

L'enseignement des mathématiques en Angleterre

Danièle Eynard(*)

Introduction

Je tiens à remercier mon amie Chris Lynn qui enseigne les mathématiques à *King Edward Camp Hill School for Girls*. Cette école est une *Grammar School* publique (au sens français), dont les élèves sont sélectionnés pour leurs excellentes capacités. Chris m'a beaucoup aidé à comprendre la façon dont l'enseignement et les examens fonctionnent en Angleterre.

Je précise que ses renseignements concernent l'Angleterre et que, donc, je ne suis pas au fait de ce qui se passe en Écosse ou au Pays de Galles par exemple, même si je pense que les différences sont minimales.

Et j'espère ne pas avoir mal interprété tous les renseignements qui m'ont été donnés, car le système anglais est encore plus complexe que le nôtre.

I. L'enseignement dans le secondaire en Angleterre – Cours scolaire, évaluation et accès au supérieur

En Angleterre, il y a deux étapes importantes au lycée :

- le GCSE (*General Certificate of Secondary Education*) qui est l'examen marquant la fin de l'enseignement obligatoire, et qui se passe généralement à la fin du « grade 11 » équivalent de la seconde (et c'est ici que se fait la coupure entre le premier cycle et le second cycle de l'enseignement secondaire, donc un an plus tard que chez nous), après 11 ans d'étude,
- le *A level*, qui est l'équivalent de notre baccalauréat, et qui se passe aussi sur deux années, même si ce n'est pas de la même façon que chez nous. Les deux dernières années s'appellent *Sixth form*.

Un premier cycle non spécialisé

Les mathématiques sont obligatoires jusqu'au GCSE, avec environ 3 h de cours par semaine. Les autres matières obligatoires sont l'anglais et les sciences qui comprennent physique, chimie et biologie. En plus de ces trois matières obligatoires, les élèves choisissent environ sept autres matières, en fonction de ce que leur école propose.

Pour le GCSE, les élèves sont notés de A (le mieux), et même A*, à G, et bien sûr si on veut continuer ses études, il vaut mieux avoir de bonnes notes : pour pouvoir garder une matière au *A level*, il faut en principe qu'un élève ait obtenu au moins B au GCSE, mais souvent un élève ayant eu C sera accepté. Dans les bonnes écoles comme celle de mon amie, tout le monde obtient A* ou A.

(*) deynard.apmep@wanadoo.fr

Un programme officiel a été fixé par le gouvernement il y a environ 15 ans, le *National Curriculum*, cependant différents comités, les *boards*, sont chargés de la définition détaillée du programme et de l'organisation des examens.

Ceci dit, il y a assez peu de différences d'un *board* à l'autre, certains étant simplement un peu plus exigeants.

Les professeurs d'un établissement choisissent le *board* qui leur semble le plus adapté à leur public, et le gardent pendant plusieurs années.

Par exemple, à *King Edward Camp Hill School for Girls*, les professeurs choisissent un niveau élevé (voir la suite).

D'après ma collègue, en ce qui concerne les mathématiques, le GCSE a tendance à devenir de plus en plus facile, et c'est pourquoi dans les bonnes écoles comme la sienne, les élèves passent le GCSE « de base » une année plus tôt, et un GCSE de meilleur niveau en grade 11.

Les élèves peuvent aussi passer les deux GCSE la même année, dans l'espoir d'obtenir B dans au moins un des deux.

Avec le GCSE de base (*foundation*), on peut obtenir au mieux B voire C ou D selon les matières.

Le GCSE de niveau élevé est utile pour les élèves dans les matières qu'ils veulent conserver au niveau supérieur, puisqu'il leur permet d'obtenir A, B ou C. Pour certaines matières, on peut continuer avec un C, mais ce n'est pas conseillé. Et, par exemple dans le lycée de ma collègue, les élèves ne passent même pas l'examen de mathématiques au niveau *foundation* car il n'est pas considéré d'un suffisamment bon niveau.

De toute façon, pour être admis en *Sixth form*, il faut avoir au moins 5 C au GCSE. Les élèves qui n'ont pas de bonnes notes aux matières passées au GCSE et qui veulent continuer choisissent alors de nouvelles matières, comme psychologie ou économie.

Les élèves qui n'obtiennent pas au moins C en anglais et en mathématiques repassent en général l'examen, car ce niveau est souvent demandé par leurs futurs employeurs. Certaines écoles font passer à leurs élèves le iGCSE (international GCSE), qui est utilisé par d'autres pays également. Pour cet examen, en mathématiques, il y a des ajouts par rapport au GCSE : notions sur les ensembles (union, intersection, diagramme de Venn), notions sur les fonctions (ensemble de définition, ensemble image, fonctions de référence, antécédents, fonctions composées, fonction inverse), notions de dérivation (tangente, dérivées de polynômes, extremums, application à la cinématique et à l'optimisation). Pour le iGCSE, il y a aussi un niveau *foundation* et un niveau plus élevé.

Un deuxième cycle spécialisé

Après le GCSE, les élèves peuvent abandonner les mathématiques, et beaucoup le font. En effet, les élèves ne conservent que quatre matières en première année de *sixth form*, et 3 (ou 4 pour les plus brillants) en deuxième année de *sixth form*.

Ceux qui choisissent de continuer à étudier les mathématiques peuvent soit choisir *Maths*, ou *Maths* et *Further Maths*, on pourrait comparer cela à S avec ou sans spécialité chez nous, mais c'est valable pour les deux années.

Les élèves étudient quatre matières en *year 12*, et passent un examen (AS) portant sur ces quatre matières à la fin de l'année ; les épreuves durent 1 h 30. Puis les élèves passent le *A level* en *year 13*, dans les trois matières qu'ils ont conservées (ou 4 pour les meilleurs).

Dans certaines écoles, particulièrement les écoles privées de bon niveau, les élèves passent le iGCSE, puis le IB (*international baccalaureate*).

L'accès à l'enseignement supérieur

Au cours de leur dernière année de lycée, les élèves choisissent 5 universités pour lesquelles ils présentent un dossier d'admission. Ils rédigent une lettre de motivation expliquant pourquoi ils souhaitent aller dans cette université, et pourquoi ils choisissent telle ou telle matière. Les professeurs doivent aussi rédiger une lettre de référence qui est jointe à la lettre de motivation.

Les universités offrent des places aux étudiants, sous réserve de l'obtention de certaines « notes » aux examens du *A level*. Cela peut être : A en mathématiques, B en physique, B en anglais et C en chimie par exemple.

Les meilleures universités comme Oxford ou Cambridge demandent même, depuis 2010, d'avoir A* pour la matière principale que l'élève compte choisir à l'université. Oxford, en plus des références fournies par les professeurs et des notes à l'examen, fait passer un test aux candidats pour la plupart des matières, avant l'entretien éventuel.

Par contre Cambridge se contente de l'entretien, sauf pour les futurs étudiants en médecine et médecine vétérinaire.

Des tests sont proposés par les deux universités au moment des entretiens.

Par ailleurs jusqu'en 2015 existe également, pour les mathématiques, le AEA (*Advanced Extension Award*), qui a le même rôle de sélection que le A*. Il a été supprimé dans les autres matières depuis 2010.

Comme pour les inscriptions post-bac sélectives en France, les étudiants ont intérêt à choisir des universités correspondant à leur niveau. Si leur dossier n'est pas assez bon, certains risquent de ne pas être pris, d'autres sont sur liste d'attente en attendant que des places se libèrent éventuellement pendant l'été.

II Les mathématiques au cycle terminal du lycée

Pour en revenir aux mathématiques, comme dit précédemment, les élèves peuvent choisir *Maths*, ou *Maths* et *Further Maths* (mathématiques avancées).

Pour la partie maths : les élèves choisissent 6 modules, 3 correspondant à l'examen de niveau AS (*year 12*) et 3 pour le *A level*.

Les élèves doivent prendre C1, C2, C3 et C4 (C pour *Core mathematics*, on pourrait appeler cela socle commun), ils passeront l'examen pour C1 et C2 en *year 12*, et l'examen pour C3 et C4 en *year 13*.

Ils doivent de plus choisir deux modules parmi S1, D1, M1, S2, D2, M2, M3. S signifie *statistics*.

D signifie *Decision mathematics* : les mathématiques de la décision, ce qui comprend les méthodes d'optimisation par graphes, la planification et l'optimisation.

M signifie *Mechanics*.

Cependant le choix dépend des établissements, qui n'offrent pas forcément tous les modules. Les élèves ont malgré tout toujours un choix.

Pour les mathématiques avancées :

Les élèves étudient tous FP1, FP2 et FP3 (FP signifie *Further Pure*), et ils choisissent trois modules supplémentaires dans la liste de modules optionnels ci-dessus. Tous les lycées n'offrent pas *Further Maths*, seuls les meilleurs lycées offrent cette possibilité.

L'année 12, les élèves passent des examens pour FP1 et deux autres modules, et l'année 13 ils passent des examens pour FP2, FP3 et un autre module.

Il semble qu'ils puissent remplacer FP3 par un module supplémentaire.

En ce qui concerne le nombre d'heures d'enseignement, 4 heures sont en général consacrées aux mathématiques (sans *Further*), et entre 6 et 7 si on inclut le *Further*.

Il ne faut pas oublier que le nombre d'heures de cours est globalement très inférieur au nombre d'heures de cours en France, compte tenu du petit nombre de matières étudiés : les élèves quittent le lycée à 15 h, ce qui leur laisse du temps pour le travail personnel.

Pour compléter ces généralités sur l'enseignement des mathématiques en Angleterre, il est intéressant de regarder les programmes, dans une troisième partie, et les examens, dans une quatrième partie.

III Les programmes

Les programmes

J'ai choisi, avec l'aide de ma collègue, le *board* AQA (*Assessment and Qualifications Alliance*), aussi bien pour le GCSE que pour le *A level*.

AQA est une association à but non lucratif indépendante du gouvernement, comme les autres *boards*.

Il est intéressant de savoir que, pour l'examen GCSE, une partie se fait sans calculatrice (1 h 15 et 70 points pour le GCSE de niveau standard, 1 h 30 et 70 points pour le GCSE de niveau élevé), et l'autre avec (1 h 45 et 105 points pour le GCSE de niveau standard, et 2h et 105 points pour le GCSE de niveau élevé – j'ai expliqué plus haut qu'il y avait maintenant deux GCSE pour pallier le fait que le GCSE « normal » est devenu trop facile).

Si on choisit le niveau standard, on ne peut obtenir des notes que de B à G, tandis qu'avec le niveau élevé, on peut obtenir des notes de A* à D (éventuellement E).

Donc si on souhaite poursuivre ses études, il est préférable de choisir le niveau élevé.

On pourra trouver sur le site de l'APMEP le programme complet, tant pour le GCSE que pour le *A level*.

Analyse de ces programmes :

Pour le GCSE, je ne pointerai que les différences entre nos programmes et les programmes anglais.

Arithmétique

Les connaissances arithmétiques exigées ressemblent beaucoup aux nôtres.

Il est à remarquer que les élèves, dès ce niveau, connaissent les racines cubiques, et sont censés mémoriser les carrés des nombres jusqu'à 15 et les cubes des nombres jusqu'à 5, plus évidemment 10. Par ailleurs on parle de *positive and negative square root*.

Pour le niveau élevé :

En ce qui concerne les puissances, on va jusqu'aux exposants fractionnaires.

On sait reconnaître une fraction par son écriture décimale périodique.

La répétition d'augmentations en pourcentages conduit à l'étude de la croissance exponentielle.

Calculatrice

L'utilisation efficace de la calculatrice fait partie du programme. En ce qui concerne les fonctions trigonométriques, cela est exigé seulement pour le niveau élevé (l'utilisation efficace dans ce cas signifie par exemple savoir entre autres qu'il ne faut arrondir qu'en fin de calcul pour ne pas propager les erreurs). Jusqu'au GCSE, les élèves se contentent d'une calculatrice de type collègue, et certains continuent même avec celle-ci jusqu'au *A level*. La calculatrice graphique est utile, mais pas indispensable pour les examens.

Algèbre

Il est explicitement spécifié qu'on doit savoir faire la distinction entre une équation, une formule et une expression. Les élèves doivent savoir de plus résoudre une équation du second degré, soit par passage par la forme canonique, soit avec le discriminant.

Par ailleurs, ils doivent savoir résoudre une équation de façon approchée par essais - corrections lorsque la solution exacte ne peut être trouvée par une méthode connue. L'utilisation de l'algèbre pour bâtir des démonstrations simples est réservée au niveau élevé.

Analyse

Les élèves prennent déjà connaissance des suites, et doivent être capables de calculer les termes successifs, que la suite soit définie de façon explicite ou par récurrence.

Ils doivent aussi connaître l'expression du terme général d'une suite arithmétique.

En ce qui concerne les droites, ils doivent connaître les règles concernant les coefficients directeurs des droites parallèles et perpendiculaires.

En ce qui concerne les fonctions, en plus de notre programme, ils connaissent les fonctions cubiques, et doivent être capable de construire des lieux de points simples.

Par contre l'essentiel du travail porte sur la représentation graphique et son utilisation, et les notions de sens de variation et d'extremum ne sont pas abordées. Il n'est pas fait mention de tableau de variation. Les fonctions homographiques ne sont pas abordées à part la fonction inverse, et il semble que l'étude des fonctions du second degré se borne à savoir les représenter.

Géométrie

Les rotations, les translations, les homothéties à coefficient positif sont au programme.

Les conditions d'égalité des triangles sont au programme, ainsi que les triangles semblables.

Par contre, pas de théorème de Thalès.

La trigonométrie se limite aux connaissances françaises du collège.

Pour le niveau élevé :

Homothéties à coefficient négatif, propriétés des angles inscrits et représentation des fonctions trigonométriques, ainsi que l'usage intelligent de la calculatrice en ce qui les concerne (voir plus haut).

Géométrie dans l'espace

Le programme est peu précis, mais il semble qu'on se borne à utiliser des formes, calculer des volumes, on ne fait pas de raisonnements, par exemple sur des intersections d'objets.

Mesures

Il est amusant (ou pas ?) de voir que les anglais restent attachés à leurs unités, continuent d'ignorer partiellement les unités internationales, et donc demandent aux élèves de connaître des conversions approchées entre leurs unités et celles du Système International.

Les élèves, sans doute à cause du passé maritime de l'Angleterre, sont censés connaître et savoir utiliser les angles de route.

Les élèves doivent connaître et savoir utiliser certaines unités de grandeurs composées comme, par exemple, la vitesse.

Au niveau élevé, concernant les unités de grandeurs composées, on va jusqu'à la densité.

La formule donnant l'aire d'un triangle par $\frac{1}{2} ab \sin C$ est supposée connue.

Statistiques

La première compétence des élèves est la collecte de données.

Même pour le GCSE de base, les élèves sont censés savoir identifier une cause de biais, concevoir une expérience ou un sondage, savoir extraire des données à partir de listings.

Le mode et les quartiles sont aussi au programme.

Les capacités incluent la reconnaissance de corrélation et la matérialisation de cette corrélation par une droite construite « au mieux ».

Il est spécifié que les candidats devront être capables de dire si une corrélation est faible ou forte, positive ou négative.

Pour le niveau élevé, les élèves doivent savoir trouver des méthodes d'échantillonnage appropriées, discuter les biais, donner des interprétations rigoureuses de leurs données, et préciser leur degré de signification.

Probabilités

On va jusqu'aux probabilités conditionnelles et à l'utilisation d'arbres pondérés. La connaissance des événements indépendants fait partie du programme.

Conclusion

Il semble donc que, avec moins d'heures, nos collègues anglais arrivent à enseigner autant, si ce n'est plus, de notions que nous. Par contre, en ce qui concerne le nombre d'élèves par classe, jusqu'au GCSE, il est en moyenne de 25 lorsque les classes sont hétérogènes, ou dans les établissements comme celui de ma collègue où tous les élèves sont bons, et les effectifs peuvent monter jusqu'à 32 pour les classes de bons élèves dans les établissements ayant décidé de faire porter un effort particulier sur les élèves en difficulté.

Par ailleurs, les journées se terminant aux alentours de 15 h, cela laisse du temps pour le travail personnel.

Pour le *A level*

Il est évidemment plus difficile de faire des comparaisons au niveau baccalauréat, puisqu'une partie de l'enseignement est optionnelle.

Modules obligatoires

On y retrouve l'étude de fonctions, les exponentielles et les logarithmes, l'intégration, les suites et les sommes de termes d'une suite, la trigonométrie, la géométrie vectorielle, les vecteurs et le produit scalaire, des méthodes numériques pour trouver des racines d'équations.

L'étude des courbes et de la différentiation vont bien au-delà de ce que nous faisons (voir les sujets de *Core 4*, c'est-à-dire le plus élevé des modules obligatoires, ci-après).

Ici donc, pas de raisonnement par récurrence, pas de probabilités ni de statistiques, pas de géométrie dans l'espace, pas de nombres complexes, ces notions sont étudiées par certains dans les modules au choix.

Modules au choix

Dans ces modules, on va plus loin qu'en France, tant en statistiques (loi de Poisson, chi-deux, ...) et, bien sûr en mécanique puisque nous n'en faisons pas.

Les modules de décision étudient d'intéressants problèmes de chemin optimal, de jeu sans perdant, etc.

En FP, on note l'étude des séries de Maclaurin, des déterminants des matrices, des valeurs propres, ...

IV Les épreuves d'examens

En ce qui concerne le GCSE

Je me suis concentrée sur le GCSE de base, car j'ai pensé qu'il serait intéressant de comparer les exigences de base, justement.

J'ai gardé certaines parties des épreuves, celles qui sont différentes de ce que nous

pourrions trouver en France, à la fois pour la partie sans calculatrice et pour la partie avec calculatrice.

Je liste ci-dessous ce qui ne m'a pas paru très différent, et ensuite je fournis des exemples de ce qui me semble différent.

Partie sans calculatrice :

Ce qui est commun ou que je n'ai pas illustré (en italique) :

- Calculer une expression en x .
- Arrondir correctement.
- *Connaître les carrés parfaits jusqu'à 15 et reconnaître aussi les racines des carrés parfaits.*
- Connaître le sens des mots facteur et multiple.
- Savoir calculer des durées en heures, minutes et secondes.
- Savoir résoudre des problèmes menant à une opération, et donc choisir la bonne opération.
- Savoir calculer des pourcentages simples.
- *Savoir utiliser des pièces de monnaie pour obtenir une somme donnée.*
- Résoudre des équations simples du type $ax + b = cx + d$.
- *Connaître la définition des nombres premiers et l'utiliser.*
- Connaître les propriétés sur les angles associés.

Partie avec calculatrice :

Ce qui est commun ou ce que je n'ai pas illustré (en italique) :

- Pourcentage d'augmentation ou de diminution.
- Moyenne arithmétique.
- Somme des angles d'un triangle.
- Factorisation et développement.
- Conversions d'unités.
- Statistiques : savoir lire des graphes ou les réaliser.
- Équations du premier degré, mais un peu plus difficiles.
- *Calculer les termes d'une suite de la forme $u_n = f(n)$.*
- *Connaître la forme générale d'un terme d'une suite arithmétique.*
- Calcul d'aires.
- *Résolution d'une équation du second degré.*
- Pourcentages plus difficiles (par exemple trouver la valeur avant réduction connaissant la valeur après réduction).
- Résolution d'inéquations simples (du premier degré).
- *Transformations de figures simples par rotation ou toute autre transformation.*
- Angles au centre et angles inscrits.
- *Aires de triangle, y compris la formule avec le sinus.*
- Fonction inverse, mais pas fonction homographique.
- Équations avec x au dénominateur.

Exemples de sujets :

Les exemples ci-après proviennent du *board* AQA (*Assessment and Qualification Alliance*).

On trouvera tous les renseignements concernant ce « *board* » (programme, exemples d'examens des années antérieures, etc.) à l'adresse internet suivante :

<http://www.aqa.org.uk/>

Vous trouverez sur le site de l'APMEP d'autres exemples d'énoncés de GCSE et de *A-level*.

Exemples d'énoncés de GCSE**Partie sans calculatrice :**

La partie sans calculatrice comporte 24 questions à traiter en 1h30. Il est intéressant de voir que les premières sont très simples.

Question 1. Voici quatre cartes dont chacune porte un chiffre :

Le nombre affiché est 3761.

1 (a1) Utiliser ces quatre cartes pour écrire le plus petit nombre possible.

1 (a2) Utiliser ces quatre cartes pour écrire le plus grand nombre pair possible

1 (b) Utiliser ces quatre cartes pour écrire une addition correcte

+ =

1 (c) On a besoin d'une cinquième carte portant un chiffre pour écrire la réponse correcte à 13×6 . Écrire ci-dessous ce cinquième chiffre.

Partie avec calculatrice :

La partie avec calculatrice comporte 22 questions à traiter en 2h. Un formulaire concernant les aires et volumes est fourni.

Question 3. (a) p est un nombre premier et r un nombre impair. L'expression pr^2

est toujours
impaire

est toujours
paire

peut être
soit paire soit impaire

(cocher la bonne réponse).

Donner des exemples pour justifier cette réponse.

3. (b) x, y, z sont trois entiers impairs. Écrire une expression fonction de ces trois nombres qui soit toujours un nombre pair.

Question 16. Expliquez comment vous étudieriez l'hypothèse suivante : « Dans les matchs de football, il y a plus de buts marqués lors de la seconde mi-temps que lors de la première ».

Votre réponse devra s'organiser logiquement et se référer à un plan indiquant :

- comment vous rassemblez les données,
- quelle quantité de données vous rassemblez,
- comment vous les traitez,
- votre interprétation et vos conclusions.

Exemples d'énoncés de A-Level

Premier extrait : algèbre linéaire et géométrie analytique

Il provient d'un examen de *Further pure 4*. L'épreuve, sur 75 points, durait 1 h 30. Je respecte les notations anglaises

Question 1. (5 points)

Les vecteurs a et b sont tels que $a \cdot b = 31$, $|a| = 5\sqrt{2}$ et $|b| = 3$ (le point représente ici le produit scalaire, $| \cdot |$ la norme, et les vecteurs ne portent pas de flèche).

Déterminer la valeur exacte de $|a \times b|$ (le signe \times représente le produit vectoriel).

Question 2. (5 points)

Décrire la transformation unique représentée par chacune de ces matrices :

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Question 3. (7 points)

(a) Trouver les valeurs propres de la matrice $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ et les vecteurs propres correspondants.

(b) Une transformation T du plan est donnée par la matrice M . Écrire les coordonnées du point invariant.

Question 4. (7 points)

$$\text{Soit } X = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer XX^T .

(b) Prouver que $\text{Det}(XX^T - X^T X) \leq 0$ pour toute valeur réelle de x .

(c) Trouver la valeur de x pour laquelle la matrice $XX^T - X^T X$ est singulière.

Question 5. (10 points)

(a) Déterminer les deux valeurs de l'entier n pour lesquelles le système :

$$\begin{cases} 2x + ny + z = 5 \\ 3x - y + nz = 1 \\ -x + 7y + z = n \end{cases}$$

n'a pas une solution unique.

(b) Pour la valeur positive de n trouvée en (a), préciser si le système est cohérent ou non, et interpréter ce résultat géométriquement.

Question 6. (16 points)

Les plans Π_1 et Π_2 ont pour équations respectives $r \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 7$ et $r \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 7$.

Ici, il est sous-entendu que r est le vecteur de coordonnées $[x, y, z]$, représentant les coordonnées d'un point quelconque de ce plan.

(a) Déterminer, au degré près, l'angle aigu entre Π_1 et Π_2 .

(b) En posant $z = t$, trouver une représentation cartésienne de la droite intersection de Π_1 et Π_2 sous la forme

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = z = t.$$

(c) La droite L , d'équation $r \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ (façon d'écrire le système

paramétrique de la droite) coupe le plan Π_1 au point P et le plan Π_2 au point Q .

Prouver que $PQ = k\sqrt{2}$, k étant un entier.

Question 8. (9 points)

Pour tout n différent de 1, les vecteurs a , b et c sont définis par

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2n \\ 2n^2 + n \\ -1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} n-1 \\ n^2-1 \\ 1-n^2 \end{bmatrix}.$$

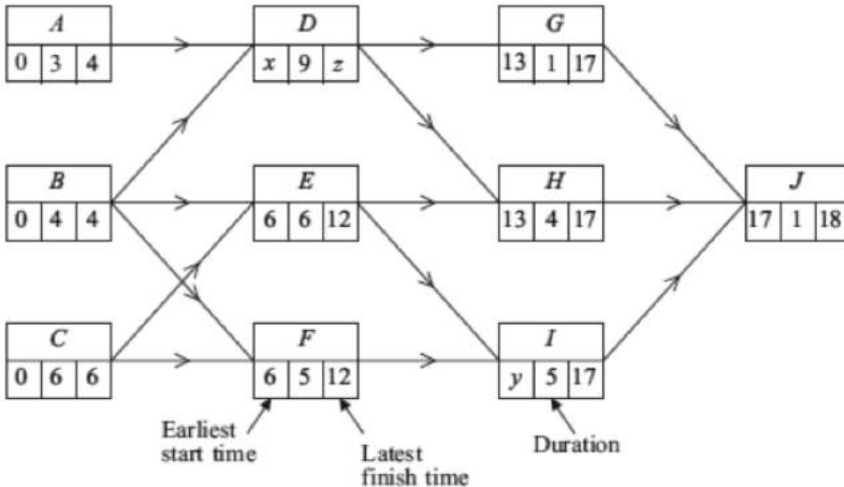
Déterminer la valeur de n pour laquelle a , b et c sont linéairement dépendants.

Deuxième extrait : mathématiques de la décision

Il provient de l'épreuve de *Decision 2*, même durée, même nombre de points.

Question 1. (14 points)

Le diagramme ci-dessous montre un graphe de tâches et la durée, en jours, de chaque tâche pour un projet particulier. Certaines des dates au plus tôt et dates au plus tard sont montrées sur le diagramme.



- Trouver les valeurs des constantes x , y et z .
- Trouver les chemins critiques.
- Trouver l'activité ayant le flot maximum et donner la valeur de ce flot.
- Le nombre d'ouvriers nécessaires pour chaque tâche est donné dans le tableau ci-dessous :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Nombre d'ouvriers nécessaires	4	2	3	4	2	4	3	3	5	6

Sachant que chaque tâche démarre aussi tôt que possible et en supposant qu'il n'y a pas de limite au nombre d'ouvriers disponibles, construire un histogramme des ressources pour le projet sur la figure 1 ci-dessous (non donnée pour des questions de place), en indiquant clairement quelles tâches sont effectuées à tout moment.

- On découvre plus tard qu'il n'y a que 9 ouvriers disponibles à tout moment.

Utiliser un nivellement de ressources pour trouver le jour de début au plus tôt de la tâche J de telle sorte que le projet puisse être réalisé avec le moins de temps supplémentaire possible. Donner la valeur de ce temps supplémentaire.

Troisième extrait : mécanique

Sujet issu de l'examen de M2, janvier 2012

Question 1. (8 points)

Un avion jette des paquets d'aide alors qu'il passe au dessus d'un village inondé. La vitesse d'un paquet quand il quitte l'avion est $60 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La masse d'un paquet est 25 kg.

Le paquet tombe verticalement de 34 m pour atteindre le sol.

- (a) Calculer l'énergie cinétique du paquet quand il quitte l'avion.
- (b) Calculer l'énergie potentielle perdue par le paquet pendant sa chute vers le sol.
- (c) On suppose que l'effet de la résistance de l'air sur le paquet pendant sa chute est négligeable.
 - (i) Trouver l'énergie cinétique du paquet quand il atteint le sol.
 - (ii) En déduire la vitesse du paquet quand il atteint le sol.