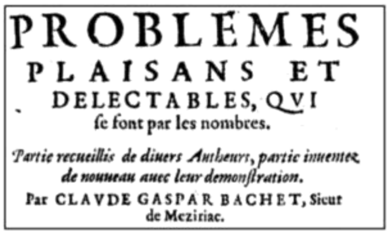
Problèmes plaisants et délectables

Pierre Legrand

Le lecteur qui veut seulement accéder à une liste de problèmes récréatifs peut aller tout droit aux paragraphes 4 et 5.

1. Introduction

Claude Gaspar Bachet, sieur [seigneur] de Méziriac[1], ainsi qu'il se présente lui-même, n'a guère laissé de trace dans l'histoire. Lorsqu'il est mentionné, c'est le plus souvent comme auteur d'une traduction commentée de Diophante qui fut le livre de chevet de Fermat. Mais c'est aussi lui qui a écrit le premier ouvrage de quelque ampleur consacré aux récréations mathématiques.


PROBLEMES PLAISANS ET DELECTABLES, QVI ſe font par les nombres.

Partie recueillis de diuers Autheurs, partie inuentez de nouueau auec leur demonſtration.

Par CLAVDE GASPAR BACHET, Sieur de Meziriac.

Ses Problèmes plaisans et délectables ont connu de son vivant deux éditions. La première fut publiée à Paris en 1612, la seconde à Lyon en 1624. Mais d'abord quelques mots sur Bachet lui-même.

2. Le personnage

Il est né à Bourg-en-Bresse en 1582, d'une riche famille de magistrats lettrés assez récemment anoblie. En dehors de quelques longs séjours à Paris et en Italie, il passa sa vie dans sa province. Il mourut à Bourg en 1638.

Avant tout, c'était un humaniste érudit[2] : polyglotte, traducteur du grec, du latin et de l'italien, auteur de poésies en français, en latin et en italien... et l'un des tout premiers membres de l'Académie française, où il ne mit jamais les pieds. En mathématiques, c'était comme Pascal et Fermat un amateur, de niveau plus modeste sans doute mais fort doué et dont la contribution, on le verra, n'est pas négligeable.

3. Le livre des « Problèmes »

L'édition de 1612 est, pour l'essentiel, un recueil d'énigmes de salon, destinées à un public curieux et cultivé, mais sans talent particulier pour les mathématiques. Certaines d'entre elles[3] sont reprises de l'*Anthologie grecque* ou des *Propositiones ad acuendos juvenes* d'Alcuin.

(*) p.m.legrand@sfr.fr

(1) Méziriac est un bourg qui s'appelle maintenant Mézériat, à mi-chemin entre Bourg-en-Bresse et Mâcon.

(2) Pour plus de détails sur la vie et l'oeuvre de Bachet, voir [1] .

(3) Voir les articles « Vingt problèmes antiques pour le collège » (B.V. n° 510) et « Énigmes carolingiennes » (B.V. n° 512)

Une bonne part des années qui suivirent fut consacrée par Bachet à traduire (non en français mais en latin, la langue scientifique de l'époque) les œuvres de Diophante, le plus grand arithméticien de l'Antiquité grecque. Le livre n'est d'ailleurs pas une simple traduction, mais aussi une réflexion approfondie à partir du texte ; les commentaires de Bachet, faits au fur et à mesure des propositions de l'auteur grec, tiennent même dans l'ouvrage plus de place que celles-ci.

Aussi ne doit-on pas s'étonner que la seconde édition des *Problèmes*, celle de 1624, porte l'empreinte de ce long travail. Le nombre de pages est passé de 172 à 247. On y trouve quelques énoncés nouveaux, en général plus corsés que les précédents, mais le gros des ajouts porte sur le contenu scientifique. Il ne s'agit plus simplement d'un recueil de divertissements ingénieux pour gens du monde : il y a dans le livre de véritables mathématiques et même des résultats originaux.

C'est sur cette seule seconde édition que porte ce qui suit. L'ouvrage est de lecture difficile, car si l'on peut y voir quelques schémas (parfois obscurs), on ne trouve strictement aucune formule. C'est ainsi qu'au lieu de « si AB = C, alors $\frac{A}{2}B = \frac{C}{2}$ », Bachet écrit tout du long(4) « puisque B multipliant A fait C, le même B multipliant la moitié de A fera la moitié de C ». Dès que la situation se complique un peu, les explications deviennent interminables. Il est cependant difficile de lui en vouloir, car les rudiments de la notation algébrique ne sont apparus que peu à peu, tout au long du XVI^{e} siècle, et c'est Descartes, contemporain de Bachet, qui a été le premier à en faire un usage étendu et systématique. Il a ensuite fallu près de deux siècles pour qu'elle devienne un instrument banalisé.

La structure du livre

L'ouvrage est divisé en trois parties :

• *Pages 1 à 52* : propositions suivies de leur démonstration, numérotées de I à XXVI.

• *Pages 53 à 198* : problèmes numérotés de I à XXV, très largement repris de la première édition.

• *Pages 199 à 247* : problèmes numérotés de I à X, plus difficiles en général que les précédents.

Tous les problèmes sont accompagnés d'une solution détaillée.

Analyse de la première partie

Ces cinquante pages ne sont pas le premier traité mathématique écrit en français (qui semble être le *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet, écrit en 1484), mais elles sont novatrices par leur souci de justifier méthodiquement les résultats énoncés.

(4) Pour toutes les citations de Bachet, orthographe et ponctuation ont été modernisées sans toucher au reste.

Les **propositions I à XIV** peuvent faire sourire quiconque oublie que l'époque en était à rebâtir l'arithmétique élémentaire. Ce serait un tort, comme le montre l'exemple de la proposition III : « *Si trois ou plusieurs nombres se multiplient entre eux, leur produit entre eux sera toujours le même, en quelle façon et par quel ordre qu'on les multiplie*[(5)] ». Cet énoncé, qui rassemble commutativité et associativité, nous semble fort banal. Et pourtant Euclide (proposition 16 du livre 7) n'établit que la commutativité d'un produit de deux termes et ne considère pas de produits de trois termes ou plus, ce que Bachet ne se prive pas de faire observer. En trois pages d'un raisonnement de proche en proche, il passe de deux facteurs à trois, puis à quatre, puis à cinq et termine ainsi : « Et si l'on propose six nombres, je me servirai de ce qui aura été démontré en cinq, et ainsi toujours, si l'on en propose davantage. Donc **le moyen est universel et applicable à toute multitude** [*au sens de* : quantité] **de nombres**[(6)]. » On voit donc, trente ans avant Pascal[(7)], apparaître une première ébauche de récurrence explicite.

Les propositions XV à XXV traitent des nombres premiers entre eux. Elles sont loin de se cantonner à des évidences, le clou étant la proposition XIX :

« *Deux nombres premiers entre eux étant donnés, trouver par ordre tous les multiples de chacun d'iceux surpassant de l'unité un multiple de l'autre* ».

Il s'agit bel et bien de l'égalité indûment dite de Bézout. Bachet la démontre par divisions successives (en fait par soustractions itérées), de façon fort longue mais parfaitement correcte, un siècle et demi avant Bézout.

La XXVI$^{\text{e}}$ et dernière proposition n'est autre que la justification de la preuve par 9, « dont plusieurs se servent aux quatre premières règles de l'arithmétique pratique[(8)] ».

4. Les problèmes de la seconde partie

À l'exception des problèmes XX à XXIV, il s'agit toujours de deviner les entiers (ou les objets) choisis par l'interlocuteur. Ce type de jeu n'est guère pratiqué de nos jours, mais il a été très en vogue aux XVIIe et XVIIIe siècles. On n'en trouvera ci-après qu'un petit nombre d'exemples (énoncés et solutions ont été simplifiés et explicités).

Problème I

Dialogue entre le « devin » et son cobaye :
- Pense un nombre entier. Multiplie-le par 3. Divise le résultat par 2 (après avoir ajouté 1 s'il est impair, mais il faut me le dire). Triple le nombre obtenu. Dis-moi combien de fois 9 est contenu dans ce nouveau nombre.
- …
- Je sais maintenant quel nombre tu avais choisi. C'est…

(5) Bachet signale que le résultat est déjà chez Clavius (1538-1612), mais estime avoir fait plus bref et plus clair.
(6) C'est moi qui souligne.
(7) Voir, dans le B.V. n° 506 l'article « La récurrence au fil des siècles ».
(8) Autrement dit : pour vérifier les quatre opérations.

Soit s le nombre pensé. Si $s = 2n$, on passe successivement à $6n$, puis $3n$, puis $9n$ et enfin n. Si $x = 2n + 1$, on passe successivement à $6n + 3$, puis $6n + 4$, puis $3n + 2$, puis $9n + 6$ et enfin n. Le devin n'a plus qu'à multiplier le résultat par 2 et ajouter 1 si besoin est.

Problème IV

- Pense un nombre. Multiplie-le par 2, puis ajoute 5, multiplie le tout par 5, ajoute 10, multiplie le tout par 10. Combien as-tu trouvé ?
-…
- Alors tu avais choisi…

Soit x le nombre pensé par le cobaye ; on passe à $2x$, puis $2x + 5$, puis $10x + 25$, puis $10x + 35$, enfin $y = 100x + 350$. Le devin n'a plus qu'à retrancher 350 de y et à diviser par 100.

Problème VII

« *Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensés* ».

Les entiers en question doivent être en nombre impair. Supposons qu'il y en ait cinq et appelons-les x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Le devin demande au cobaye de dire la valeur des sommes $s_1 = x_1 + x_2$, $s_2 = x_2 + x_3$, $s_3 = x_3 + x_4$, $s_4 = x_4 + x_5$ et $s_5 = x_5 + x_1$. Il ne lui reste plus alors qu'à calculer de tête les sommes $s_1 + s_3 + s_5$ et $s_2 + s_4$; leur différence est $2x_1$. Connaissant x_1, il aura $x_2 = s_1 - x_1$ et de proche en proche les autres nombres.

Problème XII

« *Deviner plusieurs nombres pensés, pourvu que chacun d'iceux soit moindre que 10* ».

Donnons le processus suivi pour quatre nombres.
1) Le devin fait multiplier le premier par 2, ajouter 5 au produit, multiplier le résultat par 5.
2) Il fait ajouter 10 au total précédent, puis le second nombre.
3) Il fait multiplier par 10 le nouveau total, puis ajouter le troisième nombre.
4) Il fait multiplier par 10 le troisième total et ajouter le quatrième nombre.
5) Il demande le résultat final.

La solution : Si x, y, z, t sont les nombres pensés, la première étape $10x + 25$ donne la deuxième $10x + y + 35$, la troisième $100x + 10y + z + 350$, la quatrième $1000x + 100y + 10z + t + 3500$.
Il retranche mentalement 3500 de ce nombre ; les quatre chiffres de la différence obtenue sont dans l'ordre les quatre nombres.

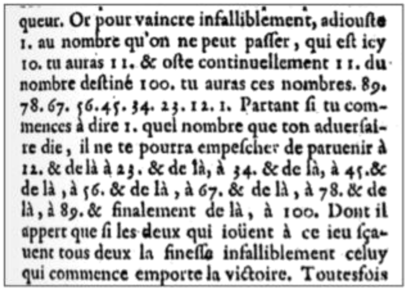
Problème XXI

En neuf pages, Bachet donne une recette inédite pour la construction des carrés magiques d'ordre impair. On trouvera dans [4], pages 88 à 113, outre le texte de Bachet, la justification de sa méthode et une méthode pour les carrés d'ordre pair.

Problème XXII

Ce problème est un exemple de jeu de stratégie à la fois simple et intéressant.

Un nombre N *est fixé ; deux joueurs annoncent successivement un nombre au plus égal à k* (k < N)*. On fait au fur et à mesure la somme des annonces ; le gagnant est celui qui atteint* N *le premier.*


queur. Or pour vaincre infalliblement, adiouste 1. au nombre qu'on ne peut passer, qui est icy 10. tu auras 11. & oste continuellement 11. du nombre destiné 100. tu auras ces nombres. 89. 78. 67. 56. 45. 34. 23. 12. 1. Partant si tu commences à dire 1. quel nombre que ton aduersaire die, il ne te pourra empescher de paruenir à 12. & de là à 23. & de là, à 34. & de là, à 45. & de là, à 56. & de là, à 67. & de là, à 78. & de là, à 89. & finalement de là, à 100. Dont il appert que si les deux qui iouent à ce ieu sçauent tous deux la finesse infalliblement celuy qui commence emporte la victoire. Toutesfois

Bachet expose d'abord le cas où k = 10 et N = 100, et montre que le premier joueur, A, s'il joue bien, gagne toujours. En effet, s'il atteint un total de 89, son adversaire B atteindra forcément un total compris entre 90 et 99 ; au coup suivant A a gagné. Pour la même raison, si A atteint 78, son adversaire ne pourra l'empêcher d'atteindre 89 et donc d'avoir partie gagnée. On voit la ligne de jeu gagnante pour A : commencer par jouer 1, puis à partir du second coup, viser la suite de totaux 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Bachet montre ensuite sur des exemples que sa tactique reste valable avec d'autres valeurs que 10 et 100. On vérifie aisément que, dans le cas général, la suite des nombres N − i(k + 1), où i décroît de [N / (k + 1)]à 1, est gagnante.

5. Les problèmes de la troisième partie

Les dix énoncés de la troisième partie, dont on voit ci-contre le bel en-tête, méritent presque tous d'être mentionnés.

Problème I

Bachet en donne deux énoncés. J'indique en premier le plus pittoresque, que lui met en second :

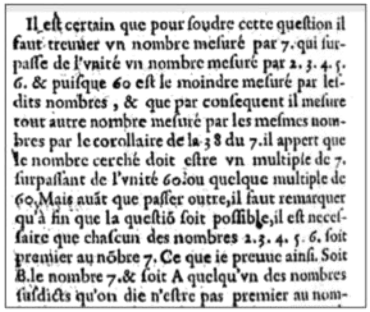
Énoncé 1 : « *Une pauvre femme portant un panier d'œufs pour vendre au marché vient à être heurtée par un certain qui fait tomber le panier et casser tous les œufs, qui pourtant désirant de satisfaire à la pauvre femme s'enquiert du nombre de ses œufs. Elle répond qu'elle ne le sait pas certainement, mais qu'elle est bien souvenante qu'en les comptant deux à deux il en restait 1, et semblablement en les comptant trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou six à six, il en restait toujours 1, mais en les comptant sept à sept il ne restait rien. On demande comme de là on peut conjecturer le nombre des œufs.* »

Énoncé 2 : « *Je demande un nombre qui étant divisé par 2 il reste 1, étant divisé par 3 il reste 1, et semblablement étant divisé par 4, 5 ou 6 il reste toujours 1, mais étant divisé par 7 il ne reste rien.* »

Soit x le nombre cherché ; $x - 1$ doit être multiple de 2, 3, 4, 5, 6, donc de 60. Finalement x doit être de la forme $x = 60u + 1 = 7v$, ce qui revient à résoudre

$7v - 60u = 1$, c'est-à-dire à trouver les coefficients de l'égalité « de Bézout » pour les nombres 7 et 60.

Des tâtonnements méthodiques peuvent régler la question : on ajoute 1 à chaque terme de la suite des multiples de 60 : 61, 121, 181, … et on regarde le reste de la division par 7. La méthode proposée par Bachet est plus savante : elle revient à utiliser $20 \equiv -1 \pmod 7$ et $15 \equiv 1 \pmod 7$ pour en déduire que 7 divise 301 (= 20 × 15 + 1), ce qui correspond à $u = 5$, $v = 43$. Il fait ensuite observer[9] qu'en ajoutant à 301 un multiple de 420 (= 60 × 7), on peut trouver une infinité d'autres solutions.


Il eſt certain que pour ſoudre cette queſtion il faut treuuer vn nombre meſuré par 7. qui ſurpaſſe de l'vnité vn nombre meſuré par 2. 3. 4. 5. 6. & puiſque 60 eſt le moindre meſuré par leſdits nombres, & que par conſequent il meſure tout autre nombre meſuré par les meſmes nombres par le corollaire de la 38 du 7. il appert que le nombre cerché doit eſtre vn multiple de 7. ſurpaſſant de l'vnité 60. ou quelque multiple de 60, Mais auãt que paſſer outre, il faut remarquer qu'à fin que la queſtiõ ſoit poſſible, il eſt neceſſaire que chaſcun des nombres 2. 3. 4. 5. 6. ſoit premier au nõbre 7. Ce que ie preuue ainſi. Soit B. le nombre 7. & ſoit A quelqu'vn des nombres ſuſdicts qu'on die n'eſtre pas premier au nom-

Problème II

« *Trouver un nombre qui étant divisé par 2, laisse 1, divisé par 3 laisse 2, divisé par 4 laisse 3, divisé par 5 laisse 4, divisé par 6 laisse 5, mais divisé par 7 ne laisse rien* ».

C'est visiblement une variante[10] du problème précédent. Si x est ce nombre, on veut que $x + 1$ soit divisible par 2, 3, 4, 5 et 6 et donc par 60, et que x soit divisible par 7 : $x = 60u - 1 = 7v$. Cela revient à écrire l'égalité « de Bézout » $60u - 1 = 7v$. La plus petite solution est $x = 119$.

Problème III (dit « des trois vases »)

Énoncé : « *Deux bons compagnons ont 8 pintes*[11] *de vin à partager entre eux également, lesquelles sont dans un vase contenant justement 8 pintes et, pour faire leur partage, ils n'ont que deux vases dont l'un contient 5 pintes et l'autre 3. On demande comment ils pourront partager justement [c'est-à-dire également] leur vin, en ne se servant que de ces trois vases.* »

Solution : Il s'agit ici de bâtir un algorithme. À chaque étape, la seule opération autorisée est de verser du liquide d'un vase dans un des autres jusqu'à ce que le premier soit vide ou le second plein. Appelons A, B, C les vases de capacité 8, 5 et 3 respectivement ; s'ils contiennent dans l'ordre x, y et z pintes, on note la situation sous la forme (x, y, z). On veut donc passer de $(8, 0, 0)$ à $(4, 4, 0)$.

• La première étape est soit $(3, 5, 0)$ soit $(5, 0, 3)$. Les deux conduisant à une solution, on se contentera ici de démonter le mécanisme de la première, laissant au lecteur le soin de justifier la seconde.

(9) Il indique en passant que Tartaglia, qui a traité le problème un siècle plus tôt, n'a trouvé que deux solutions et donc « n'a pas entendu la règle générale et parfaite démonstration d'icelle ».
(10) Ce problème avait été traité par Tartaglia et par Cardan, mais ils n'avaient trouvé qu'une solution, ce que Bachet ne manque pas de signaler à nouveau.
(11) La pinte de Paris valait un peu moins d'un litre. En province, cela variait selon les régions.

• Pour la deuxième étape, on peut passer de (3, 5, 0) à (0, 5, 3) ou à (3, 2, 3), mais (0, 5, 3) ne débouche sur rien d'intéressant… si ce n'est vers (5, 0, 3), ce qui ferait prendre en route la seconde solution. On passe donc à (3, 2, 3), dont la seule issue nouvelle est (6, 2, 0).

• À partir de là, on peut aller à (8, 0, 0), (3, 2, 3), déjà vus ou à (6, 0, 2), qu'on prend. (6, 0, 2) mène à (1, 5, 2), (5, 0, 3) ou (6, 2, 0). La seule nouveauté est (1, 5, 2), qu'on prend et qui donne (0, 5, 3), déjà écarté, (3, 5, 0) et (6, 0, 2), déjà vus, et (1, 4, 3), qui nous mène à (4, 4, 0). Cette solution et la seconde se résument ainsi :
(8, 0, 0) → (3, 5, 0) → (3, 2, 3) → (6, 2, 0) → (6, 0, 2) → (1, 5, 2) → (1, 4, 3) → (4, 4, 0) ;
(8, 0, 0) → (5, 0, 3) → (5, 3, 0) → (2, 3, 3) → (2, 5, 1) → (7, 0, 1) → (7, 1, 0) → (4, 1, 3) → (4, 4, 0).

Remarque 1 : Bachet obtient les deux solutions par un raisonnement impeccable… en cinq pages.

Remarque 2 : Une variante plus simple est, avec 5 pintes de liquide et des vases de contenance 5, 3, 2, de s'arranger pour retrouver dans le grand vase une quantité donnée. : 1, 2, 3 ou 4. Un peu plus difficile : avec 7 pintes et des vases de contenance 7, 4, 3, retrouver dans le grand vase une quantité donnée : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Remarque 3 : Cet énoncé de Bachet a été proposé ensuite par plusieurs auteurs, en remplaçant à l'occasion (8, 5, 3) par d'autres valeurs. On trouvera dans l'annexe une étude générale.

Problème IV (dit « des trois maris jaloux »)

Ce problème célèbre est emprunté à Alcuin. Énoncé et solution figurent dans l'article « Énigmes carolingiennes » du B.V. n° 512, pages 33-34.

Problème V (dit « des poids de Bachet »)

Ce problème est lui aussi bien connu[12]. L'énoncé de Bachet n'étant ni très clair ni très précis, mieux vaut s'en affranchir.

On donne une balance à deux plateaux et une série de poids qu'on peut mettre sur l'un ou l'autre des deux plateaux.

• **Question 1** (C'est la seule que traite Bachet) : *Les poids sont de 1, 3, 9 et 27 grammes. Montrer qu'ils permettent de tout peser de 1 à 40 grammes, mais pas 41.*

Pour évaluer le poids d'un objet, on compte avec le signe + ce qui est sur l'autre plateau, avec le signe – ce qui est sur le même plateau. La question revient à montrer que tout entier de [1 ; 40] peut s'écrire $27\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4$, chacun des ε valant 0, 1 ou –1 et le premier ε non nul valant forcément 1. Avec les poids 1 et 3, on peut peser de 1 à 4. En adjoignant 9, on peut donc peser, outre 9 lui-même, les $9 \pm x$ avec x allant de 1 à 4, soit donc toute valeur de [5 ; 13]. Avec 1, 3 et 9, on mesure donc de

12) Il a par exemple été proposé à la finale du Rallye mathématique d'Auvergne 2014 et fait l'objet d'un commentaire dans *Panoramath 6*.

1 à 13. Adjoignons maintenant 27 ; cela permet d'évaluer, outre 27, les poids $27 \pm y$, avec y allant de à 13, ce qui règle la question. On ne peut évidemment peser 41, car $1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

• **Question 2** : *Montrer que pour peser tout objet de 1 à 40 grammes, il faut au moins quatre poids.*

Avec 3 poids a, b et c ($a > b > c$), on ne peut avoir que les valeurs $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c$, avec pour les ε les mêmes conventions que ci-dessus. Cela permet d'évaluer $(3 \times 3) + 3 + 1$ poids, soit 13 valeurs au plus.

• **Question 3** : *Montrer que pour peser tout objet de 1 à 40 grammes, si l'on n'a que 4 poids, la seule solution possible est (1, 3, 9, 27).*

Avec 4 poids a, b, c et d ($a > b > c > d$), on obtient les valeurs $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c + \varepsilon_4 d$, avec toujours pour les ε les mêmes conventions. Elles sont au nombre de $(3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3) + 3 + 1$, soit 40. Pour peser de 1 à 40, elles doivent donc être toutes distinctes.
La plus grande est $a + b + c + d$ et la suivante $a + b + c$, ce qui donne $a + b + c = 39$ et $d = 1$.
On obtient 38 par $a + b + c - 1$. Cherchons 37 : nous avons épuisé les trois cas où a, b et c sont affectés du coefficient 1 ; le plus grand des autres nombres est $a + b + 1$, qui vaut donc 37. De $a + b + c = 39$ et $a + b + 1 = 37$, on tire $a + b = 36$ et $c = 3$.
Le plus petit des nombres pour lesquels a et b sont affectés du coefficient 1 est $a + b - 4$, soit 32. On a donc : $31 = a + 3 + 1$, donc $a = 27$, puis $b = 4$.

• **Généralisation** : *Montrer que des poids de* $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n$ *permettent de mesurer (de façon unique) n'importe quel poids x jusqu'à* $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n$, *c'est-à-dire* $\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.
Ce résultat est lié à la numération en base 3 : posons

$$y = x + 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = x + \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

On a $y < 3^{n+1}$; soit $y = 3^n a_n + \ldots + 3a_1 + a_0$ son unique écriture en base 3, les a_i valant 0, 1 ou 2. On en tire $x = 3^n b_n + \ldots + 3b_1 + b_0$, avec $b_i = a_i - 1$ pour tout i, les b_i valant -1, 0 ou 1, cette écriture étant unique. Le problème de Bachet généralisé est donc résolu.

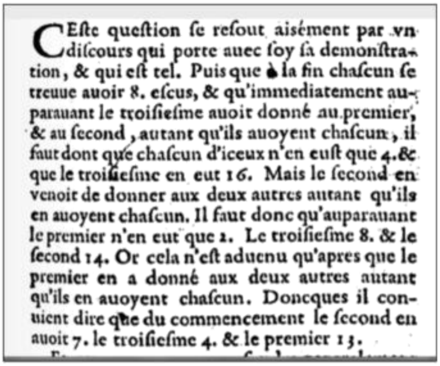
Problème VIII

Énoncé : *Trois hommes ont chacun un certain nombre d'écus. Le premier donne à chacun des deux autres autant que ce dernier en a ; puis le second donne à chacun des deux autres autant que ce dernier en a ; finalement le troisième donne à chacun des deux autres autant que ce dernier en a. Cela fait, chacun se trouve avec 8 écus.*

(13) Il en profite pour égratigner au passage Tartaglia, qui s'est attaqué avant lui au problème et n'a vu qu'une seule des trois solutions.

On demande combien chacun en avait au commencement.

Solution : Bachet a une idée astucieuse (voir l'encadré) : refaire en sens inverse les opérations. À la fin on a (8, 8, 8) ; juste avant on a (4, 4, 16), car le dernier échange a doublé l'avoir des deux premiers hommes ; pour en arriver là, le second a donné 2 au premier et 8 au troisième, puisqu'il a doublé leur avoir ; donc l'état précédent était (2, 14, 8) ; cet état a été obtenu par le don au second de 7 et au troisième de 4. L'état initial était (13, 7, 4).


CEste question se resout aisément par vn discours qui porte auec soy sa demonstration, & qui est tel. Puis que à la fin chascun se treuue auoir 8. escus, & qu'immediatement auparauant le troisiesme auoit donné au premier, & au second, autant qu'ils auoyent chascun, il faut dont que chascun d'iceux n'en eust que 4. & que le troisiesme en eut 16. Mais le second en venoit de donner aux deux autres autant qu'ils en auoyent chascun. Il faut donc qu'auparauant le premier n'en eut que 2. Le troisiesme 8. & le second 14. Or cela n'est aduenu qu'apres que le premier en a donné aux deux autres autant qu'ils en auoyent chascun. Doncques il conuient dire que du commencement le second en auoit 7. le troisiesme 4. & le premier 13.

La mise en équation brutale manquerait de grâce : si l'état initial est (x, y, z), le suivant est $(x - y - z, 2y, 2z)$, puis $(2x - 2y - 2z, -x + 3y - z, 4z)$ et enfin $(4x - 4y - 4z, -2x + 6y - 2z, -x - y + 7z)$, d'où le système

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 8 \\ -2x + 6y - 2z = 8 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}$$

qui est peu agréable, sauf si on a l'astuce de remarquer que l'on a forcément $4x + 4y + 4z = 24$, ce qui, combiné avec la troisième équation, donne z.

Problème IX

« *Trois hommes ont à partager 21 tonneaux, dont il y en a 7 pleins de vin, 7 vides et 7 pleins à demi. Je demande comment peut se faire le partage, en sorte que tous trois aient un nombre égal de tonneaux et égale quantité de vin* ».

L'idée de ce problème fameux est selon toute vraisemblance empruntée à Alcuin, comme celle du problème V. On trouvera l'étude du cas général (avec 2N tonneaux au lieu de 21) dans le B.V. nº 512, aux pages 25-35 de l'article « Énigmes carolingiennes ». Il est à noter qu'Alcuin, qui traite le cas N = 10, donne une seule de ses cinq solutions, alors que Bachet donne pour N = 7 les deux solutions, prouve que ce sont les seules et indique sommairement comment trouver les trois solutions(13) du cas N = 8.

Problème X

Énoncé : « *Il y a 41 personnes en un banquet tant hommes que femmes et enfants qui en tout dépensent quarante sous, mais chaque homme paie 4 sous, chaque femme 3 sous, chaque enfant 4 deniers [1 sou vaut 12 deniers]. Je demande combien il y a d'hommes, combien de femmes, combien d'enfants.* »

(13) Il en profite pour égratigner au passage Tartaglia, qui s'est attaqué avant lui au problème et n'a vu qu'une seule des trois solutions.

Solution : Soit h le nombre[14] d'hommes, f celui de femmes, e celui des enfants. La dépense pour les enfants est forcément (par différence) un nombre entier de sous ; or pour chaque enfant le coût est $\frac{1}{3}$ de sou. Donc e est multiple de 3. Posons $e = 3u$. On se ramène à deux équations à trois inconnues entières positives :.

$$\begin{cases} h + f + 3u = 41 \\ 4h + 3f + u = 40 \end{cases}$$

En combinant pour éliminer par exemple f, il vient : $h = 8u - 83$. h étant positif, on en tire $u \geq 11$. Si on avait $u \geq 12$, on aurait $h \geq 96 - 83$, donc $h \geq 13$, résultat incompatible avec la seconde équation $4h + 3f + u = 40$. Donc $u = 11$, d'où l'on déduit aussitôt : $h = 5$, $f = 3$, $e = 33$.

6. Conclusion

L'oubli dans lequel est tombé Bachet est passablement injuste : il ne s'est pas contenté de redonner vie à l'arithmétique des Anciens, il y a ajouté d'importants résultats nouveaux. Il a en outre contribué à stimuler l'intérêt de son époque pour les sciences. On ne peut en effet attribuer au hasard le fait qu'aient été publiés, dans les vingt ans qui suivirent la première édition de ses *Problèmes*, trois recueils de récréations mathématiques dus respectivement à Denis Henrion (1620), Jean Leurechon (1624) et Claude Mydorge (1630), recueils qui tous trois connurent le succès.

Cela dit, peut-on encore le lire ? La préface et les passages descriptifs ou narratifs de son livre sont de lecture agréable, mais on ne peut en dire autant des raisonnements, qu'il faut suivre la plume à la main en transformant au fur et à mesure les phrases en équations.

La meilleure solution pour le lecteur curieux est d'utiliser l'édition [4] de 1884, qui conserve une large part du texte original, mais donne les démonstrations sous une forme pour nous plus accessible. S'y ajoutent des commentaires, la généralisation d'un certain nombre de problèmes et un supplément de quinze nouveaux énoncés.

Donnons pour finir la parole à Bachet, qui écrit dans sa préface :
«… *encore que ce ne soient que des jeux, dont le but principal est de donner une honnête récréation et d'entretenir avec leur gentillesse une compagnie, si est-ce qu'il faut bien de la subtilité d'esprit pour les pratiquer parfaitement*… ».

Bibliographie

[1] C. COLLET ET J. ITARD : « Un mathématicien humaniste : Claude-Gaspar Bachet de Méziriac », dans *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*,

(14) Cette solution n'est pas celle de Bachet. Le problème est d'un genre voisin de plusieurs problèmes d'Alcuin.

1947, Tome 1 n° 1. p. 26-50.

http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1947_num_1_1_4601

[2] *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex*, Paris 1621.
http://www.e-rara.ch/zut/content/structure/2568306

[3] et [4] CLAUDE GASPAR BACHET : *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres*.
Sur http://gallica.bnf.fr, « recherche avancée », taper *Problèmes plaisans et délectables* et choisir :
• [3] Pour le texte original, la référence datée 1624.
• [4] Pour une version modernisée et commentée, la référence datée 1884.

[5] Le texte de 1884 a été réédité en 1993 chez Blanchard, avec un avant-propos de Jean Itard.

Annexe : le problème général des trois vases

Énoncé : On donne trois vases A, B, C dont les contenances respectives mesurées en pintes sont les entiers a, b et c, avec $a = b + c$, b et c premiers entre eux, $b > c$. Au départ, le vase A est plein et les deux autres sont vides. Étant donné une quantité entière h ($h < a$), montrer que par transvasements successifs on peut arriver à avoir exactement h pintes dans le plus grand vase.

Démonstration : On reprend la notation (x, y, z) pour indiquer les quantités respectivement contenues dans les vases A, B, C. On va s'arranger pour avoir dans A successivement $(n + 1)$ valeurs distinctes. Pour cela on itère une opération Ω qui se décompose en deux phases :

• **Phase Ω_1** : On part de $(x, y, 0)$, on verse de A jusqu'à remplir C, puis on verse C dans B ; on recommence si nécessaire jusqu'à remplir B. On arrive ainsi à la forme $(x - qc, b, r)$; les valeurs q et r sont le quotient et le reste de la « division par excès » de $b - y$ par c, c'est-à-dire que l'on a $b - y = cq - r$, avec $0 \leq r < b$. Dans ces transvasements, le contenu de h a été successivement $x, x - c, \dots, x - qc$.

• **Phase Ω_2** : On a $x - qc = a - y - qc = a - b - r$, donc $x - qc < a - b$. Partant de $(x - qc, b, r)$, on peut donc vider B dans A, puis on vide C dans B.
On arrive ainsi à $(x + b - qc, r, 0)$, soit $(x + a - iq + 1, r, 0)$.

• **Résultat final de Ω** : on est parti de $(x, y, 0)$ pour aboutir à une forme $(x', y', 0)$; au cours des opérations le contenu du vase A est, modulo a, passé successivement par $x, x - c, \dots, x - (q + 1)c$.

• En partant de $(a, 0, 0)$ et en faisant Ω autant de fois que nécessaire, on a dans le vase les contenus modulo a suivants :

$$0, - c, \dots , - qc, - (q + 1)c, - (q + 2)c, \dots , - 2(q + 2)c.$$

Limitons-nous aux $(a + 1)$ premières valeurs $0, - c, \dots , - ac$. Elles sont toutes distinctes **modulo a**. En effet, si $uc \equiv vc \pmod a$ avec $0 \leq u < v \leq a$, a diviserait $(v - u)c$ et, comme il est premier avec c, il diviserait $v - u$, alors que $v - u < a$.

Au cours des opérations, le contenu de A est donc bien passé par toutes les valeurs possibles modulo a, et comme il ne prend que des valeurs situées dans $[0, a]$, *il les a bien toutes prises.*

Un exemple souvent traité par les successeurs de Bachet : on suppose $a = 12$, $b = 7$, $c = 5$ et on veut trouver 6 pintes dans le vase A et 6 dans le vase B.

Première opération Ω_1 (verser A dans C, puis C dans B et recommencer jusqu'à remplir B) :

$$(12, 0, 0) \to (7, 0, 5) \to (7\ 5\ 0) \to (2, 5, 5) \to (2, 7{,}3).$$

Première opération Ω_2 (verser B dans A, puis C dans B) :

$$(2, 7{,}3) \to (9, 0, 3) \to (9, 3, 0).$$

Seconde opération Ω_1 :

$$(9, 3, 0) \to (4, 3, 5) \to (4, 7, 1).$$

Seconde opération Ω_2 :

$$(4, 7, 1) \to (11, 0, 1) \to (11, 1, 0).$$

Troisième opération Ω_1 :

$$(11, 1, 0) \to (6, 1, 5) \to (6, 6, 0),$$

ce qui termine le travail.