Exercices de-ci, de-là (BV 516)

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive,
Bordeneuve, chemin de Tardibail,
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 516–1 Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng *ils sont fous ces anglo-saxons !*

Pour les nombres rationnels positifs l'écriture $a\frac{b}{c}$ du nombre $a+\frac{b}{c}$,dans laquelle a, b et c sont des entiers naturels avec $b < c$ permet la curieuse égalité suivante :

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

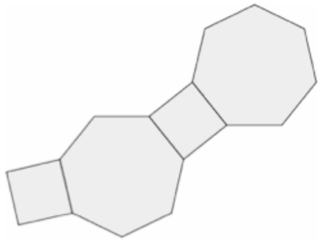
Donner une méthode de génération d'autres exemples pour lesquels $\sqrt{a\frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$.

Exercice 516–2 *pour nos élèves*

A – *transmis par Vincent Thill*
Peut-on trouver cinq entiers naturels consécutifs qui vérifient l'égalité

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 \ ?$$

B –
On assemble alternativement des carrés et des heptagones réguliers comme le montre la figure ci-contre.
Si on poursuit cet assemblage en tournant toujours de la même façon, la boucle se fermera-t-elle exactement ?
(si oui, combien y aura-t-il de carrés ? d’heptagones ?)

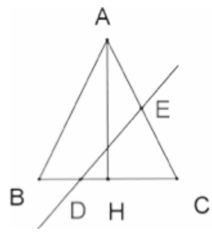


Exercice 516–3 Jean-Christophe Laugier – Rochefort

1) Quel est le nombre maximal de chiffres égaux, distincts de zéro, pouvant terminer l'écriture décimale du carré d'un entier ?
2) Montrer que l'écriture décimale d'un cube peut se terminer par un nombre arbitraire de chiffres égaux, distincts de zéro.

Exercice 516–4 Izán Péraz – ?

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que AH = BC où H désigne le pied de la hauteur issue de A.
Une droite traverse le triangle en coupant la base [BC] en D et l’un des deux autres côtés en E.
Quelle est la probabilité que DE soit supérieure ou égale à BC ?



Solutions

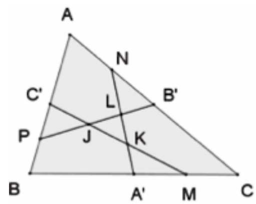
Exercice 514–1 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d’Oisans

On considère un triangle ABC ; on désigne par A′, B′ et C′ les milieux respectifs des côtés [BC], [C1] et [AB].
Soient M le milieu de [A′C], N le milieu de [B′A] et P le milieu de [C′B].
Soient J le point d'intersection de [B′P] et [C′M], K le point d'intersection de [A′N] et [B′P] et L le point d'intersection de [A′N] et [B′P].
Calculer l'aire s du triangle JKL en fonction de l'aire S du triangle ABC .

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d’Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d’Oisans), Raymond Heitz (Névez), Annie Perrot (Paris), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Daniel Vacaru (Pitesti), Michel Sarrouy (Mende) .

■ Voici la solution de Pierre Renfer.

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).



Les coordonnées des points B′ et P sont : $B'\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}\quad P\begin{vmatrix}1\\3\\0\end{vmatrix}$.

On en déduit l'équation de la droite (B′P) :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3x + y + 3z = 0.$$

On obtient l'équation de la droite (C'M) par permutation circulaire : $3x - 3y + z = 0$.

On trouve les coordonnées de J, qui vérifient les deux équations : $J\begin{vmatrix}5\\6\\3\end{vmatrix}$.

Par permutation circulaire, on obtient les coordonnées de K e L :

$K\begin{vmatrix}3\\5\\6\end{vmatrix}\quad L\begin{vmatrix}6\\3\\5\end{vmatrix}$.

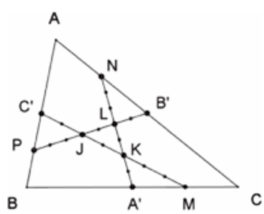
Le rapport d'aires $\frac{s}{S}$ est le déterminant dont les colonnes sont les coordonnées, de somme 1, des trois point J, K, L.

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{14^3}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il est inutile de saisir la calculatrice. Le déterminant se factorise :

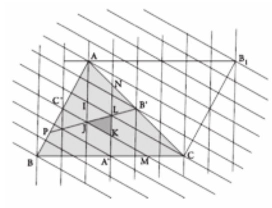
$$\begin{vmatrix} u & w & v \\ v & u & w \\ w & v & u \end{vmatrix} = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-vw-wu).$$

Donc : $\frac{s}{S} = \frac{5^2+6^2+3^2-5\cdot6-6\cdot3-3\cdot5}{14^3} = \frac{7}{14^3} = \frac{1}{28}$.



Remarque.

Les coordonnées barycentriques utilisées par Pierre Renfer amènent à conclure que chacun des segments [A′M], [B′N] et [C′P] est partagé en 7 parts égales (voir ci-contre). Si l'on admet cela, au collège on peut alors obtenir le résultat par comparaison d'aires en justifiant que l'aire de PJC′ vaut une fois et demie celle de JKL, que celle de AC′J la vaut trois fois, ainsi que celle de AJK, etc.



Michel Sarrouy propose une solution basée sur un réseau de parallèles, dont la justifiction relève également des barycentres.
Sa proposition est disponible sur le site de l'association.

Nota.
Ayant retrouvé après envoi un exercice similaire – nº 474-3 (solution dans le BV 476) – Marie-Nicole Gras m'avait proposé de ne pas retenir celui-ci (on retrouve effectivement la demande du 474-3 après avoir tracé le triangle A'B'C' des milieux : montrer que JKL occupe un septième de A′B′C′). J'ai tout de même souhaité vous le proposer.

Exercice 514–2 *pour nos élèves*

A – d'après le concours mathématique du Québec de 1987
Effectuer le produit suivant :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2015^2}\right).$$

B – tiré du concours canadien de mathématiques de 2011
Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
Le tableau ci-dessous est un carré magique tel que les nombres a, b, c, x, y et z sont strictement positifs.

$\log a$	$\log b$	$\log x$
p	$\log y$	$\log c$
$\log z$	q	r

Exprimer le produit xyz en fonction de a, b et c.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Annie Perrot (Paris), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Daniel Vacaru (Pitesti), Françoise Magnan (Toulouse), Michel Sarrouy (Mende).

■ Voici les solutions d'Annie Perrot.

A – Pour tout entier naturel non nul k, Il en résulte que le produit cherché est égal à :

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{2015}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{2015}\times\frac{2016}{2}=\frac{1008}{2015}.$$

B – Posons $p = \log p'$, $q = \log q'$, $r = \log r'$.

Le carré magique devient :

$\log a$	$\log b$	$\log x$
$\log p'$	$\log y$	$\log c$
$\log z$	$\log q'$	$\log r'$

d'où, d'après la propriété fondamentale des logarithmes, les équations :

$$xyz=abx=r'cx=p'cy=q'by=r'ay=p'az=q'r'z.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}ab=cr'=yz,\\ p'c=q'b=r'a=xz,\\ p'a=q'r'=xy.\end{aligned}$$

D'où

$$r'=\frac{ab}{c};\,p'=\frac{r'a}{c}=\frac{a^2b}{c^2}.$$

Et donc

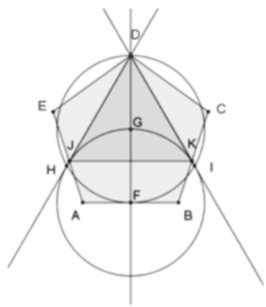
$$(xyz)^2=xy\times yz\times zx=p'a\times ab\times r'a=\frac{a^3b}{c^2}\times ab\times\frac{a^2b}{c}=\frac{a^6b^3}{c^3}.$$

Et puisque et sont positifs,

$$xyz=\sqrt{\frac{a^6b^3}{c^3}}=a^3b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{3}{2}}.$$

Nota. L'énoncé B comportait la demande d'exprimer le produit xyz en fonction de abc et non en fonction de a, b et c.

Veuillez nous excuser pour cette coquille restée inaperçue.



Exercice 514–3 *tiré du « Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques »*

La construction décrite ci-après propose l'inscription d'un triangle équilatéral dans un pentagone régulier.
ABCDE est un pentagone régulier, F est le milieu de [AB].
G est le centre du cercle de diamètre [FD].
Le cercle de centre F passant par G recoupe ce premier cercle en H et I.
les droites (DH) et (DI) recoupent le pentagone en J et K.
Le triangle DJK répond à la demande.

Cette construction est-elle exacte ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raphael Sinteff (Nancy), Raymond Heitz (Névez), Annie Perrot (Paris), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Daniel Vacaru (Pitesti), Michel Sarrouy (Mende).

■ Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

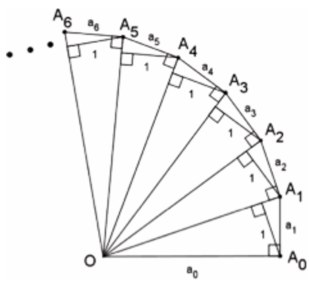
Les deux cercles ont le même rayon .
On a donc GF = GH = GI = FG = FH = PI ; et les triangles GFH et GPI sont équilatéraux. Il en résulte, pour le cercle de diamètre [FD], que l'angle au centre $\widehat{HGI}$ est égal à 120° ; et donc que l'angle inscrit $\widehat{HDI}$ est égal à 60°.

Or la figure est symétrique par rapport à (DF), et donc DJ = DK.
Ainsi le triangle est bien équilatéral et la construction est exacte.

Remarque. Annie Perrot précise que la construction serait la même pour inscrire un triangle équilatéral dans tout polygone régulier admettant un nombre impair de côtés.

Nota. On trouvera cet exercice du mathématicien persan Abu l-Wāfā', pages 193 à 195 du chapitre 7 écrit par Marc Moyon dans « Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes » paru chez Ellipse et dont la recension a été faite dans le BV 513.

Exercice 514–4 *Crux Mathematicorum Mathematical Mayhem 114*



Dans le simili escargot de Pythagore ci-contre, les hauteurs relatives aux hypoténuses mesurent une unité.
Les a_i désignent les mesures des segments.
Montrer que $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Jean-Yves Hély (Rennes).

■ Voici la solution de Pierre Renfer.

On suppose le simili escargot de Pythagore construit.

1. Montrons, par récurrence, que $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

L'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons que, pour un entier quelconque, $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ et montrons que $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

D'après le théorème de Pythagore

$$\mathrm{OA}_{n+1}^2 = \mathrm{OA}_n^2 + \mathrm{A_n A_{n+1}^2} = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) + a_{n+1}^2.$$

et, par suite, $\mathrm{OA}_{n+1}^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2$.

2. Montrons, par récurrence, que $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2$.

L'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons que, pour un entier n quelconque, $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2$ (et, par suite, $\mathrm{OA}_n = a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n$) et montrons que $\mathrm{OA}_{n+1}^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_{n+1}^2$.

D'une part, l'aire du triangle rectangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}_n \times \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n\right) \times a_{n+1} = \frac{1}{2} a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_{n+1}. \qquad (1)$$

D'autre part, l'aire du triangle rectangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}_{n+1} \times 1 = \frac{1}{2}\mathrm{OA}_{n+1}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2), il résulte $\mathrm{OA}_{n+1} = a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n\, a_{n+1}$ et donc que

$$\mathrm{OA}_{n+1}^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_{n+1}^2.$$

3. Finalement, pour tout entier naturel n,

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2.$$

Remarque. L'initialisation au rang 0 répond parfaitement à la demande. Toutefois pour une adaptation en classe de cet exercice, il sera certainement préférable de faire étudier le cas du triangle $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$. Démontrer qu'au rang 1 on a bien $\mathrm{OA}_1^2 = a_0^2\, a_1^2$ met en place le principe de l'hérédité de la seconde récurrence.