Deuxième partie : la propriété de Thalès

L'objectif de l’enchaînement de ces trois situations est de faire apparaître « naturellement » la configuration de Thalès, d'aborder la propriété en exploitant les connaissances des élèves en termes d'agrandissement-réduction pour enfin initier sa forme classique avec l'égalité des rapports.

La propriété de Thalès, situation 1 : vers la configuration

(Sur une idée de l'Irem de Marseille)

La consigne

Étape 1

« a) Tracer un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°.

b) Que peut-on dire de tous les triangles de la classe ? »

La question b) est posée lorsque les élèves ont terminé de tracer leur triangle.

Certains ont du mal à utiliser le rapporteur surtout pour l’angle de 115°, il y a quelques erreurs de lecture des graduations. Ils tracent un angle de 65° au lieu de 115°, mais ils s’en aperçoivent rapidement car leur triangle ne ressemble pas à celui de leur voisin.

Les élèves sont vite persuadés que tous les triangles ont les trois mêmes angles ; le professeur les incite à le démontrer, ils utilisent la somme des angles d’un triangle vue en cinquième. Quelques-uns utilisent les termes d'échelle ou de proportionnalité sans préciser entre quelles grandeurs. Ils remarquent qu’il y a des grands triangles et des petits, mais ils ne savent pas le traduire avec des propriétés mathématiques.

La consigne (suite)

Étape 2

« Tracer sur la feuille blanche que je vous distribue un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°, le plus grand possible entrant dans la feuille».

La solution experte consiste à calculer la mesure du troisième angle (18°) puis à placer le plus grand côté du triangle qui est celui opposé au plus grand angle. Le segment le plus grand que l’on peut tracer dans la feuille est la diagonale. Ce sera le grand côté du triangle. Ensuite, on trace les deux angles de 47° et 18°.

Les élèves entrent volontiers dans ce défi qu’ils pensent facile. Ils ont du mal à faire rentrer leur triangle dans la feuille car ils commencent par l’angle de 47° et celui de 115° et le triangle sort de la feuille ! Certains gomment et recommencent, d’autres ont des stratégies pour ne pas tout effacer. Ils rapprochent leur côté en traçant des parallèles successives, jusqu’à ce que la figure rentre dans la feuille.

Le professeur leur demande de découper les triangles qu’ils ont tracés, de mettre leur nom dessus et il ramasse les triangles. Si un élève les ramasse, il a tendance à les "caler" sur l'angle obtus... Certains reconnaissent alors des parallèles et s'interrogent déjà ! Certains élèves abandonnent la compétition, persuadés que leur triangle est trop petit.

La consigne (suite)

L'étape 3 se déroule à l’oral : le professeur dit aux élèves qu’il veut comparer les triangles qu’il a ramassés pour déterminer qui est le gagnant. Il veut le faire en économisant le plus possible la manipulation de son rapporteur pour gagner du temps.

Il leur demande donc de lui indiquer comment faire.

Les élèves proposent de vérifier soigneusement un des triangles avec le rapporteur puis de l’utiliser comme modèle. Ils suggèrent ensuite de superposer les autres triangles avec celui-ci en commençant par l’un des angles.

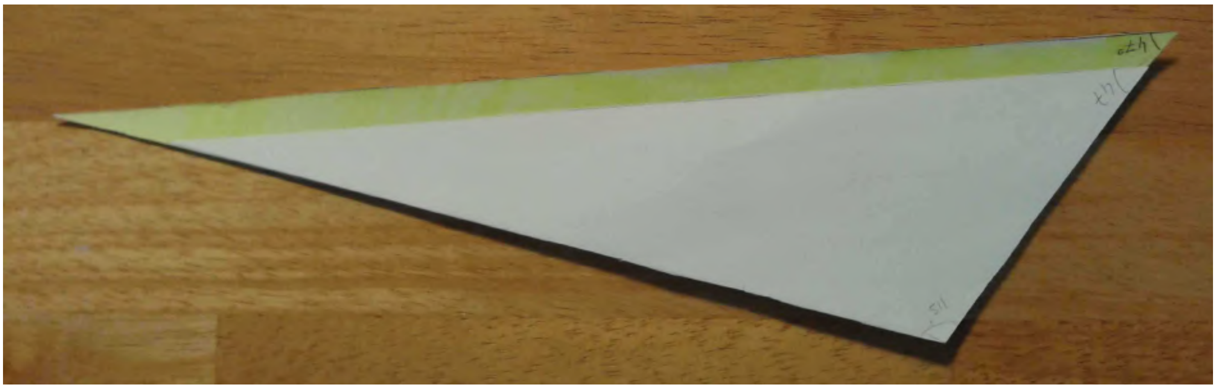
Le professeur le fait devant la classe avec un triangle T1 ayant un de ses angles faux. Les élèves disent que ce n’est pas correct car les côtés devraient se superposer, si l’angle par lequel on a superposé est bon. Ce n’est pas le cas, donc ces deux angles ne sont pas les mêmes. Si les deux angles obtus ne coïncident pas, il est inutile de continuer avec ce triangle T1. Un de ses angles est

Le professeur vérifie un autre triangle T2. Si le premier angle essayé convient, les élèves proposent de superposer à nouveau les deux triangles en changeant d'angle pour vérifier les deux autres angles.

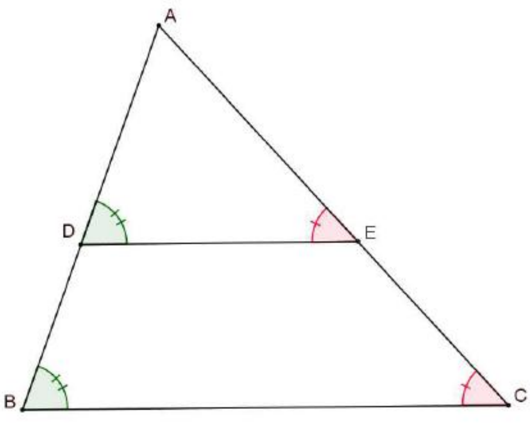
Le professeur le fait mais insiste en demandant s'il n'y a pas une méthode plus rapide car il doit vérifier de nombreux triangles...

Le professeur prend un autre triangle T3 qui a le bon angle au sommet sur lequel il superpose le triangle modèle mais un des autres angles faux. Des élèves disent alors que les troisièmes côtés des triangles devraient être parallèles, sinon les deux angles restants ne sont pas bons.

Les élèves proposent enfin de vérifier si les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.



Le professeur peut alors faire un schéma au tableau représentant deux triangles superposés et incite les élèves à justifier leur conjecture concernant le parallélisme.



Les élèves le font en utilisant la propriété des angles correspondants.

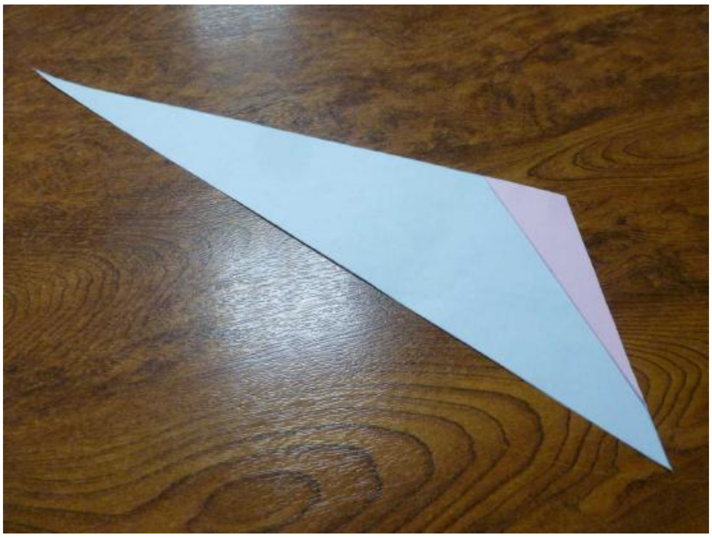
Ils savent depuis la cinquième que si les côtés sont parallèles alors les angles sont égaux et ils en concluent que si les côtés ne sont pas parallèles alors les angles ne sont pas égaux.

Le professeur rappelle qu'il y a équivalence entre l'égalité des angles correspondants et le parallélisme.

On peut alors déterminer le gagnant du défi !

Après la vérification par le professeur, ils veulent aussi vérifier si leur triangle n’a pas été éliminé injustement : les triangles leur sont rendus et ils superposent eux-mêmes leur triangle avec ceux des voisins.

Certains qui les ont superposés dans le mauvais sens n’ont pas leurs côtés parallèles.



Les autres leur disent qu’il faut retourner leur triangle car les angles à comparer doivent se trouver le long du même côté. Un retour à la démonstration précédente achève de les convaincre.

Avant de rendre leur triangle, quelques-uns ont déjà superposé leur triangle avec celui de leur voisin. Et s’ils pensent alors que leur triangle n’est pas bon, ils renoncent à participer au défi car ils n’ont pas le temps de le refaire. Ceux-là sont d'autant plus motivés pour voir avec le voisin si leurs angles coïncident ou non et surtout celui qui des deux a le plus grand triangle.

Le bilan de cette situation est donc : quand on superpose deux triangles ABC et ADE qui ont les mêmes angles, les sommets A, B, D d’une part et A, C, E d’autre part, sont alignés et les côtés (BC) et (DE) sont parallèles. Et réciproquement, si les points A, B, D et A, C, E sont alignés et les côtés (BC) et (DE) parallèles, les deux triangles ont les mêmes angles.

La propriété de Thalès, situation 2 : Thalès comme agrandissement-réduction de triangles

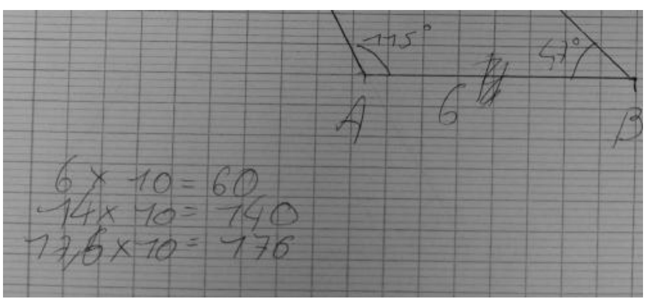
La consigne

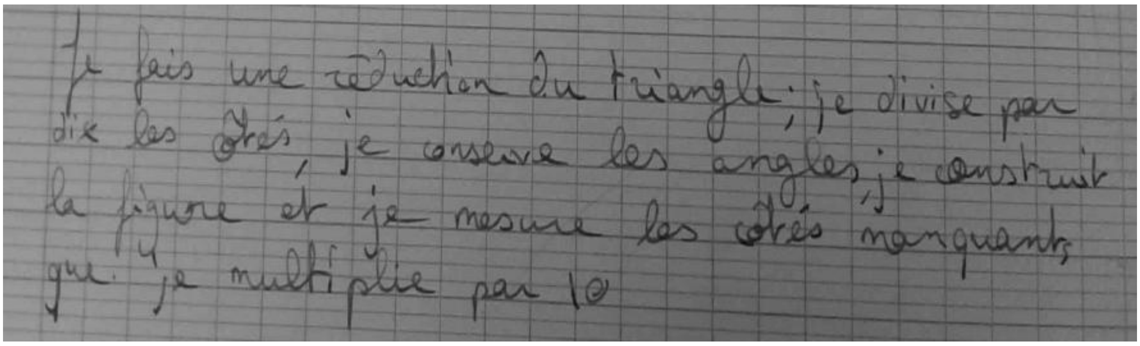
Étape 1

Le professeur trace au tableau d'un triangle ABC ayant un côté [AB] de 60 cm et deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ de 115° et 47°. Il demande aux élèves de trouver les longueurs des deux autres côtés du triangle qui est au tableau.

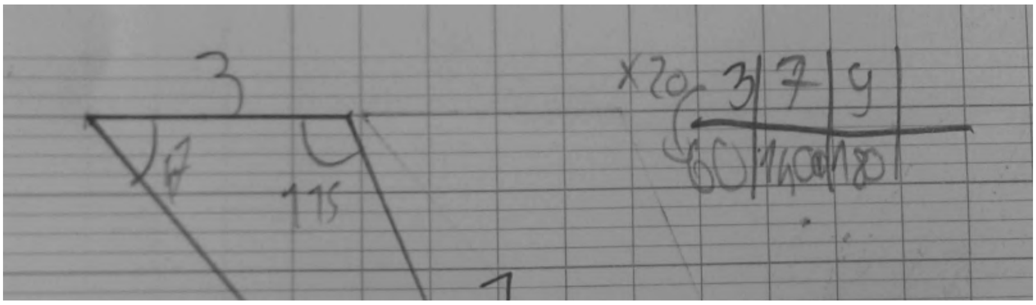
Les élèves sont d’abord décontenancés et pensent que ce n’est pas possible. Assez vite cependant, certains disent que « le triangle du tableau est proportionnel » à ceux de leur cahier ou « à l'échelle ».

Certains proposent de dessiner un triangle avec un côté de 6 cm ou de 10 cm pour multiplier les autres côtés qu’ils mesurent par 10 ou par 6.

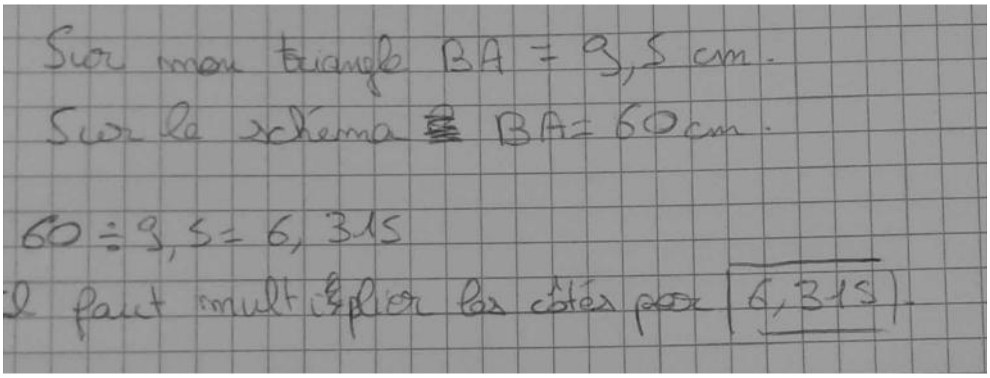



Je fais une réduction du triangle ; je divise par dix les côtés, je conserve les angles, je construit la figure et je mesure les côtés manquants que je multiplie par 10

D’autres, qui ont des triangles avec des mesures pratiques, proposent de les utiliser. Par exemple, un côté de 3 cm permettra de multiplier par 20.



Quelques-uns utilisent le triangle déjà tracé malgré un coefficient peu pratique.


Sur mon triangle BA = 9,5 cm.
Sur le schéma BA = 60 cm.

60 ÷ 9,5 = 6,315
Il faut multiplier les côtés par 6,315.

Les élèves vérifient ensuite si les mesures qu'ils ont trouvées sont assez proches des longueurs des côtés du triangle du tableau.

Dans certaines classes, ils ne sont pas étonnés des erreurs de mesure. Dans d'autres classes, des interrogations sur les différences obtenues suscitent un vrai débat entre erreur de construction, imprécision des mesures et du matériel.

La consigne (suite)

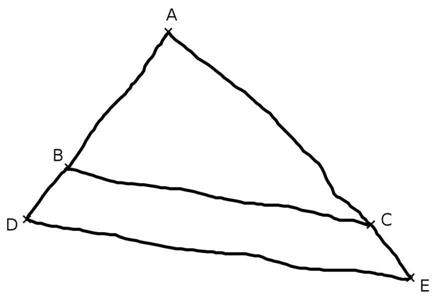
Étape 2 :

« On a deux triangles ABC et ADE tels que :

les points A, B, D et A, C, E sont alignés et (BC) et (DE) sont parallèles.

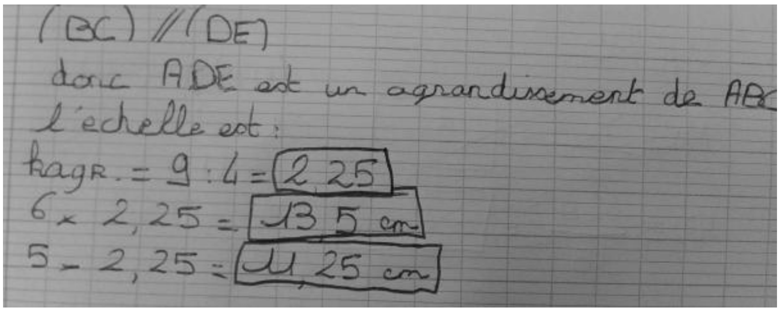
AD = 9 cm, AB = 4 cm, AC = 6 cm et BC = 5 cm.

Calculer les longueurs des côtés [AE] et [DE]. »



Les élèves continuent d'utiliser la conjecture émise à l'étape précédente puisque ces triangles ont les mêmes angles.

Certains utilisent le tableau de proportionnalité et le produit en croix pour trouver les deux longueurs demandées. D'autres calculent le coefficient d'agrandissement qui est ici décimal (2,25).



À ce stade,le professeur aide la classe à écrire la conjecture suivante : des triangles qui ont les mêmes angles ont les longueurs de leurs côtés qui sont proportionnelles.

L'objectif est maintenant de faire justifier dans un cas particulier la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles. La propriété dite « des milieux » permet de le faire.

<u>La consigne (suite)</u>

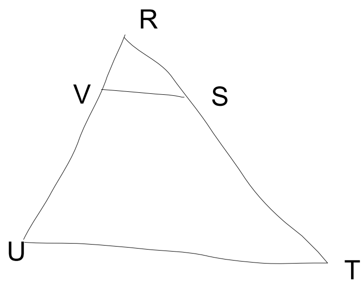
<u>Étape 3</u>

« On a deux triangles RSV et RTU tels que les points

R, V, U et R, S, T sont alignés et (SV) et (TU) sont parallèles.

RU = 16 cm, RT = 10 cm et TU = 12 cm et RV = $\frac{1}{4}$ RU.

Calculer les longueurs des côtés [SV] et [RS]. »



En fonction du niveau de la classe, d'autres cas particuliers peuvent être justifiés en remplaçant par exemple $\frac{1}{4}$ par $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ ...

La propriété de Thalès (ou plutôt la propriété de « *proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine* » pour rester conforme aux programmes) peut alors être admise sous la forme :

deux triangles ABC et ADE pour lesquels les points A, B, D et A, C, E sont alignés et les côtés (BC) et (DE) parallèles, ont les longueurs de leurs côtés qui sont proportionnelles.

Ce qui sera favorablement illustré par le tableau de proportionnalité :

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle ADE	AD	AE	DE

La propriété de Thalès, situation 3 : vers l'égalité des rapports

Il est possible de s'arrêter à la situation précédente en classe de quatrième mais nous pensons qu'il faut déjà initier la forme classique du « futur » théorème de Thalès de la classe de troisième avec l'égalité des rapports, forme qui est loin d'être évidente pour les élèves et parfois dépourvue de sens pour eux.

Cette situation 3 a pour objectif d'inciter les élèves à écrire les rapports de mesure lors d'une progression de plus en plus abstraite. L'étape 1 utilise un coefficient de réduction décimal et un coefficient d'agrandissement rationnel non décimal. Dans l'étape 2, l'écriture et la comparaison de quotients est nécessaire, certains de ces quotients étant rationnels non décimaux. Dans l'étape 3, les élèves sont incités à écrire des rapports avec des lettres et à traduire la proportionnalité par l'égalité de ces rapports.

<u>La consigne</u>

<u>Étape 1</u>

« Tracer un triangle ABC avec : AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 9 cm.

Sur le segment [AB], placer le point M tel que AM = 6 cm.

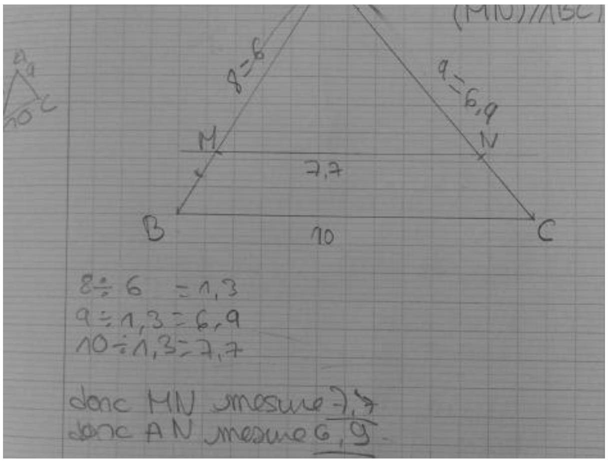
Tracer la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe [AC] en N.

Calculer les longueurs MN et AN. »

Faire tracer une figure en vraie grandeur peut permettre aux élèves de mesurer les longueurs. Ceux qui ne font que des mesures ne trouvent pas tous les mêmes résultats à cause de l'imprécision des tracés : pour une longueur égale à 6,75 cm, il y a un doute. Ceux qui font des calculs peuvent comparer leurs résultats avec les mesures.

A ce stade, forts de leur expérience de la propriété de Thalès, quasiment tous les élèves ont l'idée de la réduction, du coefficient qui est ici décimal (0,75) ou de l'agrandissement.

Certains font d'ailleurs des calculs en arrondissant le quotient $\frac{4}{3}$ et sont confortés par les résultats de leurs mesures. Des discussions s'engagent avec ceux qui ont choisi le coefficient de réduction (décimal).



Pour certains élèves, le coefficient d'agrandissement rationnel non décimal pose problème et ils préfèrent revenir au coefficient de réduction qui est décimal.