# L'algorithme de la jeep

Philippe Langlois(*)

**Introduction**

C'est pendant la seconde guerre mondiale et juste après elle que, pressés ou inspirés par les militaires, les mathématiciens se sont mis à étudier systématiquement les problèmes de logistique dont l'ancêtre est « le chameau d'Alcuin », qui a fait l'objet d'un article(1) dans le Bulletin nº 511.
Pour que les jeeps et les chars puissent traverser le désert sans tomber en panne sèche, comment placer les relais de ravitaillement et quelles quantités de carburant prévoir ?
Ce « problème de la jeep », qui constitue un excellent exemple d'algorithme à la fois non trivial et non lié au calcul sur ordinateur, a été résolu(2) par l'Américain Nathan Fine en 1946.

## 1. Mise en place des données

**Le problème**

On donne un point A muni d'une réserve d'essence, une piste qui, partant de A, traverse un désert et une jeep qui ne peut emporter qu'une quantité donnée de carburant, mais peut en déposer à des points relais choisis pour en récupérer lors d'un trajet ultérieur. Deux questions :
1) Avec la réserve de carburant dont on dispose en A, jusqu'où peut-on aller sur la piste ?
2) Pour atteindre un point situé à une distance donnée, combien de carburant faut-il avoir en A ?
*La suite de l'article est consacrée à la première question*, plus facile à traiter directement. Mais si on sait la résoudre pour une réserve de carburant $r$ quelconque placée en A, c'est-à-dire déterminer la plus grande distance accessible $d$ sous forme $d = f(r)$, la fonction $f$ étant croissante, la solution de la seconde question, carburant $r$ nécessaire pour aller jusqu'à la distance $d$, est manifestement donnée par $r = f^{-1}(\mathrm{d})$.

**Conventions**

La piste sur laquelle se fait le trajet est représentée par une demi-droite issue du point de départ A. On suppose pouvoir créer sur le parcours des points relais où déposer du carburant ; au départ ces relais sont vides.
Il est commode de faire les conventions suivantes :
♦ on choisit pour unité de carburant (UK) la quantité maximum de carburant que le véhicule peut transporter (réservoir + bidons) ;

---

(*) philippe.r.langlois@gmail.com
(1) « Les trois voyages du chameau », de Philippe Langlois.
(2) « The Jeep Problem », *American Mathematical Monthly* n° 54, pages 24-31, 1947.

♦ on choisit pour unité de distance (UL) la longueur du parcours que le véhicule peut faire avec 1UK de carburant (on admet que la consommation par unité de distance est une constante, indépendante en particulier de la charge du véhicule) ; ainsi un trajet de $q$UL consommera $q$UK.
*Dans l'étude qui suit on sous-entendra souvent les notations* UK *et* UL *: un même nombre sans indication d'unité mesurera le chemin parcouru et la consommation correspondante.*

## 2. Traversée avec 2UK

### Énoncé

*On dispose de* 2UK *situées en un lieu* A. *On veut, partant de* A, *aller aussi loin que possible (sans retour) sur une piste donnée. Comment faire ? Quelle distance peut-on atteindre ?*

### Solution

On fait deux voyages.
♦ Le premier est un aller-retour permettant de déposer du carburant en un point C situé sur la piste à une distance de A égale à $x$. Au cours du premier voyage on consomme $x$ à l'aller et autant au retour. Il faut donc prendre $x \leq \frac{1}{2}$. On dépose alors $(1 - 2x)$ en C.
♦ Au cours du second voyage, on arrive en C avec $(1 - x)$ et on y trouve $(1 - 2x)$. On dispose donc en tout d'une quantité de carburant de $(2 - 3x)$.

a) Ou bien $2 - 3x \geq 1$, soit $x \leq \frac{1}{3}$, et on repart avec une quantité de carburant égale à 1.

b) Ou bien $2 - 3x \leq 1$, soit $x \geq \frac{1}{3}$, et on repart avec une quantité de carburant égale à $(2 - 3x)$.

♦ Si $x \leq \frac{1}{3}$, on fait à partir C de un trajet de longueur 1 pour arriver à la distance $(1 + x)$ de A.

♦ Si $x \geq \frac{1}{3}$, on fait à partir de C un trajet de longueur $(2 - 3x)$ pour arriver à la distance $(2 - 2x)$.

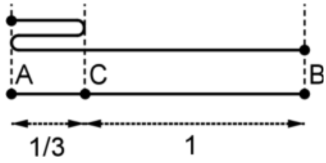
On a donc à chercher le maximum d'une fonction $x \to d(x)$ affine par morceaux. Le tableau de variation montre l'existence d'un maximum pour $x = \frac{1}{3}$.

| $x$ | 0 | | 1/3 | | 1/2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d(x)$ | $1 + x$ | | | $2 - 2x$ | |
| $d(x)$ | 1 | ↗ | 4/3 | ↘ | 1 |

*On voit donc qu’en créant un relais à la distance* $\frac{1}{3}$UL *on peut atteindre la distance* $\frac{4}{3}$UL.

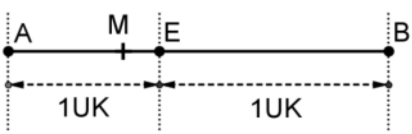
**Commentaire**

On vient de trouver un algorithme, qu’on appellera $V_2$, représenté par le schéma ci-contre. Partant de A, on fait un aller-retour suivi d’un aller simple jusqu’en C où l’on apporte 1UK (en deux fois : 1/3 puis 2/3), qui permet ensuite d’aller de C en B. On a donc ramené, en utilisant un point relais bien choisi, le cas $n = 2$ au cas $n = 1$, $n$ désignant le nombre d’unités de carburant disponibles en A.




**L’algorithme $V_2$ est optimal**

Considérons un trajet où, parti de A, on arrive en un point B après avoir épuisé 2UK de carburant. On appelle le point E tel que sur [AE] et donc aussi sur [EB] on ait consommé exactement 1UK. Soit M un point de [AE[. D’après la définition même de E, sur]MB] la jeep consomme plus de 1UK. *Puisqu’elle ne peut emporter plus de* 1UK *à la fois, elle passe au moins deux fois en* M *dans le sens aller*, ce qui implique qu’elle y passe au moins une fois dans le sens retour, donc au moins trois fois en tout. Sa consommation sur [AE[ est donc au moins 3AE, donc AE ≤ $\frac{1}{3}$ ; sur [EB] la consommation est 1, donc EB ≤ 1.

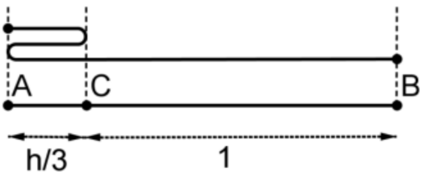



Au total AB ≤ 1 + $\frac{1}{3}$.L’algorithme est donc bien optimal.

Il est même strictement optimal, car pour avoir AB = 1 + $\frac{1}{3}$ il nous faut AE = $\frac{1}{3}$ et EB = 1.

**Traversée avec $(1 + h)$UK, où $0 < h < 1$**

On reprend la même méthode : partant de A, faire un aller-retour suivi d’un aller simple jusqu’en un point C où l’on apportera 1 UK, permettant ensuite d’aller de C en B. Sur les trois trajets entre A et C, on peut consommer en tout $h$ UK, donc $\frac{h}{3}$ sur chacun.




Il faut donc prendre AC = $\frac{h}{3}$. Décomposons le trajet : au premier aller on part de A

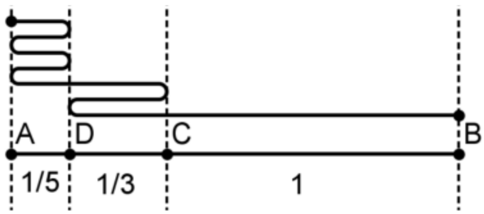
avec 1, on dépose $1 - \frac{2h}{3}$ en C, on rentre à vide en A, dont on repart avec $h$ UK ; on arrive en C avec $\frac{2h}{3}$ ; on y trouve $1 - \frac{2h}{3}$, ce qui permet de repartir avec 1UK et d'aller jusqu'à la distance AB = $1 + \frac{h}{3}$.
Observons que la formule reste valable pour $h = 0$ et $h = 1$ : l'algorithme ainsi étendu réalise donc une interpolation linéaire entre les cas $n = 1$ et $n = 2$.

## 3. Traversée avec 3UK

### Énoncé

*On dispose de* 3UK *situées en un lieu* A. *On veut en partant de* A *aller aussi loin que possible (sans retour) sur une piste donnée. Comment faire ? Quelle distance peut-on atteindre ?*

### Algorithme pour $n = 3$




On exploite la même idée qu'au § 2 : faire d'abord des allers-retours (suivis forcément d'un aller simple) pour arriver avec 2UK en un point D et *appliquer ensuite l'algorithme trouvé pour* $n = 2$.
Posons AD = $x$ et soit $p$ le nombre d'allers-retours. On veut donc dépenser 1UK en $(2p + 1)$ trajets de longueur $x$, ce qui se traduit par $x = \frac{1}{2p+1}$. Chaque aller-retour coûte $2x$UK et permet donc d'en déposer $1 - 2x$ ; l'aller simple final permet, lui, de déposer $1 - x$.
Le dépôt total en D est $p(1 - 2x) + (1 - x) = p + 1 - (2p + 1)x$, soit $p$UK. Il nous faut donc $p = 2$ dont on tire $x = \frac{1}{5}$. Le trajet de la jeep est représenté ci-dessus.

### L'algorithme $V_3$ est optimal

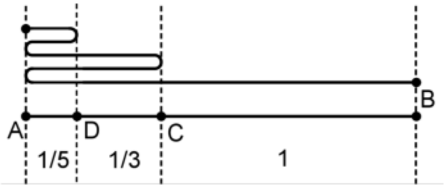
Considérons un trajet où, parti de A, on arrive en un point B après avoir épuisé 3UK de carburant. On appelle le point E tel que sur [AE] on ait consommé exactement 1UK, F le point tel que sur [EF] on ait consommé exactement 1UK ; sur [FB] la consommation a donc été aussi de 1UK.


*On raisonne comme on a fait pour* $V_2$.
Soit M un point de [AE[. D'après la définition même de E, sur ]MB] la jeep consomme plus de 2UK. *Puisqu'elle ne peut emporter plus de* 1UK *à la fois, elle passe au moins trois fois en* M *dans le sens aller*, ce qui implique qu'elle y passe au

moins deux fois dans le sens retour, donc au moins cinq fois en tout. Sa consommation sur [AE[ est donc au moins 5AE, donc AE ≤ $\frac{1}{5}$. Soit maintenant un point N de [EF[ ; *puisqu'elle ne peut emporter plus de* 1HK *à la fois, la jeep passe au moins deux fois en* N *dans le sens aller*, donc au moins une fois dans le sens retour, donc au moins trois fois en tout. La consommation sur [EF[ est donc au moins 3EF, donc EF ≤ $\frac{1}{3}$. Sur ]FB] la consommation est de 1, donc FB ≤ 1. Au total AB ≤ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. L'algorithme $V_3$ est donc bien optimal.

**L'algorithme $V_3$ n'est pas strictement optimal**

Nous avons établi que AE ≤ $\frac{1}{5}$, EF ≤ $\frac{1}{3}$, FB ≤ 1. Pour maximiser la distance AB, il nous faut donc AE = $\frac{1}{5}$, EF = $\frac{1}{3}$, FB ≤ 1, la jeep parcourant alors cinq fois [AE] (trois fois sens aller, deux fois sens retour), trois fois [EF] (deux fois sens aller, une fois sens retour), et une fois [FB] (aller simple).




Mais $V_3$ n'est pas le seul parcours respectant ces conditions. Il en existe un autre : le parcours $W_3$ présenté ci-contre(3), qui ne s'écarte de $V_3$ que par l'ordre dans lequel sont effectués les morceaux du trajet. On notera qu'il est en un sens plus agréable que $V_3$, car il ne comporte que deux retours en arrière au lieu de trois.

N.B. : On trouvera en annexes 1 et 2 le détail des consommations lors des parcours $V_3$ et $W_3$.

**Traversée avec (2 + *h*)UK, où 0 < *h* < 1**

La même méthode que celle utilisée pour (1 + *h*)UK amène à prendre un point D tel que AD = $\frac{h}{5}$. On fait deux allers-retours entre A et D (à chacun on emporte 1, on dépose $1 - \frac{2h}{5}$, on revient à vide) suivis d'un aller simple (on emporte *h*, on consomme $\frac{h}{5}$, on arrive avec $\frac{4h}{5}$) ; on peut donc repartir de D avec 2UK et appliquer l'algorithme décrit pour $n = 2$.

Cela permet d'obtenir un trajet AB = $1 + \frac{1}{3} + \frac{h}{5}$. Là encore l'algorithme réalise une

(3) Le lecteur pourra, en se reportant au § 3.3 de l'article cité dans l'introduction, constater que le problème de la jeep pour $n = 3$ et le problème du « chameau vorace » n'en font qu'un : seuls les habillages sont différents.

interpolation linéaire, entre les cas $n = 2$ et $n = 3$ cette fois.

## 4. Algorithme pour *n* entier quelconque

### Construction par récurrence

En supposant connu un algorithme $V_{n-1}$ valable pour un départ avec une réserve de $(n - 1)$UK, essayons d'en déduire un algorithme pour la valeur $n$. On calque la méthode sur celle utilisée pour passer de $n = 2$ à $n = 3$.
*On part d'un point* $A_n$ *; on veut trouver un point* $A_{n-1}$, *situé à une distance x de* $A_n$, *où déposer* $(n - 1)$UK au prix d'une dépense de 1 UK. On repartira alors de $A_{n-1}$ en appliquant $V_{n-1}$.
Faisons comme précédemment $p$ allers-retours suivis d'un aller simple pendant chacun desquels on consomme $x$UK, ce qui donne là encore $x = \dfrac{1}{2p+1}$. Le dépôt total en $A_{n-1}$ est de nouveau $p(1 - 2x) + (1 - x) = p + 1 - (2p + 1)x$, soit $p$, ce qui fait qu'il nous faut prendre $p = n - 1$ et donc $x = \dfrac{1}{2n-1}$.

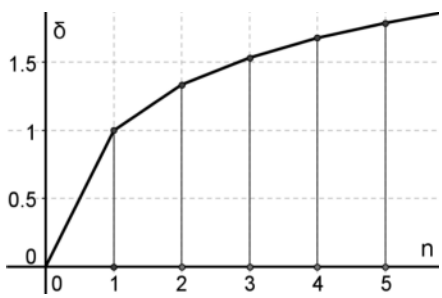
### Description de l'algorithme

On peut alors en déduire immédiatement l'algorithme $V_n$ suivant, valable pour tout $n$ :
*Une réserve de* $n$UK *en* $A_n$ *permet d'atteindre une distance*

$$\boxed{A_nA_0 = \delta(n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}}$$

*en utilisant des relais* $A_j$ *se succédant dans l'ordre des j décroissants et tels que pour tout j vérifiant* $1 \le j \le n$, $A_jA_{j-1} = \dfrac{1}{2j-1}$. *Le trajet consiste en des va-et-vient entre* $A_n$ *et* $A_{n-1}$, *puis des va-et-vient entre* $A_{n-1}$ *et* $A_{n-2}$, … *puis des va-et-vient entre* $A_2$ *et* $A_1$, *enfin un aller simple de* $A_1$ *à* $A_0$. *Le nombre de trajets entre* $A_j$ *et* $A_{j-1}$ *est de j dans le sens aller et j - 1 dans le sens retour. Entre deux points relais successifs, la consommation est de* 1UK.

### Extension au cas où *n* n'est pas entier




Posons $n = m + h$ avec $m$ entier et $0 < h < 1$. Utilisons la méthode qui a servi dans les cas $m = 1$ et $m = 2$. Partant de A, on place un point $A_m$ à la distance de A, de telle sorte que les $m$ allers et $m - 1$ retours entre A et $A_m$, consommant en tout $h$UK, permettent de repartir de $A_m$ avec $m$UK et donc d'utiliser $V_m$. On peut donc aller jusqu'à la distance

$$\delta(m+h)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-3}+\frac{1}{2m-1}+\frac{h}{2m+1}.$$

On observera que la formule reste valable si $h = 0$ ou $h = 1$ et qu'elle réalise une interpolation linéaire entre les cas $n = m$ et $n = m + 1$. La courbe représentant la fonction est donnée ci-dessus.

## 5. La qualité de l'algorithme $V_n$ pour $n$ entier

On montrera plus loin qu'on ne peut pas trouver mieux. Cet algorithme n'est pas enthousiasmant pour autant, comme la courbe ci-dessus le faisait pressentir. Pour une traversée de 2UL, le fait que

$$\delta(7)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\approx 1,9551$$

montre qu'il faut prendre $2n - 1 = 15$, soit $n = 8$, autrement dit 8 fois ce qu'aurait exigé une traversée de 1UL.

**Un encadrement de $\delta(n)$**

Précisons un peu les choses : avec comme points de subdivision les entiers impairs, la méthode des trapèzes, appliquée à l'intégrale $I_n = \int_1^{2n+1}\frac{dx}{x}$, donne une valeur approchée par excès :

$$1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n+1}=I_n+\varepsilon_n=\ln(2n+1)+\varepsilon_n$$

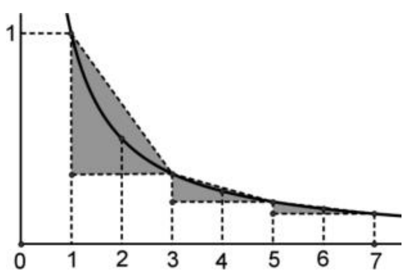
où $\varepsilon_n$ est l'erreur commise, évidemment positive. La distance accessible avec une réserve de $n$UK est $\delta(n)$UK, avec $\delta(n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}$. On a donc

$$I_n = 2\delta(n)-1+\frac{1}{2n+1}-\varepsilon_n.$$

De $I_n = \ln(2n + 1)$, on tire

$$\delta(n)=\frac{1}{2}\ln(2n+1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2}\varepsilon_n.$$

Or $\varepsilon_n$ est l'aire d'une zone incluse dans la réunion des triangles hachurés sur la figure, de base 2, dont la somme des hauteurs est inférieure à 1 , donc $\varepsilon_n < 1$. Au total :




$$\boxed{\frac{1}{2}\ln(2n+1)<\delta(n)<\frac{1}{2}\ln(2n+1)+1.}$$

On aurait pu faire mieux, mais cela permet de voir :

- ♦ qu'avec assez de carburant au départ on peut aller aussi loin qu'on veut ;
- ♦ que la distance accessible avec une quantité donnée de carburant augmente en fonction logarithmique de cette quantité et qu'inversement, donc, la quantité de

carburant nécessaire pour aller à une distance donnée augmente exponentiellement en fonction de cette distance.
N.B. : Pour avoir une idée du comportement de la somme $\delta(n)$, on peut se passer d'intégrale en groupant par paquets les termes consécutifs : la somme $u_k = \frac{1}{3^k+2} + \frac{1}{3^k+4} + \cdots + \frac{1}{3^{k+1}}$ comporte $3^k$ termes, car $3^{k+1} = 3^k + 2 \times 3^k$ et ces termes sont tous compris entre $\frac{1}{3^{k+1}}$ et $\frac{1}{3^k}$. On en tire $\frac{1}{3} \leq u_k \leq 1$, puis $\frac{k}{3} \leq u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1} \leq k,$ , d'où $1 + \frac{k}{3} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3^k} \leq 1 + k$. Cela permet de justifier que $\delta(n)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, mais augmente très lentement.

**Une estimation asymptotique**

Nous supposons connue la formule suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $\gamma$ désigne la constante d'Euler, soit environ 0,5772.
Alors :

$$\delta(n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

D'où :

$$\delta(n) = \ln(2n) + \gamma + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et finalement

$$\boxed{\delta(n) = \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

**Exemple** : la formule ci-dessus donne pour $\delta(7)$ la valeur approchée 1,9547 très raisonnablement proche de celle qu'on obtient par calcul direct, qui est 1,9551.

## 6. L'algorithme $V_n$ est optimal

**Le problème**

*On suppose que la jeep part d'un point* A *de la piste où est entreposée une réserve de carburant de n*UK*, n étant un entier, et qu'elle finit son parcours en un point* B *situé à la distance d de* A. Il s'agit de démontrer l'inégalité :

$$d \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

Le raisonnement a été rodé sur les premières valeurs de $n$.
Dans le cas $n = 1$, le mieux qu'on puisse faire est évidemment, partant de A, de continuer tout droit jusqu'à épuisement (algorithme $V_1$). On a déjà montré aux paragraphes 2 et 3 que $V_2$ et $V_3$ sont optimaux, en faisant sur le chemin parcouru un découpage en tranches sur lesquelles la consommation est de 1UK. Cette technique va être étendue au cas général.

**Un découpage auxiliaire**

*Découpons donc* [AB] *en allant de* A *vers* B *par des points* $E_j$, *avec* $E_n = A$ *et* $E_0 = B$, *chacun des* $E_j$ *étant tel que sur le segment de piste* $[E_{j+1}E_j]$ *où* $0 \le j \le n-1$, *la jeep consomme exactement* 1UK.
Il en résulte que sur $[E_jE_0]$ elle consomme en tout $j$UK dans ses trajets d'aller ou de retour.

**$V_n$ est optimal**

Prenons un point M situé sur $[E_{j+1}E_j[$. D'après la définition même de $E_j$, sur $]ME_0]$ la jeep consomme plus de $j$UK. Puisqu'elle ne peut emporter plus de 1UK à la fois, elle passe au moins $(j + 1)$ fois en M dans le sens aller, ce qui implique qu'elle y passe au moins j fois dans le sens retour, donc au moins $(2j + 1)$ fois en tout. On en déduit que la consommation sur $[E_{j+1}E_j]$ est au moins égale à $(2j + 1)E_{j+1}E_j$.
Mais la consommation totale sur $[E_{j+1}E_j]$ est 1. Il en résulte

$$E_{j+1}\,E_j \le \frac{1}{2j+1} \tag{1}$$

et par suite $d$, distance entre les deux points extrêmes (soit $AB = \sum E_{j+1}E_j$), vérifie bien :

$$d \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \tag{2}$$

*La distance maximale que l'on puisse atteindre est celle que l'on obtient en suivant* $V_n$.

**Pour $n \ge 3$, l'algorithme $V_n$ n'est pas strictement optimal**

♦ Pour avoir l'égalité dans (2) il faut avoir, pour tout $j$ tel que $0 \le j \le n-1$, l'égalité dans (1). Autrement dit, le découpage doit être formé des mêmes points relais que pour $V_n$. *Ce découpage est donc strictement optimal*. En outre, pour un tel découpage, le nombre d'allers et de retours entre $E_{j+1}$ et $Ej$ est $2j + 1$, donc le même que pour $V_n$.
♦ En revanche, *on peut faire sur le modèle* $V_n$ *certaines permutations de voyages sans perdre le caractère optimal*. En particulier, on voit immédiatement qu'en remplaçant dans $V_n$ la partie $V_3$ (correspondant au trajet entre $E_3$ et $E_0$) par $W_3$ (cf. § 3), on obtient encore un algorithme optimal.

**Conclusion**

Cet algorithme de la jeep, par cela même qu'il est issu d'un problème pratique *a priori* non numérique, peut aider les élèves à prendre conscience d'un fait souvent quelque peu négligé : l'algorithmique n'est pas seulement un outil de l'informatique, mais une discipline à part entière.

Il a un autre mérite : il présente un exemple d'algorithme dont, et ce n'est pas si courant, on peut discuter sans trop de mal et assez à fond l'optimalité et le coût.

**Appendice : Une variante du problème**

Dans ce qui précède a été étudiée la « traversée du désert » : la jeep effectue un aller simple et s'arrête après avoir épuisé son carburant. Mais on peut aussi se poser le problème d'un aller-retour : « l'exploration du désert ». Ce problème (également résolu par Nathan Fine dans le même article) est un peu plus délicat car la jeep peut, aux points relais choisis, se ravitailler à l'aller et au retour.

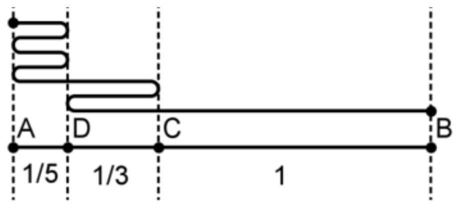
Il peut être formulé en termes militaires : quelle organisation mettre en place pour que les bombardiers puissent aller arroser des territoires situés à l'autre bout du monde et rentrer ensuite à leur base ? Il s'agit bien cette fois d'un aller-retour : il est en effet assez rare qu'un bombardier ait envie d'atterrir à l'endroit où il vient de larguer sa cargaison.

**Référence**

L'article de David Gale, « The jeep once more or jeeper by the dozen » (*American Mathematical Monthly*, mai 1970), accessible sur Internet, traite de façon (relativement) simple le problème de la traversée du désert, celui de l'exploration du désert et celui d'une traversée par plusieurs jeeps dont au moins une doit arriver au but.

*Je remercie vivement Bernard Langer, qui a conçu et réalisé les deux annexes qui suivent.*

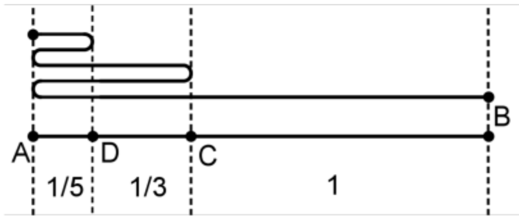
**Annexe 1 : Le parcours $V_3$**




| Trajet | Carburant Disponible en A | Conso. Sur [AD] | Carburant Disponible en D | Conso. Sur [DC] | Carburant Disponible en C | Conso. Sur [CB] | Carburant Disponible en B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | | 0 | | 0 | | 0 |
| $A \to D$ | 2 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $D \to A$ | 2 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $A \to D$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $D \to A$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $A \to D$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=2$ | | 0 | | 0 |
| $D \to C$ | 0 | | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | | 0 |
| $C \to D$ | 0 | | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | | 0 |
| $D \to C$ | 0 | | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ | | 0 |
| $C \to B$ | 0 | | 0 | | 0 | 1 | 0 |

Les cases grisées indiquent la position de la Jeep en fin d'étape.

**Annexe 2 : Le parcours $W_3$**




| Trajet | Carburant Disponible en A | Conso. Sur [AD] | Carburant Disponible en D | Conso. Sur [DC] | Carburant Disponible en C | Conso. Sur [CB] | Carburant Disponible en B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | | 0 | | 0 | | 0 |
| $A \to D$ | 2 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $D \to A$ | 2 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $A \to D$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$ | | 0 | | 0 |
| $D \to C$ | 1 | | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | | 0 |
| $C \to D$ | 1 | | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | | 0 |
| $D \to A$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | | $\frac{1}{3}$ | | 0 |
| $A \to D$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$ | | $\frac{1}{3}$ | | 0 |
| $D \to C$ | 0 | | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ | | 0 |
| $C \to B$ | 0 | | 0 | | 0 | 1 | 0 |

Les cases grisées indiquent la position de la Jeep en fin d'étape.