) = \Phi_k(\mathrm{x})$, autrement dit, si x et $y = g.x$ sont dans la même orbite, ils ont mêmes invariants et un bon système d'invariants assure aussi la réciproque : si les invariants sont les mêmes, les objets sont dans la même orbite.

Dans le cas de la géométrie élémentaire, les invariants sont des objets bien familiers. En effet, le groupe des isométries du plan est transitif sur les points (pour transformer A en B il suffit d'utiliser, par exemple, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$), mais pas doublement transitif : étant donnés deux couples de points A, B et A′, B′, il n'existe pas en général d'isométrie qui envoie A sur A′ et B sur B′, et l'invariant associé est la **longueur** AB. De même, pour les couples de demi-droites un invariant est l'**angle**, pour les triangles en géométrie affine un invariant est le **rapport d'aires**.

C'est une évidence que tous ces invariants jouent un rôle essentiel dès qu'on fait de la géométrie, mais il y a plus. Un « méta-théorème » assure que tous les théorèmes d'une géométrie peuvent être prouvés en utilisant les invariants (voir la Partie II de mon livre de géométrie projective sur [web]).

4.3. Utilisation de l'outil angle

Dans la pratique, pour que l'utilisation de l'invariant angle soit efficace il est nécessaire de disposer d'un petit nombre d'accessoires. On peut citer en vrac les notions de complémentaire et de supplémentaire, la somme des angles d'un triangle, les propriétés relatives aux parallèles (angles alternes-internes et correspondants), et enfin, et surtout, le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque. Avec ces accessoires, l'outil devient performant et souple.

Je donne juste un exemple (voir [web] pour d'autres), le problème du symétrique de l'orthocentre. Il s'agit du résultat bien connu suivant :
On considère un triangle ABC *et son orthocentre* H. *Montrer que le symétrique* H′ *de* H *par rapport à* (BC) *est sur le cercle circonscrit*.

Pour cela, on va utiliser la réciproque du théorème de l'angle inscrit en montrant que des angles (potentiellement) inscrits interceptant le même arc sont égaux ou supplémentaires. Comme il y a dans le quadrilatère ABH′C quatre côtés et deux diagonales, cela fait six possibilités, logiques *a priori*. Ce qui est remarquable c'est que toutes mènent au résultat. Nous allons en traiter deux seulement (voir [DPR] pour les autres), et seulement dans le cas où l'orthocentre H est intérieur au triangle. Si l'on n'utilise pas les angles orientés, il faut *a priori* distinguer les cas de figures. On note A′, B′, C′ les pieds des hauteurs.

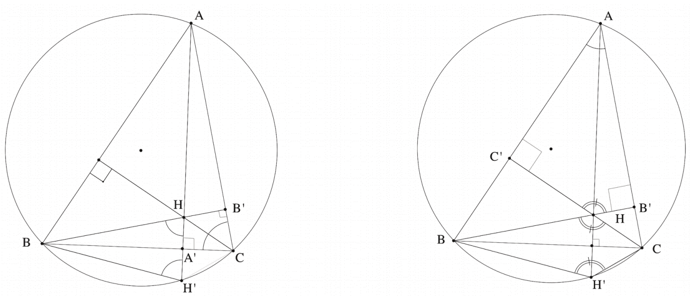

FIGURE 6 – Le symétrique de l'orthocentre

Il suffit, par exemple, de montrer $\widehat{BH'A} = \widehat{BCA}$. Or on a $\widehat{BH'A} = \widehat{BHA'}$ (par la symétrie) et $\widehat{BCA} = \widehat{BHA'}$ car ces angles sont tous deux complémentaires de $\widehat{HBC}$. On peut encore vouloir montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BH'C}$ sont supplémentaires. Pas de problème, puisque l'on a $\widehat{BH'C} = \widehat{BHC}$ par symétrie et que cet angle est opposé par le sommet à $\widehat{B'HC'}$ qui est supplémentaire de l'angle en A à cause des angles droits en B′ et C′.

4.4. Utilisation de l'outil aire

L'usage de l'outil « aire » requiert lui aussi quelques accessoires que, prenant mes désirs pour des réalités, j'appelle les « lemmes du collège » (voir [ME], mais presque tous ces lemmes sont dans Euclide).

4.4.1. Les lemmes du collège

Il y en a cinq, tous très simples et qu'on peut montrer en utilisant la formule *base* × *hauteur*/2. Le lemme du parallélogramme affirme qu'une diagonale partage un parallélogramme en deux triangles de même aire. Le lemme du trapèze dit que deux triangles de même base, ayant leurs sommets sur une parallèle à la base ont même aire. Le lemme des proportions affirme que deux triangles dont les bases sont portées par la même droite et qui ont même sommet ont leurs aires proportionnelles à la base. Le lemme de la médiane est la variante dans laquelle A′ est le milieu de [BC]. Enfin, le lemme du chevron montre que les aires des ailes d'un chevron (voir figure ci-dessous) sont proportionnelles aux segments découpés sur la base (il s'obtient par différence en appliquant deux fois le lemme des proportions).

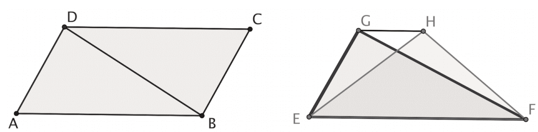

FIGURE 7 – Les lemmes du parallélogramme et du trapèze

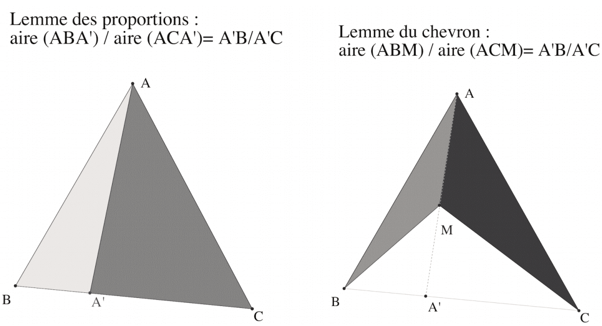

FIGURE 8 – Les lemmes des proportions et du chevron

4.4.2. Application 1 : Thalès

Toutes les propriétés de géométrie affine plane se démontrent en utilisant les lemmes précédents. Nous donnons ici deux exemples : le théorème de Thalès et le problème des tiers, mais on traiterait de manière analogue le concours des médianes, les théorèmes de Ménélaüs, Ceva, Gergonne, etc. On note $\mathcal{A}(E)$ l'aire d'une partie E.

Pour Thalès, on a

$$AB'/AB = \mathcal{A}(AB'C)/\mathcal{A}(ABC)$$

et de même

$$AC'/AC = \mathcal{A}(ABC')/\mathcal{A}(ABC)$$

par le lemme des proportions, puis

$$\mathcal{A}(AB'C) = \mathcal{A}(AB'C') + \mathcal{A}(CB'C')$$

et

$$\mathcal{A}(ABC') = \mathcal{A}(AB'C') + \mathcal{A}(BC'B')$$

et on conclut par le lemme du trapèze.

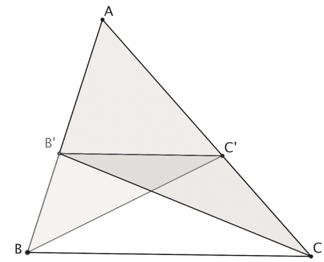

FIGURE 9 – Le théorème de Thalès

4.4.3. Le problème des tiers (suite et fin)

On a vu qu'il suffisait de résoudre le problème dans le cas équilatéral. On dispose alors d'un outil supplémentaire : les rotations d'angles $\pm 2\pi/3$ qui conservent le triangle et permutent I, J, K et P, Q, R. On en déduit l'égalité des aires des triangles gris foncé d'une part et gris clair d'autre part.

On applique alors le lemme du chevron dans BQC. Comme (QR) coupe (BC) en I qui est au tiers du segment, on a IC = 2BI et donc l'aile droite du chevron a une aire double de l'aile gauche, ce qui montre que les aires foncées sont aussi égales à l'aire blanche de PQR.

Mais alors, le lemme des proportions, appliqué dans CQR, montre que l'on a PQ = PC, et en l'appliquant une dernière fois au triangle AQC on en déduit que les aires claires et foncées sont égales. Tous les petits triangles ont donc même aire et comme il y en a sept, on a le résultat

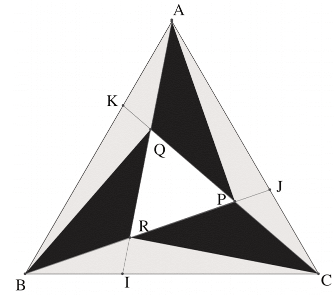

FIGURE 10 – C'est vache les tiers

.5. Les outils pour prouver : les cas d'isométrie

Les cas d'isométrie des triangles étaient un des outils essentiels des collégiens d'autrefois pour faire de la géométrie. Bannis par la réforme des mathématiques modernes, ils ont fait leur réapparition en seconde en 2000, avant d'être balayés par les dernières modifications de programmes. Pourtant, il y a en leur faveur de bons arguments, à la fois théoriques et didactiques.

Côté théorique, on a vu que le problème de la transitivité de l'action d'un groupe est fondamental. Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des éléments autres que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci**. D'ailleurs leur démonstration est une parfaite illustration de ce principe de transitivité : on envoie un sommet sur un autre, puis une demi-droite sur une autre, etc. et peu importe quelle est la transformation finale. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

– *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle* ABC *sur cet autre triangle* A′B′C′ *?*

– *Oui*

– *Vous pouvez le faire ?*

– *Oui !*

– *Il peut le faire ! On l'applaudit bien fort*.

Côté didactique, je me contenterai d'un exemple très simple, mais il y en a beaucoup d'autres. J'espère ainsi convaincre le lecteur de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est toujours possible de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile. Voici l'exercice :

Soit ABC *un triangle isocèle avec* AB = AC > BC. *On prolonge les segments* [AB] *et* [BC] *par* [BD] *et* [CE], *avec* BD = CE = AB − BC. *Montrer que* ADE *est isocèle*.

C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle). On a donc AE = DE.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations. Il suffit de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On peut donc la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie σ_1 par rapport à la médiane-hauteur de ABC. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et F vient en D (la droite (BC) vient sur (AB) et précisément la demi-droite [BC) sur [BA) et on conclut en utilisant BF = BD). On en conclut que, si $\rho = \sigma_2\sigma_1$, on a $\rho(E) = D$. Par ailleurs, on a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B, donc la bissectrice est axe de symétrie). On a donc aussi $\rho(A) = E$ et, en définitive, EA = DE.

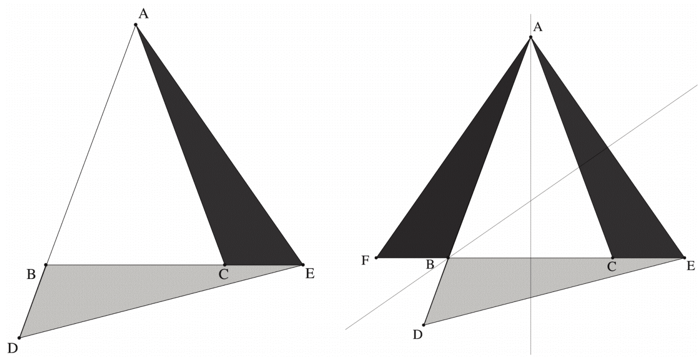

FIGURE 11 – Les segments ajoutés

On peut faire plusieurs critiques à cette preuve.

0) Elle est beaucoup moins visuelle. C'est un fait relevé par de nombreux psychologues que, pour les jeunes enfants, les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.

1) Il faut déjà repérer quelle est la transformation pertinente.

2) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

3) Elle est nettement plus compliquée (voir la discussion sur les demi-droites) et nécessiterait de donner des indications aux élèves.

Cet exemple montre que l'utilisation des cas d'isométrie, au collège, est souvent plus commode que celle des transformations Mais, en vérité, le problème est maintenant bien plus grave : avec les nouveaux programmes, cet exercice (et la plupart de ceux évoqués dans ce texte) ne pourrait plus être donné nulle part. En effet, il n'y a plus les cas d'isométrie, et il n'y aura bientôt plus les transformations.

6. Des propositions

Envers et contre tout, je maintiens qu'il faut faire de la géométrie au collège et au lycée et d'abord réhabiliter Euclide. Cela recouvre deux propositions, d'ailleurs modestes, qui concernent le collège :

• Mieux utiliser les invariants, longueurs, et surtout angles et aires, ainsi que leurs accessoires, voir notamment les « lemmes du collège » ci-dessus.

• Réintroduire les cas d'isométrie des triangles dès le collège. D'abord, comme j'ai tenté de le montrer, c'est un bon outil, et surtout, s'il n'y a plus les transformations et pas les cas d'isométrie, il n'y a plus rien pour faire de la géométrie. De plus, ils ne sont pas si loin (voir, en cinquième, le paragraphe du programme sur la construction d'un triangle à partir de trois de ses éléments). Si j'insiste sur ce point c'est qu'il est urgent par rapport à la formation des maîtres, sujet qui me concerne au premier chef. Il y a déjà eu toute une génération de professeurs qui ne savaient plus utiliser les cas d'isométrie, n'en créons pas une autre.

Par ailleurs, il y a au moins deux points sur lesquels il est possible de dépasser Euclide, mais qui sont aussi en train de disparaître des programmes.

• Les invariants orientés (vecteurs et angles). On sait combien les vecteurs sont utiles en physique. Dans le cas des angles, l'usage des angles orientés est essentiel pour définir les rotations.

Attention toutefois, je suis partisan de ne pas les introduire trop tôt, et avec modération. Au collège et au début du lycée, les angles non orientés sont bien suffisants. Ce n'est que lorsqu'on se sera confronté au problème des cas de figures que l'on pourra songer à parler d'invariants orientés.

• La notion de groupe, et, avant, les transformations ! On a vu que c'est le fondement de la géométrie au sens de Klein. Il faut lui laisser le temps d'apparaître à son heure, sans doute à la toute fin du lycée, mais il n'est pas normal que, sur ce point, notre enseignement secondaire en soit revenu à une situation plus archaïque que celle des années 1960, voire d'avant-guerre.

7. Un peu de polémique

On l'aura compris, je considère que les derniers programmes de mathématiques des lycées, particulièrement en géométrie, sont lamentables. Il est temps de s'interroger sur les raisons de cette situation.

La première raison invoquée pour diminuer la place de la géométrie est générale et politique : c'est la diminution imposée de l'horaire de mathématiques, notamment en première. C'est une réalité. On peut s'interroger sur le pourquoi de cet état de fait et évoquer plusieurs raisons, que je cite en vrac sans nécessairement les reprendre à mon compte :

a) Les classes de S ne sont plus des classes scientifiques, mais des classes généralistes.

b) Il y a actuellement un courant anti-sciences qui se manifeste tant sur le plan philosophique (le courant post-moderne, la remontée du fait religieux), que politique (la mise en cause – justifiée ? – de la science comme facteur de progrès, voir les débats sur le nucléaire, les OGM, la santé, etc.).

c) Dans le cas particulier des mathématiques, au point précédent s'ajoute le discours de certains collègues (je pense à Claude Allègre).

d) Il y a une méfiance, voire une animosité, du public pour les mathématiques parce que c'est un instrument de sélection.

e) Ce qu'on fait en mathématiques dans le secondaire est de plus en plus ennuyeux, tant par les thèmes choisis que par la pratique (y compris en géométrie).

Un autre point concerne la démocratie. Depuis la suppression du Conseil National des Programmes en 2002, les programmes sont retombés dans l'escarcelle de l'inspection générale et leur élaboration y a perdu en transparence et en débats. Au moins, quand le CNP et ses divers groupes techniques existaient, il y avait un endroit où l'on pouvait débattre, c'est-à-dire éventuellement s'engueuler quand on n'était pas d'accord, avec toute la clarté nécessaire(5).

Maintenant, ce n'est plus le cas. La procédure consiste en des consultations dont je persiste à penser qu'elles sont factices : si on regarde ce qu'ont laissé filtrer les premiers auditionnés sur les programmes de terminale, on voit qu'il y a eu peu de

(5) Je n'ai pas été membre du CNP, mais j'ai vécu cela dans la commission Kahane.

changement depuis. Cette absence de démocratie est la porte ouverte au lobbying et nos collègues, informaticiens et statisticiens notamment, ne s'en privent pas(6).

Un des arguments avancés est qu'il faut faire de la place pour de nouveaux domaines, notamment probabilités, statistiques, algorithmique. Je n'ai évidemment rien contre ces domaines, et je reconnais qu'ils étaient, jadis, mal-aimés, voire absents. Cela étant, il me semble que le rattrapage a déjà été conséquent.

Cela ne concerne d'ailleurs pas seulement la géométrie. Par exemple, du côté des mathématiques appliquées, on a supprimé les équations différentielles(7). C'est vraiment penser que seules les statistiques et les probabilités ont des applications et c'est une vision très discutable des mathématiques(8). C'est sur ce type de questions que la démocratie est indispensable : aucun mathématicien actuel, je dis bien aucun, ne dispose d'une vision exhaustive de sa discipline et de ses applications et il est nécessaire d'entendre plusieurs voix pour prendre des décisions.

Sur ce plan, il y a d'ailleurs une incohérence totale à renforcer toujours plus les programmes du lycée en probabilités et statistiques, alors que ceux des classes préparatoires (au moins les classes MP) sont toujours désespérément vides(9) de ce côté là !

Un dernier point, Brassens l'a dit : le temps ne fait rien à l'affaire, mais je crois qu'il y a tout de même un problème de génération : les gens qui arrivent maintenant aux commandes ont été, pour nombre d'entre eux, formés à l'époque des mathématiques modernes, donc à un moment où la géométrie était jetée aux oubliettes. Cela se sent dans leurs décisions : ils n'ont pas, inscrit dans leurs gènes, la conviction de l'importance de la pensée géométrique.

8. Références

[DPR] DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.

[Ka] KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).

[Kl] KLEIN Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay (1991).

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005).

[DP] PERRIN Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*. Repères IREM, 53, p. 91-110, 2003.

[web] *Ma page web* http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/

(6) Je le dis d'autant plus explicitement que je pratique aussi le lobbying pour défendre la géométrie, avec le succès que l'on sait !

(7) C'est d'autant plus incohérent qu'on a maintenu l'introduction de l'exponentielle par l'équation $y' = y$.

(8) Il est vrai que ces domaines sont très utiles en finance, comme on l'a vu…

(9) Il paraît que cela va changer, auquel cas c'est l'ordre dans lequel sont faites les choses qui me semble aberrant.