Le théorème de Pick

Jean-Pierre Friedelmeyer et Julien Moreau[*]

Le théorème de Pick est un petit bijou mathématique : un énoncé facile à comprendre et à visualiser, une démonstration qui ne sort pas du programme des lycées, mais qui n'est pour autant nullement évidente.

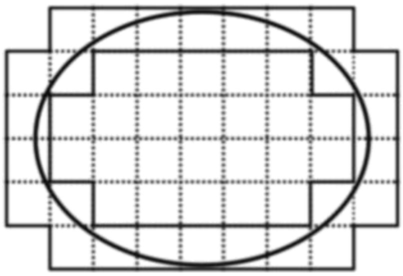
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormal Oxy. On utilisera dans toute la suite les conventions suivantes :

• *un point sera dit entier si et seulement si ses coordonnées sont entières ;*
• *un polygone sera dit entier si et seulement si tous ses sommets sont entiers.*

1. Introduction

1.1. Estimation d'une aire

Étant donné une courbe fermée Γ, un encadrement de l'aire S délimitée par Γ peut être obtenu comme suit, en utilisant la grille des droites $x = a$ et $y = b$, avec a et b entiers relatifs :



• on compte le nombre I de « carreaux » de la grille intérieurs à Γ ;
• on compte le nombre B de carreaux de la grille comportant à la fois des points intérieurs à Γ et des points extérieurs à Γ.
On a la double inégalité I ≤ S ≤ I + , ce qui fait qu'une estimation grossière mais raisonnable de S est $\mathrm{I}+\dfrac{\mathrm{B}}{2}$.

1.2. La formule de Pick

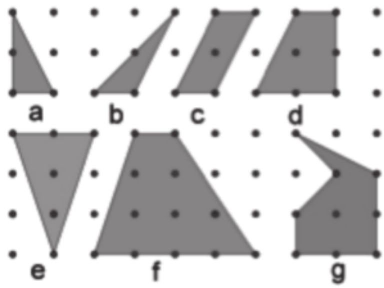
Le mathématicien autrichien (1859- 1942) Georg Alexander Pick[1] eut l'intuition que cette méthode, compter pour 1 ce qui est à l'intérieur et pour 1/2 ce qui est sur le bord, pouvait s'appliquer au calcul de l'aire des polygones entiers, en remplaçant le décompte des carrés unité par celui des points entiers. L'originalité et la force du théorème de Pick tiennent alors à deux propriétés :

1) la mesure d'une aire est remplacée par un comptage discret de points qui donne toujours un résultat entier ou entier plus ½ ;
2) en se limitant aux polygones entiers elle garantit de donner toujours la valeur exacte de l'aire du polygone.

(*) jean- pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr ; julien.e.moreau@gmail.com
(1) Sa fin n'honore pas l'humanité : à 82 ans, il fut envoyé par les Nazis en camp de concentration et y mourut au bout de quelques jours.

Étant donné un polygone entier P*, on appellera désormais* S(P) *son aire,* i(P) *le nombre de points entiers situés à l'intérieur de* P*,* b(P) *le nombre de points entiers situés sur le bord de* P (sommets inclus).

Plutôt que de « parachuter » la formule trouvée par Pick, montrons comment on peut la conjecturer à partir d'exemples simples, les polygones a, b, c, d, e, f, g de la figure ci-dessous. Pour les polygones entiers représentés ici, il est aisé de calculer l'aire et la quantité $i + b/2$.



Polygone	a	b	c	d	e	f	g
S	1	1	2	3	3	15/2	4
i	0	0	1	1	2	5	1
b	4	4	4	6	4	7	8
i+b/2	2	2	3	4	4	17/2	5

On obtient le tableau ci-dessus, qui rend naturelle la conjecture suivante :

Étant donné un polygone entier P*, son aire* S(P) *est donnée par la « formule de Pick » :*

$$\boxed{\mathrm{S}(\mathrm{P}) = i(\mathrm{P}) + \frac{1}{2}b(\mathrm{P}) - 1.}$$

L'intérêt de la formule tient en ce qu'elle permet de calculer l'aire du polygone P simplement en dénombrant des points mais aussi de déterminer l'un des entiers i ou b connaissant l'autre et l'aire. C'est ainsi qu'au Canada, certains exploitants forestiers utilisent la formule de Pick pour estimer le nombre d'arbres dans un domaine planté de façon régulière. Il leur suffit de consulter le cadastre pour en connaître l'aire et de compter les arbres sur le pourtour. La formule de Pick leur donne alors le nombre d'arbres situés dans le domaine.

1.3. Le schéma de la démonstration

Le principe de base est celui- ci :
- À tout polygone entier P on associe sa fonction de Pick F définie par :

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}) = i(\mathrm{P}) + \frac{1}{2}b(\mathrm{P}) - 1.$$

- On montre que cette fonction F est additive, c'est-à-dire que, si un polynôme entier P est décomposable en deux autres, P_1 et P_2, alors F(P) = F(P_1) + F(P_2).
- On utilise à plusieurs reprises l'additivité de F, en même temps que celle de l'aire, pour passer des rectangles aux triangles (rectangles, puis quelconques) et enfin aux polygones, convexes ou non.

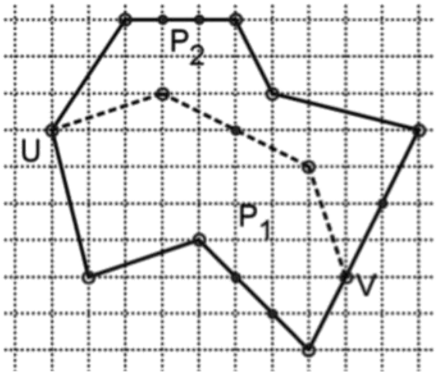
2. L'additivité de la fonction de Pick

Soit un polygone P *entier. On le décompose en deux autres polygones entiers* P_1 *et* P_2 *par une ligne polygonale à sommets entiers. Alors* $F(P) = F(P_1) + F(P_2)$.

2.1. Démonstration 1

Nous allons travailler sur la fonction $G = F + 1 = i + \frac{1}{2}b$.

Prenons d'abord un point entier intérieur à P. S'il est intérieur par exemple à P_1, il compte pour 1 dans $G(P_1)$ et pour 0 dans $G(P_2)$; s'il est sur la ligne séparatrice, il compte pour $\frac{1}{2}$ dans $G(P_1)$ et pour $\frac{1}{2}$ dans $G(P_2)$. Dans tous les cas, il compte pour 1 dans $G(P_1) + G(P_2)$, c'est-à-dire le montant pour lequel il compte dans G(P).



Prenons maintenant un point entier sur le bord de P. S'il est distinct des extrémités U et V de la ligne séparatrice, il est par exemple sur le bord de P_1, mais pas sur celui de P_2 ; il compte donc pour $\frac{1}{2}$ dans $G(P_1)$ et pour 0 dans $G(P_2)$. Au total, il compte pour $\frac{1}{2}$ dans $G(P_1) + G(P_2)$, c'est-à-dire le montant pour lequel il compte dans G(P).

Restent les deux points U et V. Prenons par exemple U. Il compte pour $\frac{1}{2}$ dans $G(P_1)$ et pour $\frac{1}{2}$ dans $G(P_2)$, donc pour 1 dans $G(P_1) + G(P_2)$, mais seulement pour $\frac{1}{2}$ dans G(P). Les mêmes résultats étant valables pour U, le couple (U, V) compte donc pour 2 dans $G(P_1) + G(P_2)$ et pour 1 dans G(P).

2.2. Démonstration 2

Cette démonstration est un peu plus longue, mais elle donne de la fonction de Pick une interprétation intuitive qui permet de rendre visuellement évident le théorème d'additivité. Elle exige la connaissance du théorème suivant, qui sera démontré plus loin (§ 3.6.) :

La somme des angles d'un *n*-gone est $(n - 2) \times 180°$.

À tout point entier M d'un polygone entier P on associe l'angle $\alpha_P(M)$ défini comme suit : si M est intérieur à P, $\alpha_P(M) = 360°$; si M est sur le bord de P sans être un sommet, $\alpha_P(M) = 180°$; si M est un sommet de P, $\alpha_P(M)$ est l'angle en M du polygone, mesuré en degrés.

Si P est convexe, $\alpha_P(M)$ est tout simplement l'angle sous lequel P est vu de M. Si P n'est pas convexe, $\alpha_P(M)$ est l'angle sous lequel est vu de M l'ensemble des points de P assez proches de M. On convient en outre de prolonger la fonction α_P en posant $\alpha_P(M) = 0$ lorsque M est un point entier situé hors de P.

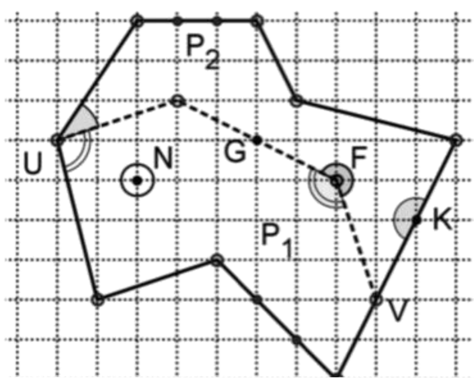
Calculons $\sigma(P)$, somme des valeurs de $\alpha_P(M)$ quand M décrit l'ensemble des points entiers d'un n-gone P. La somme pour les points intérieurs est $i(P) \times 360°$. Pour les points situés sur les bords qui ne sont pas des sommets, la somme est $(b(P) - n) \times 180°$. Pour les sommets, elle est, d'après le théorème que nous venons d'admettre, de $(n - 2) \times 180°$.
Au total

$$\sigma(P) = i(P) \times 360° + (b(P) - n) \times 180° + (n-2) \times 180°$$
$$= \left(i(P) + \frac{1}{2} b(P) - 1 \right) \times 360° = F(P) \times 360°.$$

Prouver l'additivité de la fonction de Pick revient donc à prouver l'additivité de la fonction σ. Il suffit de montrer que, pour tout point entier M,

$$\alpha_P(M) = \alpha_{P_1}(M) + \alpha_{P_2}(M).$$

Le résultat est visuellement évident sur la figure, en regardant cas par cas :
– point intérieur à un seul des P_i (point N) ;
– point de la séparatrice autre que ses extrémités (F ou G) ;
– extrémité de la séparatrice (U ou V) ;
– point sur le bord d'un seul des P_i (point K).



Remarque. Cette seconde démonstration est due à D. E. Varberg (Pick's theorem revisited, *Amer. Math. Monthly* 92 (1985) pages 584 – 587).

3. Utilisation répétée de l'additivité

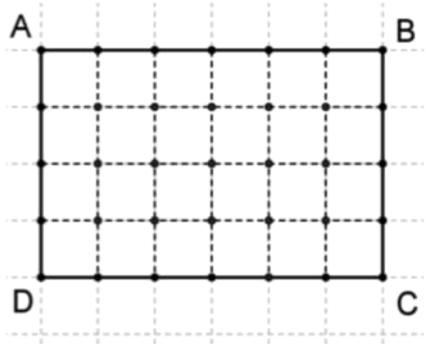
3.1. Lemme

Soit un polygone P *entier partagé en deux autres polygones entiers* P_1 *et* P_2 *par une ligne polygonale. Si la formule de Pick est valable pour deux des trois polygones, elle vaut aussi pour le troisième.*

Il suffit pour conclure de rapprocher les deux égalités exprimant l'additivité de l'aire et celle de la fonction de Pick : F(P) = F(P_1) + F(P_2) et S(P) = S(P_1) + S(P_2).

3.2. Rectangle entier de côtés parallèles aux axes

Prenons pour P un rectangle entier ABCD de côtés parallèles aux axes. Si AB = m et BC = n, on voit aisément, avec les notations du 1.2. (qui seront conservées dans toute la suite), que le nombre i(P) de points entiers intérieurs à P est (m − 1) (n − 1) et que le nombre b(P) de points entiers situés sur le bord est $2m + 2n$. On a :



$$i(\mathrm{P})+\frac{1}{2}b(\mathrm{P})=(m-1)(n-1)+m+n,$$

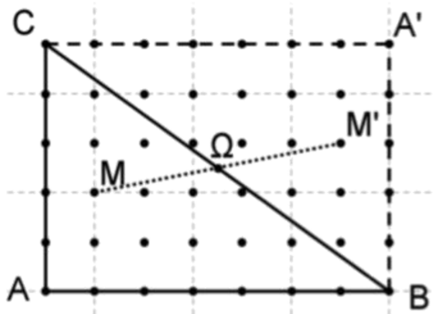
soit encore $i(\mathrm{P})+\frac{1}{2}b(\mathrm{P})=mn+1$, donc

$$i(\mathrm{P})+\frac{1}{2}b(\mathrm{P})=\mathrm{S}(\mathrm{P})+1.$$

P vérifie donc bien la formule de Pick.

3.3. Triangle rectangle entier ayant deux côtés parallèles aux axes

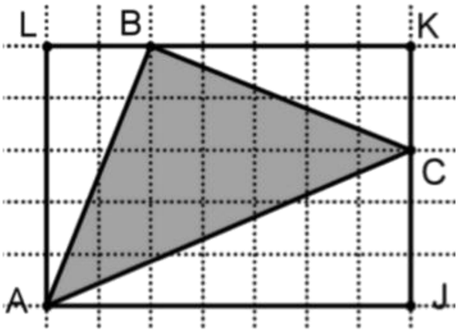
Soit ABC un tel triangle. On le complète en un rectangle ABA′C. Les points entiers du triangle A′BC sont les symétriques des points entiers du triangle ABC par rapport au centre Ω du rectangle. En effet les coordonnées (☐, ☐) de Ω sont des entiers ou des moitiés d'entiers et la correspondance entre un point M du triangle ABC et son symétrique M′ par rapport à Ω s'écrit $x' = 2p - x$, $y' = 2q - y$.

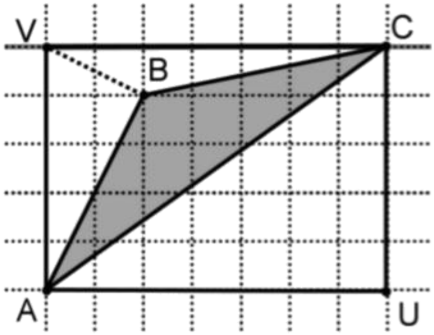


On a donc F(A′BC) = F(ABC). D'où :
F(ABA′C) = F(A′BC) + F(ABC) = 2F(ABC).
Mais F(ABA′C) = S(ABA′C) = 2S(ABC).
Le triangle ABC vérifie donc la formule de Pick.

3.4. Triangle entier quelconque

L'idée est d'inscrire ce triangle ABC dans un rectangle entier de côtés parallèles aux axes et aussi petit que possible. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c') les coordonnées de A, B, C ; on peut toujours supposer, en permutant éventuellement les trois points, que l'on a $a \leq b \leq c$. Selon que b' est ou non compris entre a' et c', on a (à une symétrie près





par rapport à Ox, Oy ou O) la configuration représentée par la figure de droite ou celle de la figure de gauche.

Le cas de la figure de gauche se règle très vite par utilisation répétée du lemme du § 3.1 : le rectangle AJKL et le triangle ALB vérifient la formule de Pick, donc le trapèze AJKB aussi ; AJKB et BKC vérifient la formule de Pick, donc le quadrilatère AJCB aussi ; AJCB et AJC vérifient la formule de Pick, donc le triangle ABC aussi.

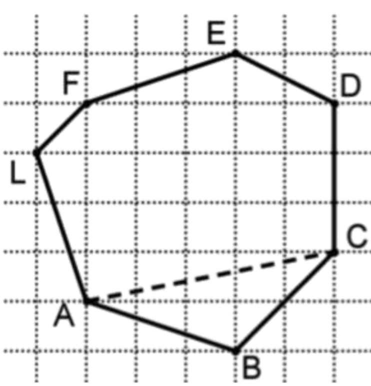
Observons que le résultat vaut si L et B sont confondus, donc pour tout triangle dont un côté [AB] est parallèle à l'un des axes, sous réserve que la hauteur correspondante ait son pied entre A et B.

Regardons maintenant la figure de droite. Les triangles ABV et BCV sont du type que nous venons juste de décrire, donc vérifient la formule de Pick. Le quadrilatère ABCV la vérifie donc aussi et comme le triangle AVC la vérifie, il en est de même par différence du triangle ABC.

Tout triangle entier vérifie donc la formule de Pick.

Corollaire : Si un triangle entier n'a d'autres points entiers que ses sommets, son aire est $\frac{1}{2}$.

3.5. Polygone entier convexe



Il est maintenant immédiat de prouver le théorème de Pick pour un n-gone entier convexe. On travaille par récurrence sur n. Le résultat est connu pour $n = 3$. Supposons-le valable jusqu'à $n - 1$ et prenons un n-gone ABC…L. Coupons-le en deux par le segment [AC] : d'un côté le triangle ABC, de l'autre le $(n - 1)$-gone ACD…L. Il suffit alors pour conclure d'appliquer le lemme du § 3.1.

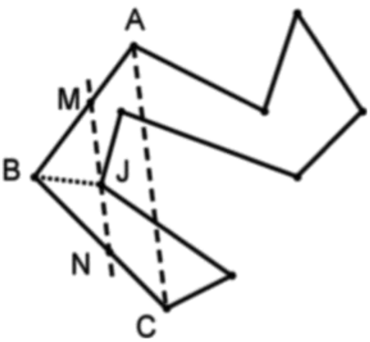
3.6. Polygone entier quelconque

La situation est plus délicate : si l'on essaie d'appliquer la même méthode, on se heurte à deux difficultés. La première est aisément réglée : il faut choisir trois sommets consécutifs A, B, C tels que l'angle $\widehat{ABC}$ du polygone soit saillant (ce qui est toujours possible : il suffit de prendre pour B l'un des sommets d'abscisse minimum). Mais une fois ce choix effectué, il est parfaitement possible qu'un au moins des sommets du polygone soit intérieur au triangle ABC, ce qui bloque le raisonnement.

On s'en sort en utilisant le théorème suivant :

Théorème T

Tout polygone admet au moins une « diagonale propre », c'est-à-dire qu'il existe deux sommets non consécutifs P *et* Q *tels que*]PQ[*soit entièrement intérieur au polygone.*



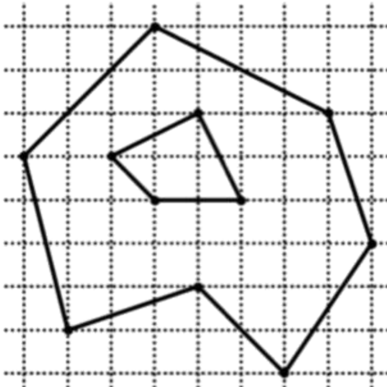
Démonstration : Prenons trois sommets consécutifs A, B, C tels que l'angle $\widehat{ABC}$ du polygone soit saillant. Si aucun sommet du polygone n'est intérieur au triangle ABC,]AC[répond à la question. S'il y a des sommets du polygone intérieurs au triangle ABC, on choisit parmi eux celui, J, par lequel passe la parallèle à (AC) la plus proche de B (J n'est pas forcément unique). Si cette parallèle coupe [AB] en M et [BC] en N, le triangle BM est inclus dans le polygone et *a fortiori* [BJ], qui est donc une diagonale.

Le théorème de Pick en découle : Nous savons que tout triangle entier vérifie la formule de Pick. Prenons maintenant $n > 3$ et supposons que tout k-gone entier vérifie la formule de Pick pour $3 \leq k < n$. En partageant un n-gone par une « diagonale propre », on le coupe en un p-gone et un q-gone, entiers l'un et l'autre, qui, par hypothèse de récurrence, vérifient la formule de Pick. D'après le lemme du § 3.1, le n-gone la vérifie aussi.

Remarque

Le théorème T permet aussi d'établir le résultat admis précédemment :
La somme des angles d'un n-gone est $(n - 2) \times 180°$.

La chose est bien connue pour $n = 3$. Prenons maintenant $n > 3$ et supposons que tout k-gone entier vérifie cettte propriété pour $3 \leq \ < n$. En partageant un n-gone par une « diagonale propre », on le coupe en un p-gone et un q-gone, entiers l'un et l'autre, avec $p + q = n + 2$. Par hypothèse de récurrence, les sommes des angles sont $(p - 2) \times 180°$ pour l'un et $(q - 2) \times 180°$ pour l'autre. La somme des angles du n-gone est donc $(p - 2 + q - 2\ ) \times 180°$, soit $(n - 2) \times 180°$.



3.7. La formule de Pick vaut-elle pour un polygone « à trous » ?

Prenons un polygone entier P et évidons-le en lui enlevant un autre polygone entier Q situé à son intérieur. Le « polygone » troué R ainsi obtenu vérifie-t-il encore le théorème de Pick ?

Le bord de R est la réunion des bords de P et Q, donc : b(R) = b(P) + b(Q).

Les points entiers intérieurs à R sont les points entiers intérieurs à P qui ne sont ni à l'intérieur de Q, ni sur son bord, donc : i(R) = i(P) − i(Q) − b(Q). On en tire :

$$i(\mathrm{R})+\frac{1}{2}b(\mathrm{R})=i(\mathrm{P})+\frac{1}{2}b(\mathrm{P})-i(\mathrm{Q})-\frac{1}{2}b(\mathrm{Q}),$$

donc : $i(\mathrm{R})+\frac{1}{2}b(\mathrm{R})=\mathrm{S}(\mathrm{P})-\mathrm{S}(\mathrm{Q})=\mathrm{S}(\mathrm{R})$.

Si on désigne encore par F(R) la fonction de Pick $i(\mathrm{R})+\frac{1}{2}b(\mathrm{R})-1$, on a :

$$\mathrm{S(R) = F(R) + 1}$$

et non S(R) = F(R).

Le lecteur courageux pourra vérifier par récurrence que :

Pour un polynôme entier à n trous, on obtient : S(R) = F(R) + n.

Remarque : Le lecteur grincheux froncera le sourcil à la lecture de ce qui a été dit sur le cas d'un polygone non forcément convexe (§ 2.1, § 2.2, § 3.6, § 3.7), car il y verra de trop nombreux appels à l'intuition. Ils sont malheureusement inévitables. Le fait qu'une ligne polygonale fermée sans points doubles partage le plan en deux régions(3) dont l'une est bornée (théorème de Jordan pour les polygones) est en effet fort difficile à établir en toute rigueur.

4. Exercices

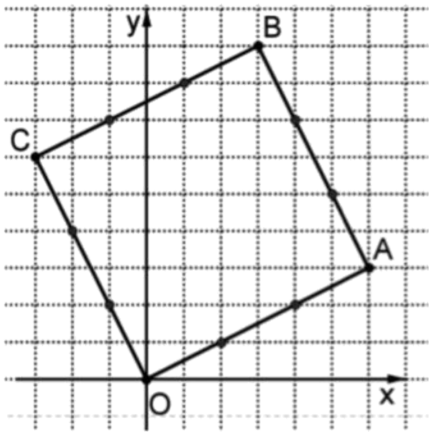
4.1. Y a-t-il des triangles équilatéraux entiers ?

Indication : On compare l'expression de l'aire du triangle équilatéral en fonction du côté et celle donnée par la formule de Pick. La première est irrationnelle, la seconde rationnelle.

4.2. Combien y a-t-il de points à l'intérieur d'un carré entier ?

(3) Plus précisément deux ouverts connexes.

Appelons a la longueur des côtés. Si ceux-ci sont parallèles aux axes, il suffit d'appliquer l'étude faite au § 1.3. (rectangle aux côtés parallèles aux axe pour trouver $i(\mathrm{K}) = (a - 1)^2$. Ce cas sera écarté par la suite.



Il n'est pas restrictif, au prix d'une translation entière, de supposer que l'un des sommets est l'origine O. Soit donc OABC ce carré, supposé de sens direct ; quitte à faire tourner les axes autour de O d'un multiple de 90°, ce qui ne change pas des points entiers, on peut supposer en outre que A est dans le premier quadrant, axes exclus. Soient p et q ses coordonnées ($p > 0$, $q > 0$, $p^2 + q^2 = a^2$), δ leur pgcd, et posons $p = \delta u$, $q = \delta v$.

On passe de [OA] à [OC] par une rotation de 90° autour de O et de ces deux côtés aux deux autres par des translations entières, toutes transformations qui laissent invariante la grille des points entiers. Donc le nombre de points entiers sur le pourtour du carré est 4 fois le nombre de points entiers sur]OA].

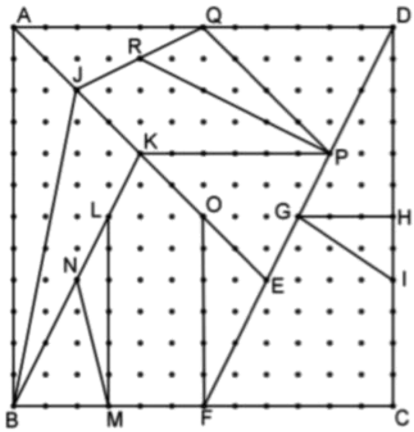
Soit un point entier (x, y). Il est sur la droite (OA) si et seulement si $\dfrac{y}{x} = \dfrac{v}{u}$; u et v étant premiers entre eux, dire que $(x, y) \in (\mathrm{OA})$ revient donc à dire qu'il existe un entier λ tel que $x = \lambda u$, $y = \lambda v$. Le point est sur]OA] si et seulement si $1 \leq \lambda \leq \delta$; il y a donc δ points entiers sur]OA] et donc 4δ points entiers sur le bord du carré.
Reste à appliquer la formule de Pick :

$$\mathrm{S}(\mathrm{K}) = i(\mathrm{K}) + \frac{1}{2}b(\mathrm{K}) - 1$$

donne finalement : $i(\mathrm{K}) = a^2 - 2\delta + 1$.

4.3. Le stomachion

On attribue à Archimède, depuis l'Antiquité, le puzzle ci-contre, appelé *stomachion*. Il y a deux manières de calculer l'aire de chacun des morceaux : par la géométrie ou… par la formule de Pick. Si le carré a pour côté 12 unités de longueur, quelle est l'aire de chacun des morceaux ?



N.B. : Pour plus de détails sur ce puzzle, voir dans le B.V. nº 485 l'article « Un puzzle chargé d'histoire ». 10