Géométrie sur une image

Alain Mascret(*)

Résumé : Insérer une image dans une figure obtenue grâce à un logiciel de géométrie dynamique. Trois exemples d'utilisation : une maquette du système solaire, une étude de tableau, un agrandissement photographique.

Certains logiciels de géométrie dynamique permettent d'insérer une image dans la figure. Cet article se propose de répondre aux deux questions suivantes : Comment utiliser cette possibilité ? Et surtout : Quel peut en être l'intérêt ?

Les exemples seront traités en utilisant le logiciel *geogebra* mais peuvent éventuellement l'être par d'autres logiciels. Le lecteur trouvera une liste de logiciels de géométrie dynamique sur le site du groupe « géométrie dynamique » de l'IREM de Dijon : http://geowiki.u-bourgogne.fr/. Il s'agit uniquement de logiciels libres ou tout au moins gratuits. Les élèves peuvent donc les télécharger et les utiliser en toute légalité.

1) Différentes façons d'insérer une image :

Suivant le logiciel et la méthode d'insertion utilisée, l'image sera ou ne sera pas solidaire de la figure.

Voyons-en les conséquences sur un exemple :

Pour donner une idée des dimensions du système solaire, nous allons en réaliser une maquette à l'échelle.

Le soleil sera à Dijon et la terre à Gevrey-Chambertin.

Les trajectoires des planètes seront représentées par des cercles de centre Dijon.

Choisissons un fond de carte de la Bourgogne et insérons-le dans la figure.

Corps céleste	Distance au soleil	
	en réalité en millions de km	sur la maquette en km
Soleil	0	0
Mercure	57,94	5
Vénus	108,26	9
Terre	149,68	12
Mars	228,06	18
Jupiter	778,69	62
Saturne	1430,10	115
Uranus	2876,5	231
Neptune	4506,8	361
Pluton	5903,4	473

Tableau 1

Si nous effectuons cette insertion sans précaution, nous pouvons tracer les cercles représentant les orbites des planètes sur la figure en utilisant l'échelle donnée par la carte, mais le moindre mouvement de la molette de la souris détruira notre travail. En effet, le mouvement de la molette changera l'échelle de la figure mais ne modifiera

(*) collège de Gevrey-Chambertin. IREM de Dijon. mascret@ac-dijon.fr

pas la taille de la carte. Il est donc important que l'image soit solidaire de la figure. Les logiciels *geonext*, *carmetal* et *geogebra* permettent de solidariser l'image et la figure, mais ils ne sont certainement pas les seuls.

Voici comment procéder avec *geogebra* :

Prévoir un segment horizontal [AB] qui sera solidaire du bas de l'image. (Avec *carmetal* ce sera le haut de l'image et avec *geonext* le segment médian, mais le principe est le même). Pour cela, il est pratique d'utiliser la grille ou l'axe des abscisses.

Insérer l'image en cliquant sur le point A. L'image apparaît avec sa taille d'origine.

Ouvrir les propriétés de l'image en faisant un clic droit dessus.

Dans l'onglet « position » choisir le point B comme coin numéro 2.

L'image est maintenant solidaire de la figure. Il est possible de contrôler sa taille et sa position dans la figure en déplaçant les points A et B.

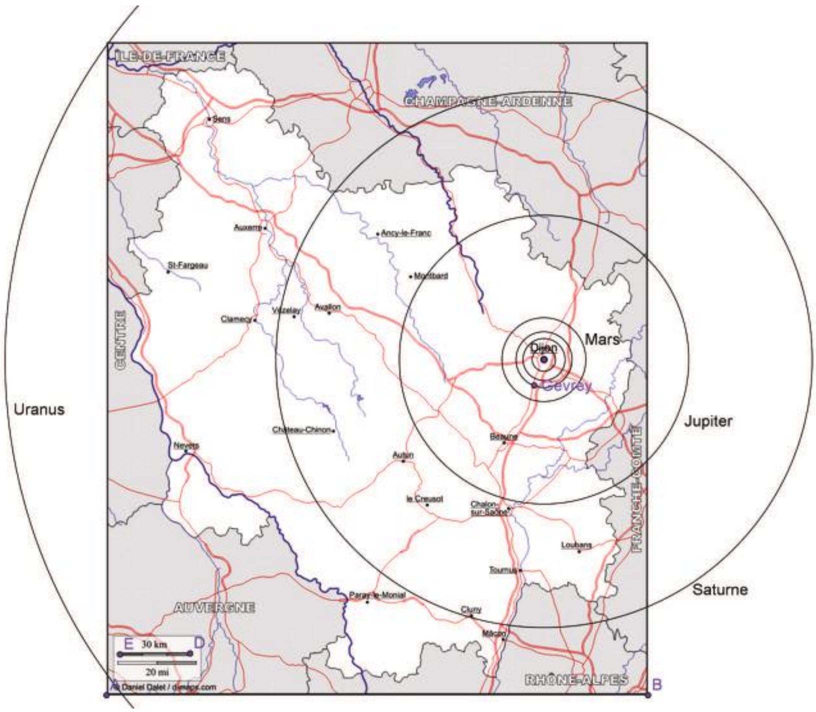

Figure 1

Terminons notre exemple :

Plaçons avec soin le point C sur Dijon et les points E et D dans le cartouche d'échelle de la carte. La longueur ED représentera 30 km. *Geogebra* appelle cette longueur *b* et en précise la valeur. Les rayons des cercles seront obtenus en multipliant les nombres de la dernière colonne du tableau 1 par $\dfrac{b}{30}$ et *geogebra* se charge des calculs.

Remarques :

Cette activité est possible dans une classe de sixième motivée par l'astronomie, l'idéal étant que chaque élève dispose d'un ordinateur. Le tableau 1 fait l'objet d'un travail précédant la séance.

La taille de la figure dépend des points A et B ; de même, les rayons des cercles sont fonction de la longueur ED et leur centre est le point C. Une fois les ajustements de départ réalisés, il est donc judicieux de masquer ces points de façon à ne pas les déplacer de manière accidentelle.

Les logiciels *geogebra* et *carmetal* permettent d'utiliser un troisième coin. Dans ce cas, le déplacement d'un coin déformera la figure. Pour éviter toute déformation, il suffit, avec *geogebra*, de ne pas définir ce troisième coin et avec *carmetal* de cliquer deux fois sur le deuxième point choisi.

2) Analyse d'un tableau :

L'histoire des arts fait maintenant partie intégrante des disciplines sanctionnées par le brevet des collèges. Une étude géométrique de tableau peut être une façon pour le professeur de mathématiques de participer à la préparation de cette épreuve qui est, théoriquement, l'affaire de tous.

Le groupe Math et Arts de l'IREM de Dijon organise chaque année une visite du musée des beaux-arts. À cette occasion, Marie-Noëlle Racine a pris des photographies, « sans flash et sans pied » que le musée des beaux-arts de Dijon nous permet aimablement de publier. (Ces photographies ne peuvent cependant pas être reproduites sans l'accord du musée).

Afin de mettre en évidence certaines particularités d'un tableau, nous sommes amenés à y tracer des lignes. Le gros avantage des logiciels de géométrie, c'est que ces lignes peuvent être déplacées et modifiées, sans avoir à recommencer comme autrefois, quand les tracés se faisaient à la main.

À titre d'exemple, examinons « le couronnement de la vierge » de Zanobi di Machiavelli. Ce tableau date de 1473 et provient de l'église du monastère Santa Croce de Fossabanda près de Pise.

Zanobi di Machiavelli a peint un carrelage. En prolongeant les côtés des carreaux, il est possible de trouver le point de fuite principal F qui se trouve au centre de ce tableau de forme carrée. Les points bleus sur le tableau sont les points choisis pour définir les droites.

De la même façon, les diagonales des carreaux vont concourir en deux points D et D', symétriques par rapport à F sur la ligne d'horizon. Ces deux points sont les « points de distance ». La distance FD est la distance à laquelle il faut placer **un** œil sur la normale au tableau passant par F, si l'on veut bénéficier pleinement de l'impression de relief donnée par la perspective.

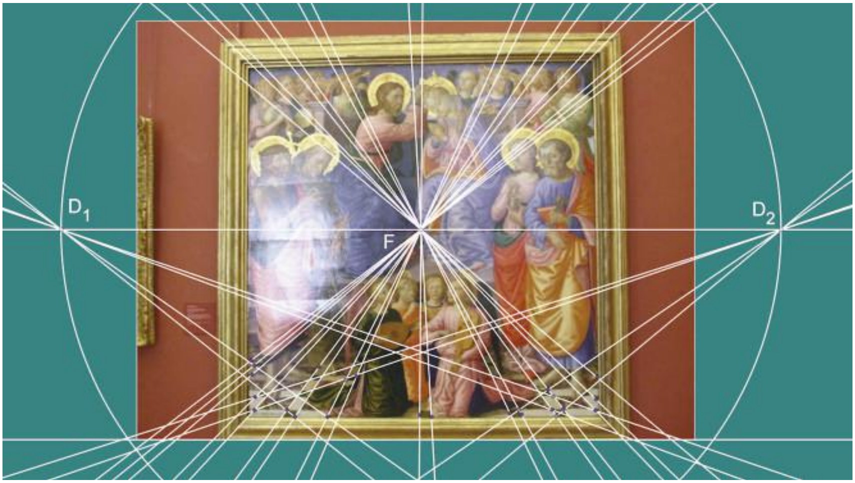

Figure 2
Zanobi di Machiavelli, *Le couronnement de la Vierge*, 1473
Musée des beaux-arts de Dijon. © Photo Marie-Noëlle Racine

En toute rigueur, c'est aussi en ce point qu'il aurait fallu pouvoir placer l'appareil photographique, ce qui n'a pas été le cas. C'est pourquoi le point de fuite principal est légèrement au dessus du centre du tableau comme le montre le schéma de la figure 3.

[AB] représente le tableau. O est la position de l'appareil photographique. [DE] représente la photographie. C est le milieu de [DE].

(OC) est l'axe optique de l'appareil, c'est donc aussi la médiatrice de [DE] et la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$.

(OC) coupe [AB] en G ce qui permet d'écrire :

$$\frac{BO}{BG} = \frac{AO}{AG}.$$

Dans le cas d'un tableau placé « trop haut », comme c'est souvent le cas, AO est plus grand que BO, donc AG est plus grand que BG, ce qui veut dire que le point G est au dessous du milieu M de [AB].

Mais le point M correspond au point de fuite principal F sur la photographie. Le milieu C de [DE] se trouve donc bien au dessous de F.

Il ne faut pas oublier de penser aux distorsions possibles quand on étudie un tableau à partir d'une photographie.

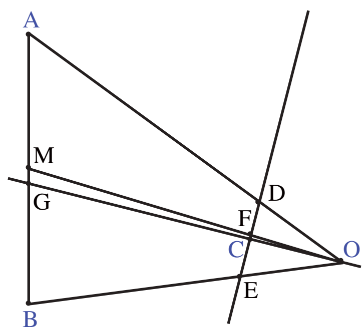

Figure 3
(Distortion de la photographie)

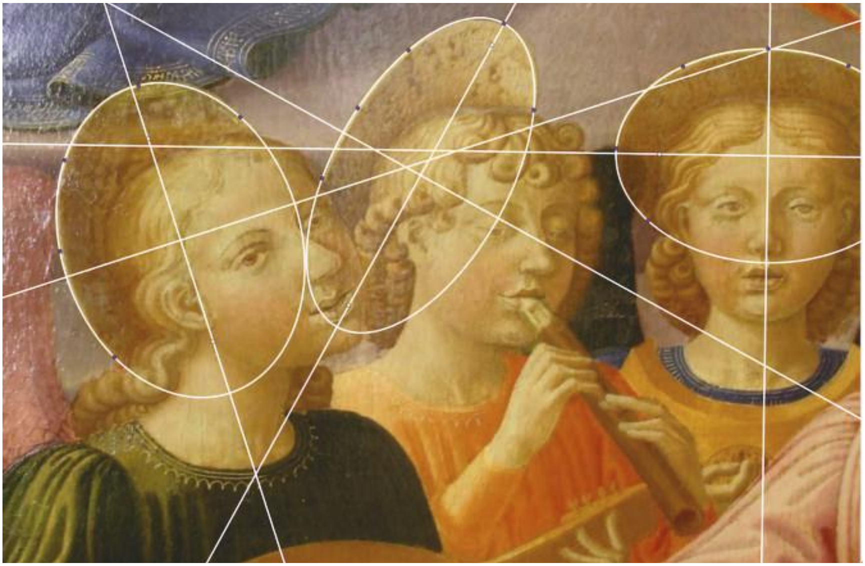

Figure 4 (détail du tableau de la figure 2)

Examinons maintenant la façon dont l'artiste a représenté les auréoles des personnages. Pour les plus importants, les auréoles sont situées dans un plan frontal, c'est-à-dire un plan parallèle au plan du tableau. Elles ne subissent aucune déformation. Un cercle reste un cercle.

Pour les quatre anges du premier plan, c'est différent. L'outil « conique passant par cinq points » va nous montrer (figure 4) que leurs auréoles sont bien représentées par des ellipses dont il est possible de tracer les axes et les foyers. Nous constatons que le petit axe de l'auréole de l'ange vu de face est l'axe de symétrie de son visage.

En conclusion, nous pouvons dire que Zanobi di Machiavelli maîtrisait bien les lois de la perspective.

3) Transformations géométriques d'une image :

Le théorème de Thalès est souvent perçu comme abstrait par nos élèves de quatrième. L'agrandissement ou la réduction sans déformation d'une photographie en donne une application concrète.

Dans le triangle ABC, plaçons D sur [AB] et traçons la parallèle à (BC) passant par D. Elle coupe [AC] en E. Nous obtenons ainsi une « situation de Thalès ».

Dans la fenêtre « Algèbre », *geogebra* indique les longueurs des segments :

$$BC = a = 9{,}25 \; ; \; DE = e = 5{,}44$$

En utilisant la ligne de saisie, au bas de la figure, entrons $r = e/a$.

$r = \dfrac{e}{a} = 0{,}59$ est le rapport de réduction.

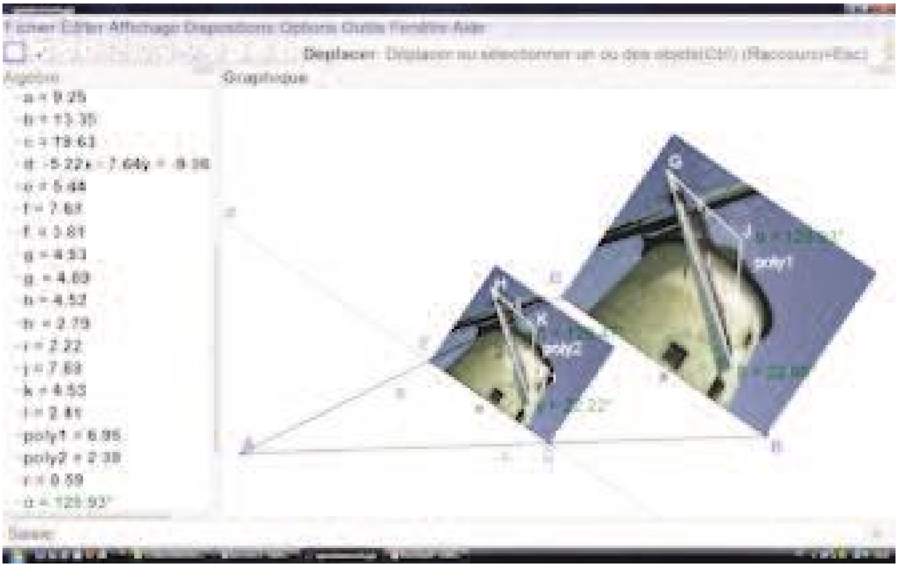

Figure 5
Le moulin de Bouhy © Photo Irène Mascret

Insérons deux fois la même photographie en utilisant les coins C et B pour la première et E et D pour la seconde. Cette seconde image est une réduction de rapport r de la première, ce que nous pouvons vérifier.

Traçons, par exemple le segment [GF] de longueur $f = 7{,}68$ sur l'aile du moulin de la grande photographie. Le segment qui lui correspond sur la petite photographie est [HI] de longueur $g = 4{,}53$. Calculons $r \times f$. *Geogebra* répond en écrivant $h = 4{,}52$. L'écart entre g et h est dû au manque de précision du tracé, fait à la souris.

Traçons maintenant le triangle GFJ sur la grande photographie et son correspondant HIK sur la petite. *Geogebra* les désigne respectivement par poly1 et poly2 dans la fenêtre « algèbre » et nous en donne les aires. Calculons cette fois $r^2 \times f$. Nous obtenons $l = 2{,}41$ au lieu de 2,39 indiqué pour l'aire de HIK.

Geogebra permet aussi de mesurer les angles. Dans notre exemple, l'écart ne dépasse pas 1°.

$$\widehat{JFG} = 22{,}68° \text{ et } \widehat{KIH} = 22{,}22°$$

$$\widehat{GJF} = 128{,}93^{c} \text{ et } \widehat{HKI} = 129{,}47°$$

Cette activité permet de rendre sensible aux élèves que l'absence de déformation d'une image correspond à une transformation géométrique qui conserve les angles et qui modifie les longueurs en les multipliant par un même nombre. Les longueurs correspondantes sur les deux images sont proportionnelles. C'est également l'occasion de leur parler des incertitudes des mesures.

Dans le même esprit, il peut être intéressant de montrer aux élèves l'effet sur une photographie des transformations géométriques qu'ils connaissent. Bien que *Geogebra* considère les images comme des objets à part entière auxquels il possible d'appliquer une transformation géométrique (symétrie, translation, rotation, homothétie), il me semble plus formateur de continuer à appliquer la méthode précédente.

Cette méthode s'applique sans difficulté à la symétrie centrale, mais pas à la symétrie axiale qui change l'orientation des angles. Il faut retourner l'image et pour cela utiliser le troisième coin.

Voici une façon de procéder :

Insérons l'image comme d'habitude.

A est le coin 1 et B le coin 2.

Plaçons le point C sur le coin 4 de l'image.

Si la position du point C est correcte, en ouvrant les propriétés de l'image et en fixant le coin 4 sur C, l'image ne doit pas bouger.

Les points A′, B′ et C′ sont les symétriques des points A, B et C par rapport à l'axe tracé.

Insérons à nouveau la même image en choisissant A′ pour coin 1 et B′ pour coin 2.

Regardons au passage ce que nous obtenons (figure 6). La transformation géométrique est pour l'instant un déplacement (ici une rotation) puisque l'image n'a pas été retournée.

Terminons la manipulation en choisissant le point C' pour coin 4. Cette fois nous obtenons bien deux images symétriques.

Cette activité fait sentir concrètement l'importante de la conservation de l'orientation.

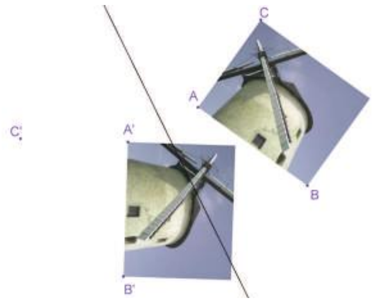

Figure 6

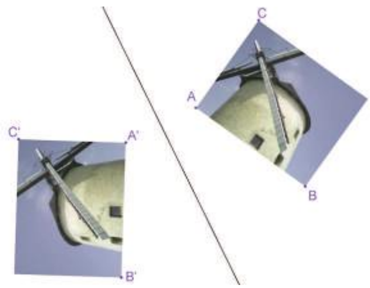

Figure 7

L'utilisation du troisième coin permet de déformer la photographie et, par là même de montrer des transformations géométriques qui « transforment vraiment ».

Reprenons notre image. Choisissons à nouveau comme coins les points A et B. Nous les laisserons fixes et déplacerons le point C choisi pour coin 4.

Un déplacement quelconque du point C peut être obtenu par un déplacement sur une droite perpendiculaire à (AB) suivi d'un déplacement sur une droite parallèle à (AB). Il suffit donc d'examiner les transformations géométriques correspondant à ces deux façons de déplacer le point C. En composant ces transformations, nous obtiendrons toutes les déformations possibles de l'image.

Bien que déformées, ces nouvelles images restent très reconnaissables. Ces transformations conservent donc certaines propriétés de l'image initiale. Il est naturel de rechercher lesquelles et cette recherche peut donner lieu à des exercices.

a) C se déplace sur une perpendiculaire à la droite (AB) :

Observons la transformation de la photographie. Appelons S le sommet du moulin sur la photographie de départ et S′ son image sur la photographie transformée. Nous constatons que :

(SS′) est perpendiculaire à (AB)

$\frac{SH}{S'H} = \frac{CA}{C'A} = k$, ,H étant le projeté orthogonal de S sur (AB).

Cette proportion nous fait penser au théorème de Thalès et nous incite à tracer les droites (CS) et (C′S′) qui se coupent en I sur (AB). Nous admettons que l'image d'une droite est une droite. Si une droite coupe la droite (AB) dont les points sont invariants, son image coupe la droite (AB) au même point. Ce raisonnement a déjà été fait pour la symétrie axiale. Nous disposons de cette façon d'une construction de l'image d'un point.

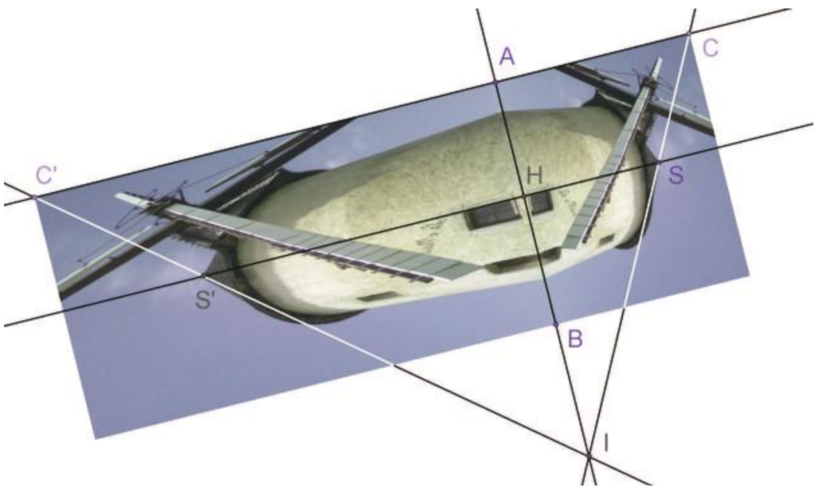

Figure 8
Quand C se déplace sur une perpendiculaire à la droite (AB),
la photographie est transformée par une affinité orthogonale d'axe (AB).

Quelles sont les propriétés conservées par cette transformation ?

Observons que si C′ et C sont de part et d'autre de la droite (AB), comme sur la figure 8, la transformation change l'orientation. S'ils sont du même côté de (AB), elle la conserve.

Les longueurs ne sont pas conservées mais obtenir C′S′ en fonction de CS peut se faire en utilisant la définition du cosinus :

$$C'S' = CS\,\frac{\cos\widehat{AIC}}{\cos\widehat{AIC'}}$$

La conservation des milieux se montre en utilisant le théorème de la droite des milieux.

Sur la figure 9, M étant le milieu de [RS], une première application de ce théorème dans le triangle R′RS prouve que L est milieu de [R′S]. Une seconde application dans le triangle R′SS′ montre que M est milieu de [R′S′].

La conservation des milieux entraine celle du parallélisme en raison de la propriété caractéristique du parallélogramme.

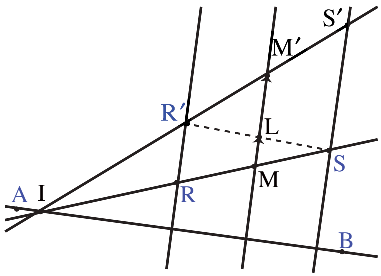

Figure 9

Les aires sont multipliées par k. Il suffit de le montrer pour un triangle, puisque tout polygone peut être considéré comme « somme » de triangles du point de vue de l'aire.

Nous partageons le triangle RST en deux, en traçant une parallèle à (AB) passant par le sommet T coupant le côté opposé [RS] en G. (Figure 10). R se projette orthogonalement sur cette droite en E et S en F.

Les images respectives E′, F′, G′ et T′ de E, F, G et T sont sur la parallèle à (AB) passant par T′, à l'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant respectivement par E, F, G et T.

Comme G′T′ = GT et F′S′ = $k \times$ FS, l'aire de G′S′T′ vaut k fois celle de GST. Le même raisonnement s'applique à R′G′T′ et RGT et finalement à R′S′T′.

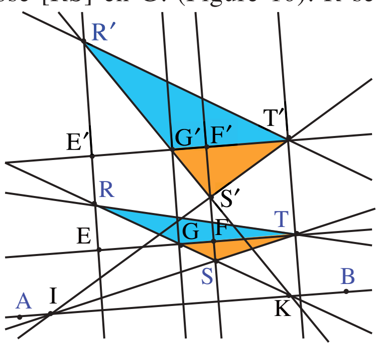

Figure 10

b) C se déplace sur une parallèle à la droite (AB) :

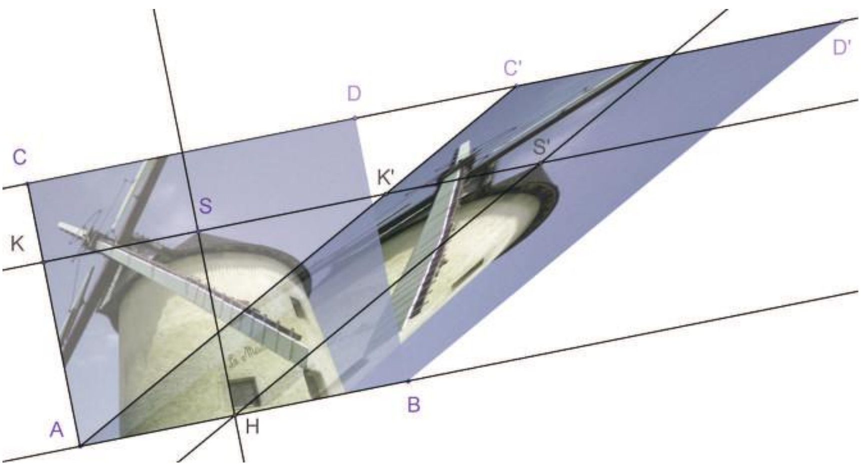

Figure 11
Quand C se déplace sur une parallèle à la droite (AB), la photographie est transformée par une transvection d'axe (AB).

La photographie transformée a maintenant la forme d'un parallélogramme ABD′C′, en appelant D′ le troisième coin. Observons, comme précédemment le point S et son image S′.

La droite (SS′) est parallèle à la droite (AB). Elle coupe [AC] en K et [AC′] en K′. Le point K′ est l'image de K.

Le parallélogramme AHS′K′ est l'image du rectangle AHSK, H étant le projeté orthogonal de S sur (AB) ce qui nous donne une méthode de construction de l'image d'un point.

Quelles sont les propriétés conservées par cette transformation ?

Ici C et son image C′ sont toujours du même côté de la droite (AB). La transformation conserve l'orientation.

Les longueurs et les angles ne sont visiblement pas conservés.

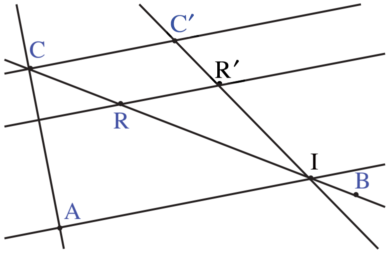

Figure 12

Comme au paragraphe précédent nous admettons que l'image d'une droite est une droite. Si une droite coupe la droite (AB) dont les points sont invariants, son image coupe aussi la droite (AB) au même point, ce qui permet de construire d'une autre façon l'image d'un point.

La figure 12 montre la contruction de l'image R′ de R, connaissant l'image C′ de C.

Ici encore la conservation des milieux peut se montrer grâce au théorème de la droite des milieux, comme le montre la figure 13.

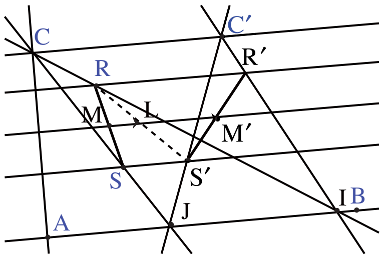

Figure 13

Enfin, une propriété qui surprend beaucoup les élèves : la transformation conserve les aires bien qu'elle ne conserve pas les longueurs.

Sur la figure 14, les triangles RST et R′S′T′ sont partagés en deux triangles par la parallèle à (AB) passant par S qui coupe [RT] en U et [R′T′] en U′.

U′ est l'image de U et S′ l'image de S donc US = U′S′. (car sur une droite parallèle à (AB) les longueurs se conservent)

C, D, E et F sont les projetés orthogonaux respectivement de R, T, T′ et R′.

RC = R′F et TD = T′E

Les triangles RUS et R′U′S′ ont donc la même aire et il en est de même des triangles TUS et T′U′S′.

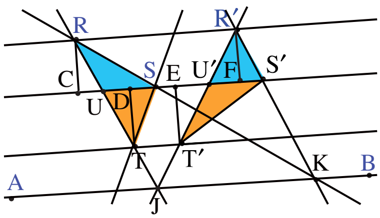

Figure 14

Comme tout polygone peut être considéré du point de vue de l'aire comme une « somme » de triangles, la transformation conserve les aires.

Les démonstrations suggérées ci-dessus sont toutes du niveau de quatrième. Il ne s'agit pas, bien sûr, de faire la théorie de ces transformations, mais de résoudre certains problèmes qui se posent de façon naturelle pendant la manipulation.

4) Sitographie :

Pour terminer, voici quelques liens en rapport avec cet article :

Sur l'astronomie le site du CLEA (comité de liaison enseignants astronomes) :
http://www.ac-nice.fr/clea/

Le site du musée des beaux-arts de Dijon
(en attendant de le visiter réellement lors d'un passage à Dijon)
http://mba.dijon.fr/

Sur Zanobi Machiavelli :
http://www.treccani.it/enciclopedia/zanobi-machiavelli_(Dizionario_Biografico)/
C'est en italien, mais la traduction de google est compréhensible.

Sur l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique :
http://geowiki.u-bourgogne.fr/
C'est un wiki, je vous invite à le visiter et à ne pas hésiter à vous y exprimer.

Reproduction d'un poster Hippocampe