

La probabilité d'extinction d'une espèce menacée : un joli problème en TS d'après un article d'Images des Maths

Catherine Combelles(*)

Le site « Images des Maths » est plein de ressources pour les professeurs du secondaire. Encore faut-il avoir le temps de lire, de trier, de mettre en forme. Et le temps est ce qui manque le plus ! Mais quand on est à la retraite, on a le temps de fureter, et voici une de mes découvertes.

La substance de ce texte est l'article de Niels Berglund « La probabilité d'extinction d'une espèce menacée », paru sur le site « Image des maths » en février 2013. Le problème initial m'a paru à la fois très intéressant et tout à fait à la portée d'un élève de Terminale S, mêlant avec bonheur analyse et calcul de probabilités. Je l'ai donc cuisiné sous forme d'un énoncé de devoir à l'usage des élèves de Terminale S, très classique dans sa forme : mon idée était de fournir un énoncé de « devoir-maison », et les élèves doivent alors être suffisamment guidés pour pouvoir se débrouiller tout seuls.

On trouvera l'article initial , classé « piste noire », à l'adresse :

<http://images.math.cnrs.fr/La-probabilite-d-extinction-d-une.html>

On verra que je n'ai fait que modifier sa forme pour en faire un usage scolaire, sans craindre le « copier-coller ». La fin de l'article de Niels Berglund élargit ensuite le problème à des questions plus difficiles.

I. L'énoncé

Les modèles d'évolution de populations ont une longue histoire. Ici, il sera question d'un modèle probabiliste, introduit en 1874 par Francis Galton et Henry William Watson.

Supposons, pour étudier un modèle simplifié, que chaque individu a au cours de sa vie :

- aucun enfant avec une probabilité $\frac{1}{8}$
- un enfant avec une probabilité $\frac{3}{8}$
- deux enfants avec une probabilité $\frac{3}{8}$

(*) combelles.catherine@gmail.com

- trois enfants avec probabilité $\frac{1}{8}$.

Les nombres d'enfants d'individus différents sont de plus supposés indépendants les uns des autres, et on admet qu'aucun individu n'a plus de 3 enfants.

Voici un exemple d'arbre généalogique obtenu par ce procédé, en partant d'un ancêtre unique :



L'ancêtre, en haut de l'arbre, a un enfant, qui en a lui-même deux, et ainsi de suite. Nous allons calculer la probabilité que la descendance d'un unique ancêtre s'éteigne.

Première partie : calculs de probabilités

Partons d'un seul individu. Nous étudions la population de ses descendants. La probabilité que la population s'éteigne dès la première génération (ses enfants) est

$$q_1 = \frac{1}{8} : \text{il n'a pas d'enfant.}$$

1. Cherchons d'abord la probabilité que la population soit éteinte à la deuxième génération (il n'a pas d'enfant, ou il a des enfants mais pas de petits-enfants).
 - a) S'il a 2 enfants, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de petits-enfants ? Et s'il en a 3 ?
 - b) Calculer alors la probabilité que la population soit éteinte à la deuxième génération.
2. Soit q_n la probabilité pour que la descendance d'un individu comporte au plus n générations ($n \geq 1$). Exprimer en fonction de q_n la probabilité q_{n+1} que la descendance d'un individu comporte au plus $n + 1$ générations. Pour calculer q_{n+1} , on remarquera que la descendance d'un individu comporte au plus $n + 1$ générations s'il n'a pas d'enfant ou si les descendes de ses enfants comportent au plus n générations.

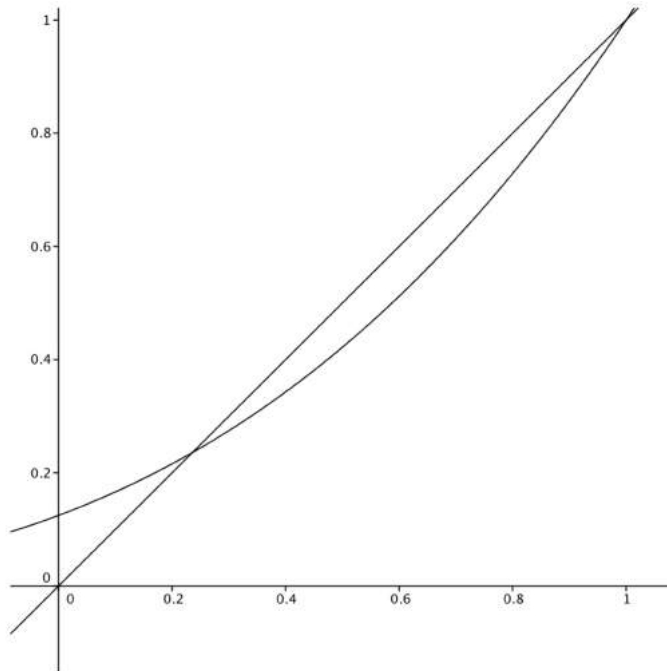
Deuxième partie : Étude de la suite (q_n)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$, telle que :

$$q_{n+1} = f(q_n).$$

On aura montré plus haut que $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$.

- a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - b) Pour comparer q_n et q_{n+1} , on va étudier le signe de la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$.
On remarque que g s'annule en 1 ; ce polynôme se factorise alors par $(x - 1)$: trouver a, b, c tels que $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. Étudions à présent la suite (q_n) .
- a) À l'aide du graphique ci-dessous, représenter les premiers termes de la suite (q_n) . Que peut-on prédire sur son comportement ?



Représentation graphique de la fonction f
et de la fonction : $x \rightarrow x$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Démontrons les conjectures établies d'après le graphique :

Prouver par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq q_n \leq \sqrt{5} - 2.$$

Prouver que la suite (q_n) est croissante.

c) Prouver que la suite (q_n) est convergente. Trouver sa limite (on utilisera la relation : $q_{n+1} = f(q_n)$).

Conclusion : on a ainsi prouvé que, sous nos hypothèses simplificatrices, la probabilité d'extinction de cette descendance d'un unique ancêtre est égale à $\sqrt{5} - 2$ soit environ 23,6%.

II. Quelques commentaires

Le problème ne me semble pas adapté pour être exploité comme situation de découverte : l'arbre qu'on y voit dessiné n'est pas un arbre de probabilité, et l'arbre de probabilité que l'élève pourra construire pour résoudre la partie 1 n'est pas un arbre généalogique descendant. La difficulté de l'exercice réside précisément, il me semble, dans ces deux représentations en arbre qui éclairent la situation, mais peuvent aussi la compliquer par leur coexistence. Il peut embrouiller les idées d'un débutant et lui faire apparaître les arbres comme un objet bien redoutable !

Pour des élèves plus aguerris, son intérêt est de faire apparaître de façon naturelle une suite définie par récurrence, et d'utiliser de façon non artificielle les quelques outils dont disposent les élèves de Terminale S pour résoudre le problème.

Ils pourront ainsi trouver dans ce problème, en acte, un élément de réponse à la question classique qu'il ne faut pas éluder : « À quoi servent les mathématiques ? ». C'est une occasion à ne pas laisser passer !